

# 기술적 설계제약을 고려한 강건설계법

김경모\*\*

\* 금오공과대학교 신소재시스템공학부(산업시스템공학전공)

## Robust Design Methodology under Design Constraints

Kyung Mo Kim\*\*

\* School of Advanced Materials and Systems Engineering  
Kumoh National University of Technology

Key Words : Multi-attribute Robust Design, Utility Function, Hard Constraint, Soft Constraint

### Abstract

A multi-attribute robust design methodology is presented. This method can be applied where there are various technical constraints in design variables, multiple potentially conflicting design attributes, and uncontrollable noise variables. Two forms of technical constraints, soft and hard constraints, are considered in robust design settings. Specifically, this work presents procedures for integrating two types of design constraints seamlessly on the multiple design attributes, which is achieved through a development of multi-attribute utility formulation. The effectiveness of the overall procedures is tested with the aid of an I-Beam design problem, and results of sensitivity analysis are discussed.

## 1. 서 론

일반적으로 공학적 최적설계는 비선형계획문제로 모델링한 후 수치적 최적화 기법을 사용하여 최적해를 구하게 된다. 또한 설계과정에서는 기능 및 제조상의 다양한 요구사항, 불확실성(uncertainty), 그리고 통제할 수 없는 변수에 의한 성능변동(robustness, 강건성) 등 여러 가지 실제적 문제들에 대해 대응하여야 한다. 따라서 공학적 최적설계에 있어 비선형 계획법을 그대로 적용하는 것은 한계를 가질 수밖에 없다 [9, 19, 20].

제품 및 공정의 최적설계는 서로 상충하는 다수의 설계속성들이 관련된 다속성 의사결정문제(multi-attribute decision problem)로 볼 수 있으며 (Hazerlrigg, 1996), 이는 다음과 같은 3가지 유형의 해결 방법을 갖는다. 첫째, 설계변수의 개수가 2개 이

하인 경우에는 설계속성에 대한 반응등고선을 사용한 다(Lind, 1960). 이 방법은 최적해를 정확하게 구하지 못하는 단점이 있다. 둘째, 가장 중요하다고 생각되는 설계속성을 목적함수로 두고, 나머지 속성들은 제약으로 간주하여 단일속성 의사결정문제(single attribute decision problem)로 접근한다(Del Castillo and Montgomery, 1993). 이것은 다수의 설계속성 중에서 어느 속성을 목적함수로 선택하느냐에 따라 상이한 결과를 준다는 한계가 있다. 셋째, 다수의 설계속성을 한 개의 통합된 설계속성으로 만들어 단일속성 설계문제로 변환한다. 이 방법의 핵심은 통합된 설계속성을 구하는 과정으로, 거리함수(Khuri and Conlon, 1981), 손실함수[1, 15], 호감도함수[3, 4, 8], 효용함수(Thurston, 1991) 등이 통합된 설계속성으로 사용된다. 그러나 거리함수(distance function)는 제약조건이 있는 설계문제에는 그대로 사용할 수가 없고 (Fichtali et al., 1990), 또한 다속성에 대한 이차 손실함수(quadratic loss function)는 구하기가 매우 힘들다. 호감도함수(desirability function)는

† 교신저자 kmkim@kumoh.ac.kr

\* 본 연구는 금오공과대학교 교내연구비 지원에 의해 수행되었음.

전체 호감도(overall desirability)로 통합하는 과정에서 설계자의 절충태도를 반영할 수 없는 한계를 가지고 있다. 반면에 효용함수는 설계자의 선호도(만족도)를 반영한 정규적 평가척도로서, 그 응용대상에 제한이 없다고 할 수 있다(Thurston., 1991).

일반적으로 공학적 설계에는 다수의 설계 속성과 설계 제약이 존재하고, 설계 제약은 반드시 준수하여야 하는 경성제약과 일정 범위의 위반을 허용하는 연성제약이 있다. 또한 설계에는 설계자가 제어하지는 못하나 설계 속성이나 설계 제약에 영향을 주는 변수(즉, 잡음)가 존재한다. 본 연구에서는 다수의 설계 속성과 경성 및 연성제약이 존재하고 설계자가 통제할 수 없는 잡음이 존재하는 상황에서, 다수속성 효용함수를 이용하여 강건한 설계조건을 결정하는 절차를 제시하고자 한다. 아울러 제안된 강건 설계 절차의 유용성을 I-Beam 설계문제를 통하여 보이고자 한다.

## 2. 공학적 설계에서의 효용이론

효용이론은 그간 경제 및 경영문제에 주로 사용되어 왔으나, 최근에는 공학적 설계문제에 효용이론을 도입한 연구가 활발히 진행되어 왔다[7, 9, 19]. 설계에 있어서 효용함수는 설계 대안의 질적 수준을 평가하는 척도로서, 효용함수의 값이 클수록 설계자가 선호하는 설계를 의미하게 된다. 단일속성 효용함수는 단일 설계속성의 특정한 수준에 대한 설계자 선호도(만족도)를 나타내는 함수로서, 최선의 속성수준에 대해 1의 값을 갖고 최악의 속성수준에 대해 0의 값을 갖는다. 또한 다수속성 효용함수는 다수의 설계속성이 관련된 상황에서 설계 대안의 질적 수준을 평가하는 척도로서, 설계속성에 대한 설계자 선호도와 다수의 속성에 대한 설계자의 절충태도를 체계적으로 반영한 통합된 설계속성이라 할 수 있다.

다수속성 효용함수를 설계에 적용하는 일반적인 절차는 1) 설계속성의 결정, 2) 설계속성에 대한 단일속성 효용함수의 결정, 3) 전체 설계속성에 대한 다수속성 효용함수의 결정, 4) 다수속성 효용함수를 이용한 설계 대안의 평가 및 최적해의 결정으로 구성된다(Olson and Moshkovich, 1995). 다수속성 효용함수는 속성에 대한 설계자의 선호구조(preference structure)에 따라 다양한 형태로 나타나지만, 그간 공학적 설계에서는 한 속성에 대한 선호도가 다른 속성의 선호도에 영향을 받지 않는다는 전제 하에서 식

(1)과 같은 승법적 효용함수(multiplicative utility function)가 주로 사용된다[6, 19].

$$u(f_1, \dots, f_n) = \frac{1}{K} [ \prod_{i=1}^n (Kk_i u_i(f_i) + 1) ] - 1 \quad (1)$$

단,  $u(f_1, f_2, \dots, f_n)$  : 다수속성 효용함수

$f_i$  : 설계속성  $i$  의 값 ( $i=1, 2, \dots, n$ )

$u_i(f_i)$  : 속성  $i$  의 단일속성 효용함수

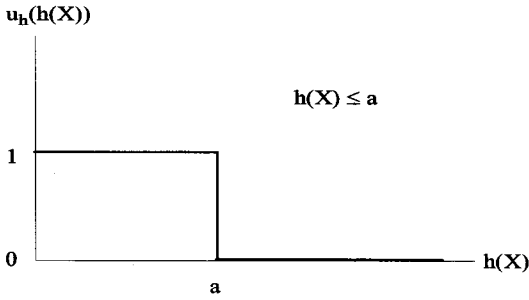
$k_i$  : 설계속성  $i$  의 scaling 상수

$K$  : 정규화상수,  $1+K = \prod_{i=1}^n (1+Kk_i)$

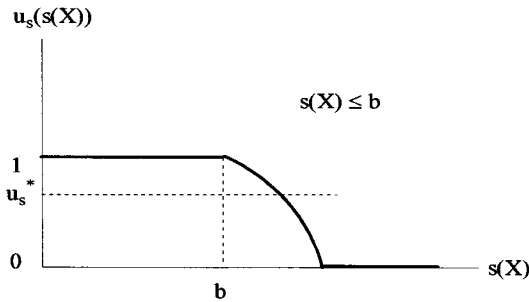
## 3. 효용함수를 이용한 강건 설계문제의 모형화

설계 최적화를 위해서는 설계속성과 제약(design constraints)을 구분하여야 한다. 설계제약은 범위제약과 기술적 제약으로 구분된다. 범위제약은 설계변수가 가질 수 있는 값의 범위로 나타나며, 기술적 제약은 설계변수들 간의 관계를 규정하는 수학적 식으로 표현된다. 또한, 기술적 제약은 경성제약(hard constraints)과 연성제약(soft constraints)으로 나누어진다.

경성제약은 주어진 “요구 수준”을 반드시 만족하여야 하는 제약이다. 따라서 설계 대안이 실행 가능해(feasible solution)가 되기 위해서는 반드시 경성제약을 만족시켜야만 한다. 그리고 경성제약은 제약식의 값이 “요구 수준” 이상을 달성하더라도, 해당 제약에 대한 만족도는 “요구 수준”의 만족도에서 더 이상 증가하지는 않는다(<그림 1> 참조). 연성제약의 경우는 주어진 “이상 수준”을 만족시키지 못하는 설계대안도 “이상 수준”에서 크게 벗어나지 않으면 실행 가능해가 될 수 있다. 연성제약은 제약식의 값이 “이상 수준”에서 멀어질수록 제약에 대한 만족도도 점점 떨어지게 된다(<그림 2> 참조). 일반적으로 연성제약의 경우에는 한 제약에 대한 높은 만족도가 다른 제약의 낮은 만족도를 보상하는 효과를 갖는다. 단일한 연성 제약이 있는 경우를 예로 들면 연성제약식의 값이 “이상 수준”에 상당히 접근하여  $u_i^*$  (연성제약의 최소 만족도)에 도달하면 되면, “이상 수준”으로의 추가적 접근이 제약에 대한 만족도는 증가시키나 해당 설계 대안에 대한 만족도는 더 이상 증가시키지 못한다.



<그림 1> 경성제약  $h(X) \leq a$  의 효용함수



<그림 2> 연성제약  $s(X) \leq b$  의 효용함수

예를 들어, I-Beam 설계에서 beam 처짐은 작을수록 좋으며 처짐이 하나도 없는 경우가 가장 이상적이지만(즉, beam 처짐이라는 연성제약의 “이상 수준”이 0 임), 처짐이 10 이하만 되면 beam 처짐이라는 제약에 대해서는 완전히 만족스러운 상황은 아니지만 그것이 해당 설계 대안의 만족도에는 더 이상 영향을 주지 않는다. 즉, 연성제약은 어느 수준 이상을 만족시키면 설계자는 충분히 만족하며, 그 수준 이상에서는 설계 대안에 대한 설계자 만족도에 해당 제약이 더 이상 영향을 주지 못한다. 한편, 본 연구에서 사용하는 경성제약은 physical programming(Messac, 1996)에서 preference 유형을 구분하는 “hard”의 개념과 동일하나, 연성제약은 “soft” 개념보다 좀 더 완화된 형태이다. 즉, “soft”는 “이상 수준”의 개념이 없으나, 본 연구의 연성제약은 “이상 수준” 이상을 달성한 경우는 모두 동등한 만족도를 준다고 간주한다.

효용함수를 사용한 다수속성 설계문제는 일반적으로 식 (2) 이하와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \max. \quad & u(X) = u_p(f_1(X), \dots, f_k(X)) & (2) \\ \text{s.t.} \quad & h_i(X) \leq a_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & s_i(X) \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, n \\ & X \in D \end{aligned}$$

여기서,  $X$ 는 설계 대안,  $u(X)$ 는  $X$ 에서의 효용값,  $u_p(f_1(X), \dots, f_k(X))$ 는  $k$ 개의 설계속성에 대한 다수속성 효용함수,  $f_i(X)$ 는 설계 대안  $X$ 에서 설계속성  $i$ 의 값,  $h_i(X)$ 는 경성제약,  $a_i$ 는  $h_i(X)$ 의 “요구 수준”,  $s_i(X)$ 는 연성제약,  $b_i$ 는  $s_i(X)$ 의 “이상 수준”,  $D$ 는 범위제약이다.

전통적 공학설계에서는 제조나 사용단계에서 설계 변수가 가질 수 있는 통제할 수 없는 변동을 고려하지 않는다. 예를 들어, 회로의 설계에서 저항값을  $10\Omega$ 으로 결정했다면 주변 온도 등 저항값에 영향을 주는 조건들이 변하더라도 언제나  $10\Omega$ 의 값을 가진다고 간주하며, 화학공정의 설계에서 반응온도를  $50^\circ C$ 로 결정했다면 온도조절기의 온도조절능력 등 반응온도에 영향을 주는 조건이 변하더라도 언제나  $50^\circ C$ 를 가진다는 것을 가정하고 설계 최적화를 추구한다.

강건 설계(robust design)는 설계자가 통제할 수 없는 성능변동원인인 잡음의 영향을 최소화시키는 설계방법이다(Phadke, 1989). 이를 달성하기 위해 강건 설계에서는 설계속성에 대한 이차손실함수(quadratic loss function)의 기대치(조정이 가능한 경우에는 조정 후 기대손실)를 최소화 하는 설계조건을 추구하며, 이것은 속성값,  $f_i(X)$ 으로부터 정의되는 SN비의 최대화로써 구현된다.

한편, 다수의 설계속성이 존재하는 설계문제의 경우 속성의 상대적 중요도에 기초한 절충(trade-off)이라는 어려운 문제의 해결이 요구된다. 절충을 위한 하나의 정규적 접근방법으로 효용함수를 사용할 수 있으며, 효용값은 설계 대안에서 얻어진 속성값에 대한 설계자의 만족도를 의미한다. 공학적 설계과정을 대안의 평가 및 선택과정으로 본다면, 그 선택의 기준은 성능에 대한 객관적 평가(즉, 설계속성의 값)가 중요하지만 결국 이러한 평가는 설계 대안의 선택으로 얻어진 설계속성에 대한 설계자 만족도에 의존한다고 볼 수 있다. 그리고 설계자 만족도는 설계속성에 대한 설계 목표치에 근거하여 결정될 것이다. 이러한 논리를 다음과 같이 강건 설계에 적용해 볼 수 있다. 전통적 의미에서 강건하다는 것은 잡음이 존재하더라도 안정적으로 바람직한 설계속성이 얻어진다는 의미이다. 한편, 설계과정에서 의사결정을 담당하는 설계자의 입장에서 볼 때 잡음이 존재하더라도 안정된 만족도를 주는 설계조건이 선호될 것이다. 본 연구에서는 잡음 하에서 안정된 설계자 만족도를 주는 설계조건

을 넓은 의미에서의 강건한 설계조건으로 생각한다. 즉, 큰 효용함수의 값을 안정적으로 주는 조건을 강건한 설계조건으로 평가하기로 한다. 따라서 단일 설계속성의 경우이건 다수 설계속성의 경우이건 효용함수의 SN비를 최대화하는 조건은 넓은 의미에서의 강건한 설계라고 할 수 있다. 이러한 넓은 의미에서의 강건한 설계조건을 구하는 방법은 Gold and Krishnamurty (1997)와 Iyer and Krishnamurty(1998)에 의해 제안되었다.

효용함수를 이용한 설계문제의 모형화 과정을 살펴보면 다음과 같다. 개별 경성제약은 “요구 수준”을 만족하지 못하면 만족도가 0이 되고, “요구 수준”을 만족하면 만족도가 1이 된다. 따라서 개별 경성제약의 효용함수는 식 (3)과 같이 정의할 수 있다.

$$u_{h_i}(h_i(X)) = \begin{cases} 1, & h_i(X) \text{ 제약만족} \\ 0, & h_i(X) \text{ 제약불만족} \end{cases} \quad (3)$$

다수의 경성제약 중 1개의 경성제약이라도 만족하지 못하면 설계 대안은 실행 불가능해가 된다. 즉, 경성제약에 대한 전체 만족도는 경성제약 중 만족도가 가장 낮은 경성제약에 의해 결정된다고 볼 수 있다. 따라서 경성제약 간에는 비상호보상적(noncompensatory) 절충이 성립한다(Otto and Antonsson, 1991). 그러므로  $m$ 개의 경성제약이 있는 경우, 전체 경성제약에 대한 설계자 만족도는 식 (4)와 같이 평가할 수 있다.

$$u_h(X) = \min [u_{h_i}(h_i(X)), i = 1, 2, \dots, m] \quad (4)$$

개별 연성제약은 제약식의 값에 따라 만족도가 결정된다. 즉, 개별 연성제약  $s_i(X)$ 에 대한 설계자 만족도는 단일속성 효용함수  $u_{s_i}(s_i(X))$ 로 평가할 수 있다. 그리고 다수의 연성제약 중 1개의 연성제약이 만족되지 못한다고 해서 설계 대안이 실행 불가능해가 되지 않으며, 한 연성제약의 만족도가 낮더라도 다른 연성제약의 만족도가 높으면 결과적으로 연성제약의 전체 만족도는 높아질 수 있다. 즉, 연성제약은 상호보상적(compensatory) 절충이 성립한다(Otto and Antonsson, 1991). 그러므로  $n$ 개의 연성제약이 있는 경우, 전체 연성제약에 대한 설계자 만족도는 식 (5)와 같이 평가할 수 있다.

$$u_s(X) = \prod_{i=1}^n u_{s_i}(s_i(X)) \quad (5)$$

한편, 전체 연성제약에 대한 최소 만족도( $u_s^*$ )는 설

계자가 추구하는 설계기준에 따라 사전에 설정될 수 있다. 설계 대안  $X$ 에 대해 모든 경성제약이 만족되지 않거나 전체 연성제약의 만족도가 최소 만족도  $u_s^*$ 보다 작으면, 이러한 설계 대안은 받아들일 수 없는 대안으로서 설계자 만족도는 0의 값을 가져야 한다. 그리고 제약에 대한 위의 요구가 모두 만족한다면, 설계 대안  $X$ 에 대한 설계자 만족도는 다수속성 효용함수값  $u_p(f_1(X), \dots, f_k(X))$ 을 갖는다. 이와 같은 논리를 바탕으로 경성제약과 연성제약이 있는 다수속성 설계문제는 식 (6) 이하와 같이 모형화 될 수 있다.

$$\max. u(X) = u_p(f_1(X), \dots, f_k(X))u_c(X) \quad (6)$$

$$s.t. X \in D$$

단,  $f_i(X)$  : 대안  $X$ 에서 속성  $i$ 의 값

$$u_h(X) = \min [u_{h_i}(h_i(X)), i = 1, 2, \dots, m]$$

$$u_{h_i}(h_i(X)) = \begin{cases} 1, & h_i(X) \geq a_i \\ 0, & h_i(X) < a_i \end{cases}$$

$$u_s(X) = \prod_{i=1}^n u_{s_i}(s_i(X))$$

$u_{s_i}(s_i(X))$  :  $s_i(X)$ 의 효용함수

$$u_c(X) = \begin{cases} 1, & u_h(X)u_s(X) \geq u_s^* \\ 0, & u_h(X)u_s(X) < u_s^* \end{cases}$$

$u_s^*$  : 전체 연성제약의 최소 만족도

$D$  : 설계변수의 범위제약

강건 설계에서 잡음의 영향은 직교배열표를 이용하여 체계적으로 반영할 수 있는데, 설계변수에 대한 잡음영향을 고려하면 설계 대안  $X$ 는 잡음의 조건에 따라  $X_i = X + \delta_i$  (여기서,  $\delta_i$ 는 잡음에 의한  $X$ 의 변동,  $i = 1, 2, \dots, l$ )의 값을 갖는다고 볼 수 있다. 따라서 강건설계의 최적해 탐색과정에서 설계 대안  $X$ 의 질적 수준은 식 (7)로 주어지는  $u(X)$ 의 SN비(당대특성 SN비)로서 평가할 수 있다.

$$SN(u(X)) = -10 \log \left[ \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \frac{1}{u(X_i)^2} \right] \quad (7)$$

## 4. 사례 연구 및 민감도 분석

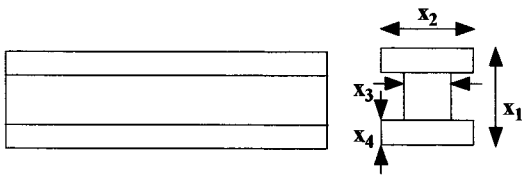
본 연구에서 제안된 강건 설계절차의 유용성을 보이기 위해, I-Beam 설계문제 [7, 10]를 본 연구의 설계상황에 맞추어 수정한 후 사용하기로 한다. I-

Beam 설계는 단일속성 설계문제이나 앞에서 살펴본 바와 같이 다수속성 효용함수를 사용하면 다수속성 설계문제도 단일속성 설계문제로 변환되므로, 다수속성 설계문제의 경우에는 다수속성 효용함수를 구하는 절차만 추가될 뿐 그 이후의 과정은 단일속성 설계문제와 완전히 동일한 절차가 적용된다. 따라서 본 연구에서 제시한 설계절차는 다수속성 효용함수의 결정과정만 추가하면 다수속성 설계문제에 그대로 적용될 수 있다.

I-Beam의 전체 구조는 <그림 3> 왼쪽과 같으며 그 단면은 <그림 3> 오른쪽과 같다. I-Beam 설계는 beam 처짐이 가능한 작고, 굽힘 stress가 재료의 허용한계를 반드시 만족하면서, beam 단면적이 최소가 되도록 beam 의 치수를 결정하는 것이다. 즉, I-Beam 설계에서 설계변수는 <그림 3>의  $x_1, x_2, x_3, x_4$  이며, 그밖에 설계와 관련된 주어진 조건은 Iyer and Krishnamurty(1998)에서와 동일하다. 원래의 I-Beam 설계문제는 2개의 설계제약이 모두 연성제약으로 주어졌으나, 본 연구의 사례에서는 굽힘 stress에 대한 제약을 경성제약으로 변경하여 고려하였다. 따라서 설계속성이 beam 단면적, 경성제약이 굽힘 stress, 연성제약이 beam 처짐인 설계문제로 변경하여 제안된 해법절차를 적용하였다.

설계속성 : Beam 단면적(양수이며 작을수록 바람직 함)

$$f_1(X) = 2x_2x_4 + x_3(x_1 - 2x_4) \tag{8}$$



<그림 3> I-Beam 문제의 설계변수

경성제약 : 굽힘 stress(양수이며 작을수록 바람직 함, “요구 수준”은  $h_1(X) = 16$  임)

$$h_1(X) = \frac{180000x_1}{x_3(x_1 - 2x_4)^3 + 2x_2x_4(4x_4^2 + 3x_1(x_1 - 2x_4))} + \frac{15000x_2}{(x_1 - 2x_4)x_3^3 + 2x_4x_2^3} \tag{9}$$

연성제약 : Beam 처짐(양수이며 작을수록 바람직 함, “이상 수준”은  $s_1(X) = 0$  임)

$$s_1(X) = \frac{5000}{[(\frac{1}{12})x_3(x_1 - 2x_4)^3 + (\frac{1}{6})x_2x_4^3 + 2x_2x_4(\frac{x_1 - x_4}{2})^2]} \tag{10}$$

범위제약 : Beam의 치수한계

$$10 \leq x_1 \leq 80, 10 \leq x_2 \leq 50 \\ 0.9 \leq x_3 \leq 5, 0.9 \leq x_4 \leq 5 \tag{11}$$

설계속성과 연성제약에 대한 효용함수는 설계자 선호도에 따라 결정될 것이나, 본 연구에서는 Iyer and Krishnamurty(1998)가 사용한 식 (12)와 (13)을 그대로 사용하기로 한다. 그리고 경성제약은 정의에 의해서 식 (14) 와 같이 표현되며, 설계자에 의해 사전에 설정된 전체 연성제약의 최소 만족도는  $u_s^* = 0.8$  이라고 가정한다(이후에  $u_s^*$  변화에 따른 최적해의 변화에 대해 민감도 분석을 실시함).

$$u_p(f_1(X)) = 2.028 - 0.7917e^{0.001045f_1(X)} \tag{12}$$

$$u_{s_1}(s_1(X)) = 1.7839 - 0.7839e^{8.2222s_1(X)} \tag{13}$$

$$u_{h_1}(h_1(X)) = \begin{cases} 1, & h_1(X) \leq 16 \\ 0, & h_1(X) > 16 \end{cases} \tag{14}$$

따라서 I-Beam 에 대한 강건 설계문제는 식 (15) 이하와 같이 모형화 된다.

$$\max. SN(u(X)) \tag{15} \\ 10 \leq x_1 \leq 80, \quad 10 \leq x_2 \leq 50, \quad 0.9 \leq x_3 \leq 5, \\ 0.9 \leq x_4 \leq 5$$

여기서,

$$SN(u(X)) = -10 \log \left[ \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \frac{1}{u(X_i)^2} \right] \tag{16}$$

$X_i$  : 잡음에 따른  $X$ 의 변동( $i=1,2,\dots,l$ )

$$u(X) = u_p(f_1(X))u_c(X) \tag{17}$$

$$u_c(X) = \begin{cases} 1, & u_{s_1}(s_1(X))u_{h_1}(h_1(X)) \geq 0.8 \\ 0, & u_{s_1}(s_1(X))u_{h_1}(h_1(X)) < 0.8 \end{cases} \tag{18}$$

잡음인자변동의 모사는 Monte Carlo 시뮬레이션

선 방법, Taylor 급수전개에 의한 방법, 직교배열표에 의한 모사법으로 나누어지며, 직교배열표에 의한 모사법에서는 2수준 잡음인 경우 잡음인자값의 평균과 변동을  $\mu$  와  $\sigma$  라고 하면  $\mu - \sigma$ 와  $\mu + \sigma$ 를 사용하여 변동의 크기를 고려한다 「Phadke, 1989」. 실제 설계에서는 잡음인자에 대한 조사를 통해  $\sigma$  를 결정하여야 하나, 본 사례에서는 편의상 잡음에 의한 설계변수  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 의 변동을 Iyer and Krishnamurty(1998)의 경우와 동일하게 정격치(nominal value)의  $\pm 5\%$  라고 가정한다. 즉, <표 1>과 같이  $L_8(2^7)$  직교배열표의 1열, 2열, 4열, 7열에 설계변수를 배치하면, 잡음조건에 따라 <표 2>의  $X_i = \{x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, x_{4i}\}$ 와 같이 변동한다고 볼 수 있다. 따라서 각각의  $X_i$ 에 대해 식 (12)의  $u_p(f_1(X_i))$ 와 식 (18)의  $u_c(X_i)$ 를 구하고, 이로부터 식 (17)의 목적함수  $u(X_i)$ 를 결정한다.

잡음인자를 위한 외측배열(outer array)의 선택과 잡음인자의 배치에 따라 설계속성과 설계제약을 평가하는 점( $X_i$ )이 달라지기 때문에, 잡음인자변동의 모사방법이 SN비에 영향을 주며 결과적으로 최적해에 영향을 준다. 이러한 문제는 유한개의 평가점을 갖는 직교표에 의한 잡음모사방법의 한계로 볼 수 있으며, 이러한 영향을 최소화하기 위해서는 외측배열에 직교표를 사용하지 않고 잡음인자의 모든 수준 조합으로 평가점을 결정할 수 있을 것이다.

<표 1>  $L_8(2^7)$  을 이용한 잡음영향의 도입

$L_8(2^7)$	1열	2열	3열	4열	5열	6열	7열
	$x_1$	$x_2$	e	$x_3$	e	e	$x_4$
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

주) e는 인자가 배치되어 있지 않음을 의미함

본 사례에서는 식 (15) 이하의 최적화 문제에 대해 Excel의 해 찾기 기능을 이용하여 최적해를 구하였다. 해를 탐색하는 과정에서, 후보해  $X$ 에 대해서 <표 2>의  $X_i$ 에서 구한  $u(X_i)$ 으로 부터 식 (16)의 SN비를 구한 후, SN비를 최대화 하는 설계해를 탐색하여 최적해  $X^* = \{75.96, 47.27, 1.95, 1.19\}$ 를 결정하였다.

위에서 결정된 최적해( $X^*$ )에 대해 제약식 만족여부를 살펴보면,  $h_1(X^*) = 7.94$ 이고 잡음의 영향을 고려하더라도 6.86~9.26의 범위에 있으므로 제약식  $h_1(X_i^*) \leq 16$ 을 모두 만족한다. 또한  $u_{s_1}(s_1(X^*))u_{h_1}(h_1(X^*)) = 0.84$ 이고 잡음의 영향을 고려하더라도 0.80~0.87의 범위에 있으므로 전체 연성제약에 대한 최소 만족도  $u_s^* = 0.8$ 을 만족함을 알 수 있다.

<표 2> 잡음영향에 따른  $X$ 의 변동

	$x_{1i}$	$x_{2i}$	$x_{3i}$	$x_{4i}$
$X_1$	$0.95x_1$	$0.95x_2$	$0.95x_3$	$0.95x_4$
$X_2$	$0.95x_1$	$0.95x_2$	$1.05x_3$	$1.05x_4$
$X_3$	$0.95x_1$	$1.05x_2$	$0.95x_3$	$1.05x_4$
$X_4$	$0.95x_1$	$1.05x_2$	$1.05x_3$	$0.95x_4$
$X_5$	$1.05x_1$	$0.95x_2$	$0.95x_3$	$1.05x_4$
$X_6$	$1.05x_1$	$0.95x_2$	$1.05x_3$	$0.95x_4$
$X_7$	$1.05x_1$	$1.05x_2$	$0.95x_3$	$0.95x_4$
$X_8$	$1.05x_1$	$1.05x_2$	$1.05x_3$	$1.05x_4$

본 연구에서 제안된 절차가 다양한 설계상황에서도 안정적으로 적용될 수 있음을 보이기 위해 민감도 분석을 실시하였다. 제안된 절차를 사용하기 위해서 설계자는 개별 속성에 대한 단일속성 효용함수를 결정하고, 전체 연성제약의 최소 만족도( $u_s^*$ )를 설정하여야 한다. 일반적으로 단일속성 효용함수의 결정은 설계자(의사결정자)의 위험성향으로부터 함수의 형태를 결정하고, 복권질문을 통하여 함수에 포함된 미지의 파라미터를 추정함으로써 완성된다. 효용함수의 파라미터는 복권질문에 대한 설계자의 주관적 답변에 영향을 받지만 추가적 질문을 통한 일관성 확인(consistency check) 과정을 거치면서 보다 정확한 추정이 가능하다(Keeney 와 Raiffa, 1993). 즉, 효용

함수는 설계자에 종속적으로 결정되고 설계자의 선호 구조에 따라 매우 다양한 형태를 가지므로, 효용함수의 형태에 대한 민감도 분석은 큰 의미를 갖지 못한다고 판단된다. 따라서 설계자가 주관적으로 설정한 연성제약의 최소 만족도( $u_s^*$ )에 대해서만 민감도 분석을 실시하였다.  $u_s^*$  변화에 따라, 제안된 절차로 구한 최적조건에서의 속성 및 제약의 값과 이들에 대한 만족도는 <표 3>과 같다. 최소 만족도( $u_s^*$ )가 커질수록 실행가능해의 공간이 축소되는 효과가 발생하므로, 최적해의 설계자 만족도( $u(X)$ )는 감소함을 <표 3>에서 확인할 수 있다. 또한 본 조건에서는  $u_s^*$ 가 커짐에 따라,  $f_1$ 는 커지고 따라서 속성에 대한 만족도는 작아지고,  $s_1$ 는 작아지고 따라서 연성제약에 대한 만족도는 커지며,  $h_1$ 은 작아지나 언제나 요구조건을 만족함을 알 수 있다.

<표 3> 최적조건에서의 속성/제약 및 만족도

$u_s^*$		0.6	0.7	0.8	0.9
설계 속성	$f_1$	223.3	223.3	255.8	460.8
	$u_p(f_1)$	1.00	1.00	0.99	0.75
연성 제약	$s_1$	0.027	0.027	0.023	0.012
	$u_{s_1}(s_1)$	0.81	0.81	0.84	0.92
경성 제약	$h_1$	9.64	9.64	7.94	4.01
	$u_{h_1}(h_1)$	1.00	1.00	1.00	1.00
$u(X)$		1.00	1.00	0.99	0.75

그리고 제안된 절차(방법A)의 우월성을 보이기 위해, 본 연구의 설계상황과 가장 유사한 기존 연구(방법B)와 비교하여 민감도 분석을 실시하였다. 연성제약과 경성제약을 동시에 다루고 있는 기존의 연구는 없으므로, 강건 설계에 효용함수를 사용한 Iyer and Krishnamurty (1998)의 절차를 본 연구의 상황에 맞추어 수정한 절차를 비교하였다. 방법B에서는 Iyer and Krishnamurty (1998)에서 사용된 다수속성 효용함수인 식 (19)를 최대화하여 최적해를 구하였다. 한편, 방법A와 방법B가 서로 다른 효용함수를 사용하므로, 효용값을 직접 비교하는 것은 큰 의미가 없다. 따라서 각각의 절차로 최적해를 구한 다음, 이들을 본 연구에서 사용한 효용함수인 식 (16)을 이용하여 효

용값을 구하고, 이로부터 SN비를 구하여 비교한 결과가 <표 4>에 제시되어 있다.

$$u(f_1(X), f_2(X), f_3(X)) = -\frac{1}{0.9281} \{ [-0.1856 (2.028 - 0.7917e^{0.001045f_1(X)}) + 1] \times [-0.4641 (1.308 - 0.231e^{57.8f_2(X)}) + 1] \times [-0.8353(1 + \frac{16.9f_3(X)}{e^{0.4443}})^{-1} + 1] - 1 \} \quad (19)$$

<표 4>  $u_s^*$ 에 따른 최적해의 변화

$u_s^*$	방법A : 제안된 방법		방법B : Iyer and Krishnamurty 방법		
	최적해	SN(dB)	최적해	SN(dB)	
0.60	$x_1^*$	75.98	0.00	76.19	-0.76
	$x_2^*$	47.20		47.62	
	$x_3^*$	1.81		0.95	
	$x_4^*$	0.95		2.70	
0.70	$x_1^*$	75.98	0.00	76.19	-0.76
	$x_2^*$	47.20		47.62	
	$x_3^*$	1.81		0.95	
	$x_4^*$	0.95		2.70	
0.80	$x_1^*$	75.96	-0.08	76.19	-0.76
	$x_2^*$	47.27		47.62	
	$x_3^*$	1.95		0.95	
	$x_4^*$	1.19		2.70	
0.90	$x_1^*$	76.06	-2.57	76.19	-155.74
	$x_2^*$	47.38		47.62	
	$x_3^*$	3.06		0.95	
	$x_4^*$	2.57		2.70	

방법A에서는  $u_s^*$ 가 커지면, 실행 가능해의 공간이 축소되므로 최적해의 SN비는 감소함을 알 수 있다. 그리고  $u_s^*$ 가 작아지면(0.6-0.7의 경우), 최소 만족도 제한이 binding constraint로 작용하지 못하기 때문에 동일한 최적해를 가진다. 방법B에서는 연성제약의 최소 만족도( $u_s^*$ )를 고려하지 않기 때문에,  $u_s^*$ 가 변화

하더라도 <표 4>에서 보는 바와 같이 최적해가 변화하지 않는다. 또한,  $u_s^*$  가 커지면(0.9의 경우), 최적해가 연성제약의 최소 만족도를 위배하기 때문에 다른  $u_s^*$  경우에 비해 매우 작은 SN값(-155.74 dB)을 가진다.

위에서 살펴 본 바와 같이  $u_s^*$  의 변화에 대해 제안된 해법절차(방법A)는 예상된 방향으로 반응하였으며, 기존의 방법(방법B)에 비해 더 우수한 최적해를 안정적으로 제공함을 확인할 수 있었다.

### 5. 결 론

공학적 설계에서 다수의 설계속성을 고려하는 것은 매우 일상적인 일이며, 다수 속성간의 절충(trade-off)은 설계과정에서 대응해야 하는 매우 어려운 문제이다. 또한 통제할 수 없는 성능변동원인에 대응한 설계도 매우 중요한 과제이다. 그 간의 직교배열표 실험에 기초한 전통적 강건 설계에서는 설계변수들 간의 관계를 규정하는 기술적 제약을 고려할 수 없었으며, 더구나 설계에 고려하는 속성이 다수인 경우에는 매우 복잡한 절충절차가 추가적으로 필요하다(Phadke, 1989).

본 연구에서는 설계변수에 대한 다양한 형태의 기술적 제약을 갖는 경우에 대한 강건 설계방법을 제시하고, I-Beam 설계사례에 적용해 봄으로써 제안된 방법의 유용성을 확인하였다. I-Beam 설계문제는 단일속성 설계문제이지만, 다수속성에 대한 설계에서도 효용함수를 사용함으로써 단일속성 설계문제와 수학적 구조가 동일하게 변환되므로 I-Beam 문제에서와 동일한 해법절차를 적용할 수 있다. 또한 민감도 분석을 통해 연성제약의 최소 만족도의 변화에 대해 제안된 해법절차가 안정적으로 강건한 설계해를 제공함을 확인하였다. 그리고 다수의 설계속성을 효용함수를 통해 손쉽게 절충할 수 있게 하였으며, 경성제약과 연성제약을 설계속성에 통합함으로써 본 연구에서의 탐색적 방법만이 아니라 전통적인 직교배열표 실험을 이용한 강건 설계에서도 사용할 수 있도록 하였다.

최적화 문제의 목적함수인  $SN(u(X))$  의 수학적 성질이 비교적 좋다면(fairly well behaved) 본 연구에서 사용한 직접탐색기법과 같은 전통적 비선형 최적화 기법으로도 만족스러운 최적해를 구할 수 있으나, 만약 목적함수  $SN(u(X))$  가 매우 비선형적이고

multimodal 하다면 simulated annealing 이나 tabu search와 같은 heuristic search methods를 사용하여 할 것이다. 본 연구는 제약식이 존재하는 다수속성 강건 설계문제를 효용함수를 사용하여 모형화 하는 것을 일차적인 목표로 하고 있으므로, 문제에 종속적인 해법절차의 효율성에 대해서는 추후의 연구과제에서 다루고자 한다.

### 참 고 문 헌

- [1] Ames, A. E., Mattucci, N., MacDonald, S., Szonyi, G. and Hawkins, D. M. (1997), "Quality Loss Functions for Optimization Across Multiple Response Surfaces", *Journal of Quality Technology*, Vol. 29, pp. 339-346.
- [2] Del Castillo, E. and Montgomery, D. C. (1993), "A Nonlinear Programming Solution to the Dual Response Problem", *Journal of Quality Technology*, Vol. 25, pp. 199-204.
- [3] Del Castillo, E., Montgomery, D. C. and McCarville, D. R. (1996), "Modified Desirability Functions for Multiple Response Optimization", *Journal of Quality Technology*, Vol. 28, pp. 337-345.
- [4] Derringer, G. and Suich, R. (1980), "Simultaneous Optimization of Several Response Variables", *Journal of Quality Technology*, Vol. 12, pp. 214-219.
- [5] Fichitali, J., Van De Voort, F. R. and Khuri, A. I. (1990), "Multiresponse Optimization of Acid Casein Production", *Journal of Food Process Engineering*, Vol. 12, pp. 247-258.
- [6] Fischer, G. W. (1979), "Utility Models for Multiple Objective Decisions : Do They Accurately Represent Human Preferences?", *Decision Sciences*, Vol. 10, pp. 451-479.
- [7] Gold, S. and Krishnamurty, S. (1997), "Trade-offs in Robust Engineering Design", *Proceedings of ASME-DETC'97*, Sacramento, CA, pp. 1-8.
- [8] Harrington, E. C., Jr. (1965), "The Desirability Function", *Industrial Quality Control*, Vol. 21, pp. 494-498.
- [9] Hazertrigg, G. A. (1996), "Systems Engineering : A New Framework for Engineering Design", *American Society of Mechanical Engineers, Dynamic System and Control Division*, Vol. 60, pp. 39-46.



- [10] Iyer, H. V. and Krishnamurty, S. (1998), "A Preference-Based Robust Design Metric", Proceedings of 1998 ASME Design Engineering Technical Conferences, DETC98/DAC-5625.
- [11] Keeney, R. L. and Raiffa, H. (1993), *Decisions with Multiple Objectives : Preferences and Value Tradeoffs*, 2<sup>nd</sup> ed., John Wiley & Sons Inc., NY.
- [12] Khuri, A. I. and Conlon, M. (1981), "Simultaneous Optimization of Multiple Responses Represented by Polynomial Regression Functions", *Technometrics*, Vol. 23, pp. 363-375.
- [13] Lind, E. E., Goldin, J. and Hickman, J. B. (1960), "Fitting Yield and Cost Response Surfaces", *Chem. Eng. Prog.*, Vol. 56, pp. 62-68.
- [14] Messac, A. (1996), "Physical Program -ming : Effective Optimization for Computational Design", *AIAA Journal*, Vol. 34, pp. 149-158.
- [15] Miro-Quesada, G. and Del Castillo, E. (2004), "Two Approaches for Improving the Dual Response Method in Robust Parameter Design", *Journal of Quality Technology*, Vol. 36, pp. 154-168.
- [16] Olson, D. L. and Moshkovich, H. M. (1995), "Consistency and Accuracy in Decision Aids : Experiments with Four Multiattribute Systems", *Decision Sciences*, Vol. 26, No. 6, pp. 723-748.
- [17] Otto, K. N. and Antonsson, E. K. (1991), "Trade-Off Strategies in Engineering Design", *Research in Engineering Design*, Vol. 3, pp. 87-103.
- [18] Phadke, M. S. (1989), *Quality Engineering Using Robust Design*, Prentice Hall, NJ.
- [19] Thurston, D. L. (1991), "A Formal Method for Subjective Design Evaluation with Multiple Attributes", *Research in Engineering Design*, Vol. 3, pp. 105-122.
- [20] Yang, J. B. and Sen P. (1996), "Preference Modeling by Estimating Local Utility Functions for Multiobjective Optimization", *European Journal of Operational Research*, pp. 115-138.