

## 가이드 곡면을 이용한 곡면의 변형

김 성 환\*

### Surface Deformation Using Guide Surfaces

Sung Hwan Kim\*

#### ABSTRACT

In this paper, the method to modify a surface through three dimensional vector field technique is presented. In this method two guide surfaces are required as a shape reference. One is the shape of original surface, the other is the target shape for the result surface. Proposed method is consists of two steps. The first step is to calculate the mapping points on original and target guide surfaces so that the shape error may be minimized. The second step is to construct the smooth vector field from mapping points of the first step. The developed method is applied to shoe design system which makes the surface modeling very easy and effective.

**Key words :** Surface, Guide, Deformation, Multi-level B-spline approximation, Shoe design system

#### 1. 서 론

본 연구는 복잡한 곡면을 다루는 모델링, 특히 신발 모델링 및 금형 설계를 위한 곡면의 생성, 수정에 있어 CAD 프로그램을 사용할 때, 많은 수작업을 야기하여 설계자에게 큰 부담을 유발하거나 혹은 수작업으로는 결과를 얻기 거의 불가능한 난해한 작업을 최소한의 사용자 입력으로부터 수행하게 하는 기능의 개발을 목표로 하고 있다.

본 연구에서 목표로 하는 기능은 원하는 경향을 가지는 곡면의 변형(deformation)인데, 다음과 같이 설명할 수 있다. 예를 들어 중창에 들어가는 에어백은 공급되는 제품형상이 금형에서 생산된 초기형상이며 아래 Fig. 1과 같이 중간 면이 평면에 가까운 형태를 가지고 있다. 하지만 이것이 제품에 조립되려면 원래의 형상을 유지하기 어렵고 중창 면에 따라 굽어지게 된다. Fig. 2는 조립되어 굽어진 에어백의 형상이며 중간면이 곡면의 형태를 가지고 있다.

Fig. 2와 같이 굽어진 에어백의 형상은 중창과 에어백이 잘 조립되는지, 주변 부품의 설계에 이상이 없는지 등을 검증하기 위해 설계단계에서 반드시 필요한

모델이다. 그러나 변형시키코자 하는 모델 자체가 매우 복잡하므로 수작업으로는 거의 구현하기 어려운 난점이 있다. 지금 설명한 경우는 중간면이 평면인 경우에서 곡면인 경우로의 변형이나 반대로 곡면인 경우에서 평면인 경우도 필요하게 되며, 일반적으로는 곡면에서 곡면으로의 변형도 필요하게 된다.

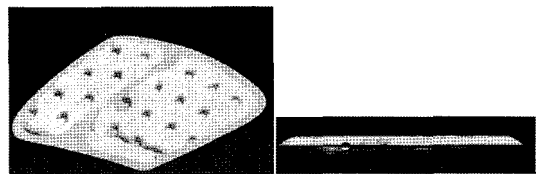


Fig. 1. The shape of air bag product.



Fig. 2. Deformed air bag model.

한편 변형이 단방향 곡률에 국한되는 경우도 있다. 위의 에어백의 경우는 변형되는 가이드 면이 양방향( $u, v$ )으로 모두 변하고 있다. 하지만 Fig. 3의 경우는 생산을 위한 외창(Out sole)의 형상을 보여 주고 있는데 이것이 조립된 모양을 보려면 중창의 곡률에 맞추

\*총신회원, 서울산업대학교 기계설계자동화공학부.  
- 논문투고일: 2007. 03. 30  
- 심사완료일: 2007. 09. 18



Fig. 3. Single direction deformation.

어 길이 방향을 따라 납어지게 해주어야 한다.

본 연구에서는 위의 두 경우를 구분하여 각각 양방향 변형과 단방향 변형이라고 지칭한다. 단방향 변형은 현재 작업자들에 의해 어렵게나마 수동으로 수행되고 있으나 많은 시간을 소요하게 하고 있다.

이러한 변형은 변형 후 형상이 원하는 가이드 곡면의 형상을 따라가야 하고 또 변형 전 형상과 변형 후 형상에서 임의의 대응점간 거리의 변화가 최소화되어야 한다. 임의의 대응점간 거리의 변화를 정량화하여 이를 형상오차(geometric error)라 부르기로 한다. 형상오차가 작다는 것은 변형을 가할 때 어느 부분이 지나치게 잡아 늘여지거나 압축됨이 없다는 것을 의미하며 실제 물건을 구부릴 때의 물리적 현상을 가장 유사하게 반영하는 것이라 생각할 수 있다. 단방향 변형은 이론적으로 형상오차가 전혀 없이 변형될 수 있으나 양방향 변형은 그렇지 않은 경우가 일반적이다. 따라서 어떤 형식이든 최적화 과정을 거쳐야 하미 이것이 단방향과 양방향의 근본적 차이이다.

본 연구에서는 이와 같은 변형을 용이하게 구현가능하게 하기 위해 원래 형상과 변형 형상을 대표하는 원형(original) 가이드 면과 목적(target) 가이드 면을 사용자로부터 입력받아 변형 형상 곡면을 생성하는 방법을 개발하였다. 가이드 면들이 주어지면 변형의 본질은 “가이드 면의 변화와 같은 방식”으로 “주어진 곡면, 곡선, 점들을 변화”시키는 것이다. 이 과정은 두 단계로 진행되는데 첫 번째는 가이드 곡면 위의 점간의 대응관계를 정의하기 위해 곡면생성을 수행하는 것이고 두 번째는 이에 따라 가이드 면 인근 점들을 추종 변화시키는 것이다. 2장과 3장에서 이들을 각각 설명한다.

## 2. 곡면 간의 전개(Surface development)

### 2.1 곡면 변화의 정량적 표현

변형기능을 사용할 필요가 생긴 설계자는 주어진

곡면이 어떤 방식으로 변해야 하는지에 대한 의도가 생기게 된다. 이때 원래의 어떤 형상이 후의 어떤 형상으로 변해야 할지에 대해 정보를 제공해야 하는데 예를 들어 아래 Fig. 4에서는 원래 평면이었던 (a)의 면이 (b)의 다른 곡면으로 바뀌는 예를 보여준다. 대개 목적면은 이미 존재하는 모델의 면인 경우가 흔하며 따라서 사용자는 비교적 수월하게 변경 전의 가이드 면과 변경 후의 가이드 면을 입력할 수 있다. 추가로 두 면 위의 기준 대응점과 정렬방향도 사용자가 제공하여야 한다.

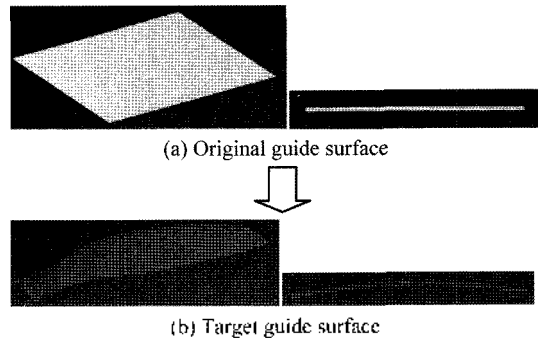


Fig. 4. Example of guide surfaces.

이제 곡면 변화의 정량적 변화를 기술하는 방식이 필요한데 이는 구체적으로 표현하면 “가이드 면 1 위의 어떤 점에 대응하는 가이드 면 2 위의 위치가 어디인가?”에 대한 대답을 찾는 것이다. 이때 중요한 사실은 가이드 면 1을 가이드 면 2로 만들려면 단순히 굽히기만 해서는 일반적으로 불가능하고 어딘가는 접히고 어딘가는 찢어지야 한다는 것이다. 원통면(cylindrical surface)이나 원추면(conical surface) 등과 같이 평면으로 펼 때 접히거나 찢어지지 않고 가능한 것도 있는데 이러한 전개가능 곡면(developable surface)<sup>1)</sup>은 특수한 경우이며, 구면(spherical surface)과 같이 어떻게든 찢거나 겹쳐지지 않고는 평면에 펼칠 수 없는 곡면이 일반적이다. 신발에 사용되는 곡면을 포함하여 거의 대부분의 자유 곡면은 전개가능 곡면이 아니다. 실제의 문제를 보면 Fig. 4의 (a)와 같은 중간면을 갖는 에어백은 (b)와 같은 중간면을 갖는 에어백으로 굽혀질 수 있는데 이는 전개가능 곡면으로의 변형이 아니다. 그럼에도 불구하고 실물에서 구현 가능한 것은 굽히는 과정에서 에어백의 일부는 늘어나고 일부는 압축되며 재질의 신축성에 의해 이 변화가 흡수되기 때문이다.

곡면 변화의 정량적 변화 기술에서 두 번째로 중요한 사실은 대응점 두 개를 임의로 취했을 때 가이드

면 1에서의 거리와 가이드 면 2에서의 거리의 오차가 최소화되어야 한다는 것이다. 즉 실물의 신축성에 의해 늘어나고 압축되는 변화가 어느 한 부분에 집중되지 않고 전체에 골고루 퍼지게 해야 실물의 변화와 가장 유사하다고 여겨지며 이러한 문제를 “곡면의 근사 평면전개”문제라 일컬을 수 있다.

이러한 곡면의 근사 평면전개 문제는 몇가지 접근 방법이 있으나<sup>12)</sup> 송성재와 김성환<sup>13)</sup>의 상위(upper) 패턴의 3차원 동시 설계를 위한 라스트(last) 곡면의 평면 전개에서 다루진 바 있으며 다음과 같이 요약된다. 기하학적 최적화 방법(geometric optimization)은 곡면 위에 생성된 삼각형들을 평면으로 옮길 때 연결 관계를 그대로 유지하게 하면 백연식으로 삼각형의 찌그러짐이 생기는데 이때 각 삼각형의 형상 오차를 정량화하여 모든 삼각형의 오차의 합이 최소가 되도록 하는 방법이다. Fig. 5는 이러한 개념을 보여주고 있다. 이때 기하학적 오차는 각 모서리(edge)의 길이 변화량과 각 삼각형의 면적의 변화량을 적실히 합하여 정할 수 있는데 길이 변화에 의한 오차와 면적변화에 의한 오차는 식 (1)과 (2)와 같이 나타낼 수 있으며 전체 오차는 이의 총량으로 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다.

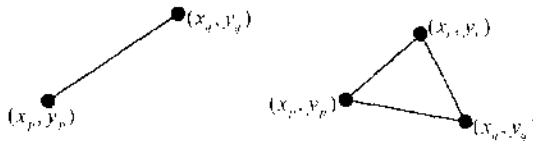


Fig. 5. Edges and triangles in mesh.

$$f_{edge} = (x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 - L_{pq}^2 \quad (1)$$

$$f_{tri} = (x_q - x_p)(y_r - y_p) + (x_r - x_p)(y_q - y_p) - 2S_{pqr} \quad (2)$$

$$Error = \left( \sum_{edge} f_{edge} + \sum_{triangle} f_{triangle} \right) \quad (3)$$

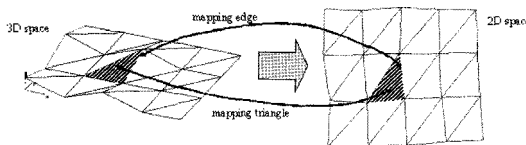


Fig. 6. Planar development.

한편 이렇게 정의된 오차의 총량을 최소화하는 형상을 결정하기 위해서는 삼각형의 꼭지점을 평면 위에서만 움직이도록 하고 식 (3)이 최소값을 갖도록 최적해를 구해야 한다. 이러한 해는 모든 노드점의 x 및 y를 변수로 삼고 길이 및 면적 변화가 zero가 되도록

하는 초과구속조건 시스템(over constrained system)을 최소자승법(Least-Square)<sup>14)</sup>으로 풀이 얻을 수 있다.

한편 송성재와 김성환<sup>13)</sup>의 연구와 이번 연구의 중요한 차이는 원본 가이드 면과 목적 가이드 면이 모두 곡면인 경우로 확장된 것이다. Fig. 7은 본 연구에서 사용한 두 곡면의 예제이다.

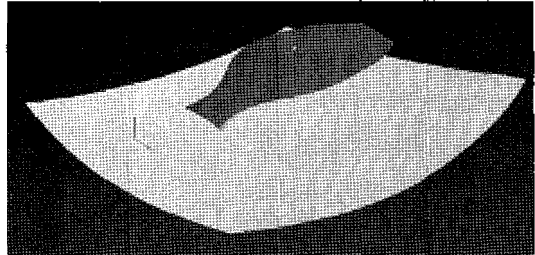


Fig. 7. Sample guide surfaces in this work.

이전의 연구에서는 노드점이 평면으로만 옮겨지기 때문에 풀어야 할 변수로 노드점의 x, y 좌표값만 고려되었으나, z 값은 항상 0이었다. 하지만 곡면의 곡면 전개를 위해서는 풀어야 할 변수가 노드점의 x, y 및 z 좌표가 되고 노드점이 실과 가이드 면 위에 놓여져야 한다는 새로운 구속조건이 추가되어야 한다. 추가되어야 할 구속조건은 식 (4)와 같은 형태가 된다.

$$F(x_p, y_p, z_i) = 0 \quad (4)$$

이때 F는 곡면의 방정식이므로 이 연구의 경우 B-스플라인 곡면의 형태이며, 최소자승법(Least-Square)을 풀기 위해서는  $x_p, y_p, z_i$ 에 대한 도함수를 계산해서 자코비안(Jacobian)을 구성해야 하는 작업을 필요로 한다.

### 2.2 곡면의 곡면 전개를 위한 구속조건의 유도

곡면의 곡면 전개를 위해서는 원본 곡면 위에서 삼각형 매쉬(mesh)를 형성한 뒤 각 모서리 길이와 삼각형 넓이의 변화량이 최소가 되도록 노드의 좌표를 결정하는 방식의 기본 아이디어는 이전의 연구<sup>11)</sup>와 같다. 그러나 본 연구에서는 매쉬의 형태에 변화를 주었다. 이전의 연구에서는 곡면의 매쉬를 형성할 때 파라미터 영역에서 등간격으로 작은 사각형을 1시 방향 대각선으로 잘라 삼각형을 만들어 사용했으나 이러한 매쉬는 다소 문제를 가지고 있는 것으로 파악되었는데 Fig. 8의 경우 1시 방향으로는 길이를 유사하게 유지하려는 강성(stiffness)을 가지고 있는 반면 11시 방향으로는 그렇지 않다는 것이다. 이는 1시 방향으로

대각선 모서리들이 배치되어 길이를 오차없이 유지하려는 조건이 크게 작용하여 길어지거나 짧아지지 않는 반면, 11시 방향으로는 면적 일정 조건만 영향을 미쳐 상대적으로 약한 구속력을 받기 때문이다. 실험에 의하면 일반적으로 11시 방향으로는 기대보다 짧아지는 경향을 보인다.

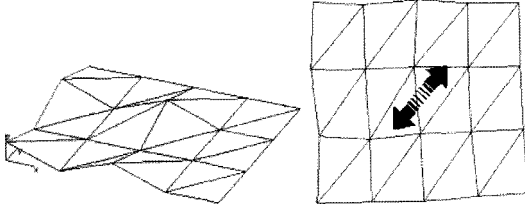


Fig. 8. Simple mesh model.

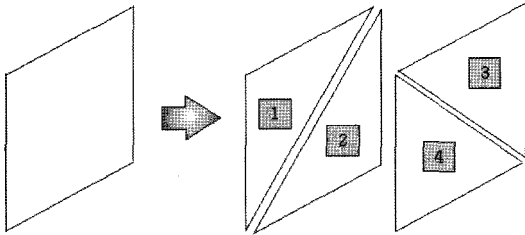


Fig. 9. Overloaded mesh model.

본 연구에서는 이러한 문제점을 해결하기 위해 중첩(overloaded) 삼각 메쉬를 사용하였다. Fig. 9는 중첩 삼각 메쉬를 보여준다. 좌측의 그림은 등간격으로 얻어진 노드집으로부터 형성된 사각형을 나타낸다. 이때 대각선 방향의 방향성을 상쇄시키기 위해 1시 방향과 11시 방향의 대각선으로 만들어지는 삼각형 4개를 모두 구속 삼각형으로 간주한다. 이러한 방법을 쓰면 고려되어야 할 삼각형의 개수가 두 배로 증가하고 모서리의 개수도 사각형의 개수만큼이 더해지며 특히 구속조건을 구성할 때 연관관계를 추적하는데 다소 복잡해지지만 풀어야 할 변수는 노드 수에 관계되므로 최적화 계산 시간에는 크게 영향을 미치지 않고 무엇보다도 강성의 방향성을 갖지 않는 결과를 보여준다.

삼각 메쉬의 토폴로지(topology)를 이와 같이 채택했을 때,  $u$  방향의 노드 수를  $nu$ ,  $v$  방향의 노드수를  $nv$ 라 하면 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

- 노드의 총 개수 :  $nu \times nv$
- 삼각형의 총 개수 :  $(nu - 1) \times (nv - 1) \times 4$

이제 오차를 기술하는 구속조건식을 기술하면 다음과 같다.

### 2.2.1 길이 변화의 최소화

삼각망에서 어떤 모서리의 양 끝점을  $R_p, R_q$ 라고 하면 그 모서리에 대한 길이 방향의 오차  $f_{iedge}$ 는 다음과 같다.

$$f_{iedge} = \{x(u_p, v_p) - x(u_q, v_q)\}^2 + \{y(u_p, v_p) - y(u_q, v_q)\}^2 + \{z(u_p, v_p) - z(u_q, v_q)\}^2 - L_{pq}^2 \quad (5)$$

이때  $L_{pq}$ 는 원래 삼각망에서의 모서리의 길이이다. 여기서 유의해야 할 것은  $x, y, z$  값들이 그 자체로 미지수가 아니라 파라미터  $u$ 와  $v$ 의 함수라는 점이다. 따라서 위 식에서 변수는 양 끝점의 대응 파라미터  $u_p, v_p, u_q, v_q$ 가 된다. 한편 길이의 제곱 형태를 취한 것은 식을 다루기 편하게 하기 위함이다.

### 2.2.2 삼각형 면적 변화의 최소화

삼각망에서 어떤 삼각형의 꼭지점을  $R_r, R_q, R_i$ 라고 하면 그 삼각형의 면적 오차  $f_{iface}$ 는 다음과 같다.

$$f_{iface} = (2S_{tar})^2 - (2S_{org})^2 = \left[ \{y(u_q, v_q) - y(u_p, v_p)\} \{z(u_r, v_r) - z(u_p, v_p)\} - \{z(u_q, v_q) - z(u_p, v_p)\} \{y(u_r, v_r) - y(u_p, v_p)\} \right]^2 + \left[ \{z(u_q, v_q) - z(u_p, v_p)\} \{x(u_r, v_r) - x(u_p, v_p)\} - \{x(u_q, v_q) - x(u_p, v_p)\} \{z(u_r, v_r) - z(u_p, v_p)\} \right]^2 + \left[ \{x(u_q, v_q) - x(u_p, v_p)\} \{y(u_r, v_r) - y(u_p, v_p)\} - \{y(u_q, v_q) - y(u_p, v_p)\} \{x(u_r, v_r) - x(u_p, v_p)\} \right]^2 - (2S_{org})^2 \quad (6)$$

한편 이들 오차는 어느 한 부분에 몰려 있으면 바람직하지 않으며 전체에 고루 퍼져야 하므로 식 (7)과 같은 방식으로 다음으로 정의되는 오차의 제곱의 합이 가장 작을 때 최적이라 생각될 수 있다.

$$Error = \left( w_e \sum_{iedge} f_{iedge} + w_f \sum_{iface} f_{iface} \right)$$

이때  $w_e$ 와  $w_f$ 는 각각 모서리와 삼각형면적 조건의 가중치에 해당하며 모두 1을 취해도 좋은 수렴 결과를 얻을 수 있다.

### 2.2.3 고정점 구속조건

길이 구속조건과 면적 구속조건 만으로는 결과 곡면 위의 대응 삼각망의 위치와 방향이 정해지지 않는다. 따라서 고정점 구속조건과 방향고정 구속조건이

필요하다. 우선 고정점 구속조건에 대해 설명하겠는데 이는 일반화하면 선택된 삼각형의 내부 임의의 점이 정해진 좌표를 가져야 한다는 것이다. 이는 “조건점 P의 삼각좌표(barycentric coordinate)<sup>[12]</sup>가 (α, β, γ)라 하고 항상 이것이 항상 고정점 R에 위치해야 한다”라고 이해될 수 있으며 다음과 같은 식으로 표현된다.

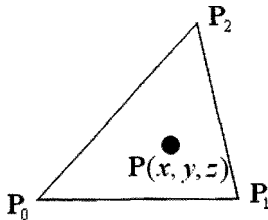


Fig. 10. Triangle in which the fixed point lies.

$P = \alpha P(u_0, v_0) + \beta P(u_1, v_1) + \gamma P(u_2, v_2)$ <sup>[12]</sup> 이므로 여기서 3개의 식이 발생하며 다음과 같다. 이는 오차 없이 만족되어야 하는 식이므로 매우 큰 가중치를 곱하여 식 (7)에 더해 넣어야 한다.

$$\begin{cases} f_x = \alpha x(u_0, v_0) + \beta x(u_1, v_1) + \gamma x(u_2, v_2) - Rx \\ f_y = \alpha y(u_0, v_0) + \beta y(u_1, v_1) + \gamma y(u_2, v_2) - Ry \\ f_z = \alpha z(u_0, v_0) + \beta z(u_1, v_1) + \gamma z(u_2, v_2) - Rz \end{cases} \quad (8)$$

2.2.4 회전방향 구속조건

기준점이 고정되어 있고 어떤 노드의 방향이 주어진 벡터 방향과 일치하도록 하는 조건이다. 방향 구속조건을 위해서 사용자는 최대한 평평한 부분에서 한 기준점을 선택하고, 그것을 기준고정점으로 삼는다. 곡면이 xy 평면에 대해 평면하도록 위치되었다면 방향으로 x 성분과 y 성분의 2차원만 생각할 수 있다.

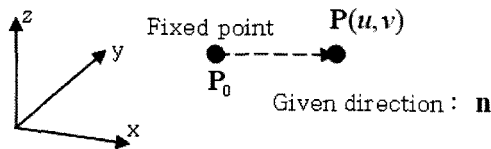


Fig. 11. Point of given direction.

고정점에서 방향벡터 방향으로 향하는 직선 위에 조건부여점이 놓여야 하므로 다음이 만족해야 한다.

$$(x_0 + n_x t) \mathbf{i} + (y_0 + n_y t) \mathbf{j} = x(u, v) \mathbf{i} + y(u, v) \mathbf{j} \quad (9)$$

이를 t에 관해 풀고 다음과 같은 조건식을 얻는다.

$$f = n_x \cdot \{x(u, v) - x_0\} - n_y \cdot \{y(u, v) - y_0\} \quad (10)$$

이 식도 식 (8)의 경우와 같이 오차없이 만족되어야 하므로 매우 큰 가중치를 곱하여 식 (7)에 더해 넣는다.

한편 이들 4가지 구속조건을 이용하여 최소자승법(Least-Square)에 의한 최적해를 얻으려면 자코비안(Jacobian) 행렬을 만들어야 하는데 이를 위한 각 편미분은 손으로 계산하여 얻을 수 있다.

2.3 위치고정조건과 방향고정조건을 사용자 입력

위치 고정 구속조건은 모델 내의 점으로 입력받는다. 입력점의 x, y 좌표는 원본 곡면의 그 지점이 대상 곡면의 그 지점으로 일치되어야 한다는 것을 의미한다. 한편 방향 구속조건은 모델 내에 원본 곡면과 대상 곡면이 놓여져 있는 방향으로 결정된다. 알고리즘은 고정점이 포함된 삼각형 매쉬의 꼭지점이 고정점에 대해 xy 평면에서 가지는 방향이 대상곡면에서도 동일하도록 고정한다.

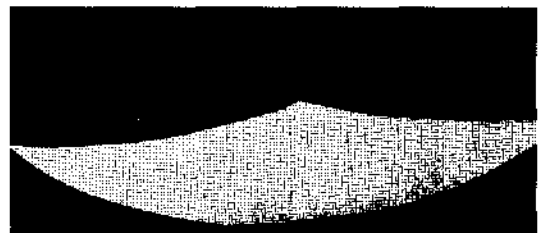


Fig. 12. User input of fixed point and direction.

2.4 최소자승법에 의한 구속조건을 풀이

곡면 전개를 수행하기 위해 먼저 원본 곡면 위의 삼각망을 얻어내는 것이 필요하다. 본 연구에서는 파라미터 도메인에서 등파라미터 간격으로 노드(node) 점을 생성한다. 아래 그림은 원본 곡면에 생성된 매쉬

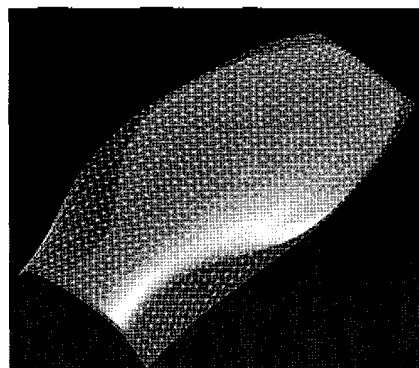


Fig. 13. Mesh on original guide surface.

모델을 보여주는데 노드 개수는 곡면의 길이를 고려하여 42개로 22개로 정하였다.

이 경우 생성된 구속조건은 다음과 같다.

- 풀어야 할 변수 : 1848개(노드수 924개의 두배)
- 모서리 길이 구속조건 : 3506개
- 삼각형 면적 구속조건 : 3444개
- 고정점 구속조건 : 2개(한점이지만 파라미터 2개)
- 방향 구속조건 : 3개

위에서 보는 바와 같이 풀어야 할 변수의 개수는 1848개이고 발생한 구속조건은 6955개이므로 개수로나 자코비안의 랭크(rank)로나 해가 존재하지 않는 과다 제한 조건(over-constrained) 시스템이다. 이의 최적해를 얻기 위한 최소 자승법은 다음과 같이 진행된다. 우선 위의 시스템에 대해 뉴턴-랩슨(Newton-Raphson) 반복법으로 풀기 위해 다음 식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial q_1} & \frac{\partial f_m}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta q_2 \\ \vdots \\ \Delta q_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f_1(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ -f_2(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ \vdots \\ -f_m(q_1, q_2, \dots, q_n) \end{Bmatrix} \quad (11)$$

위의 식에서 자코비안 행렬은 열의 개수가 행의 개수보다 많아 바로 풀 수 없다. 따라서 이를 풀기 위해 다음과 같은 과정을 거친다. 위 식은 다음과 같이 다시 쓰여질 수 있다.

$$A_i \cdot \Delta q_i = -F(q_i) \quad (12)$$

자코비안의 전치행렬을 양변에 곱하면 다음과 같다.

$$A_i^T A_i \cdot \Delta q_i = A_i^T \cdot F(q_i) \quad (13)$$

이제 위 식은 1848×1848의 크기를 갖는 선형 연립방정식이며 이를 풀어 다음과 같이 변수를 갱신한다.

$$q_{i+1} = q_i + \Delta q_i \quad (14)$$

갱신된 변수로 식 (12)로 되돌아가서 반복을 계속하다가  $\Delta q_i$ 의 모든 항이 일정 공차 이하가 되면 수렴한 것으로 간주한다. 한편 식 (13)에서  $A_i^T A_i$ 는 많은 0 항을 포함하고 있으므로 계산 시간을 줄이기 위해 희박(sparse) 행렬 기법을 사용하였다.

2.4 초기 형상의 결정

뉴턴-랩슨의 반복법을 사용하여 최적해를 구하기 위해서는 초기값이 필요하다. 즉 대상 메쉬의 초기 형상이 정해져야 하는데 좋은 초기 형상은 극부 최소값이 존재하거나 수렴성이 좋지 않은 경우에는 해를 얻는데 매우 중요하거나 수렴속도에 크게 영향을 미칠 수 있다. 본 연구에서는 초기 형상을 결정하기 위해 원본 곡면의 메쉬를 z방향으로 대상곡면에 투영하여 얻는다. 이는 곡면의 곡률이 크지 않은 경우 충분히 좋은 초기조건으로 사용될 수 있다. Fig. 14는 초기조건을 보여준다.

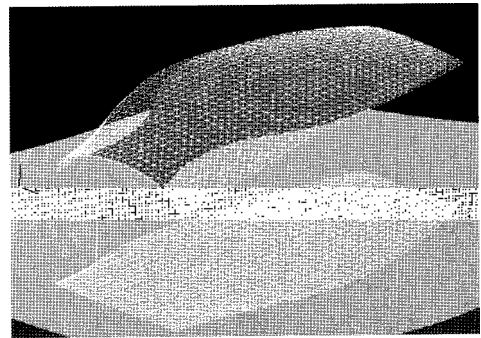


Fig. 14. Initial mesh shape for iteration.

2.5 반복계산

뉴턴-랩슨의 반복법은 반복이 진행됨에 따라 점점 적은 오차를 가지는 해로 수렴해가게 된다. 이 문제의 경우 변수가 u 혹은 v 파라미터이고 반복 오차(tolerance)를 10<sup>-3</sup>로 했을 때 곡면 형상에 따라 5회~7회의 반복 계산 후 수렴하였다. Fig. 15는 반복 계산에 따라 변해가는 메쉬의 형상을 위에서 바라본 모양이다.

이와 같은 반복 과정은 P4-2.8G 컴퓨터에서 반복회수에 따라 17초~25초 정도 소요되며 이는 평면으로

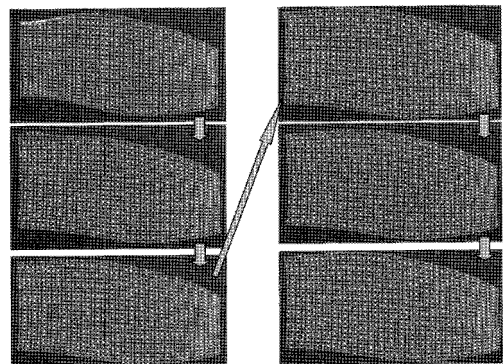


Fig. 15. Mesh shapes on iteration.

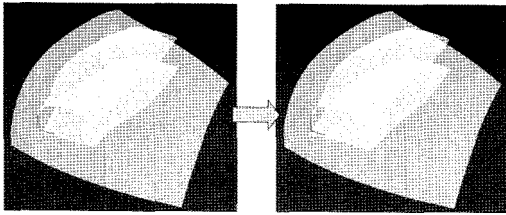


Fig. 16. Initial and result mesh shapes.

전개하는 시간과 같은 수준이다. Fig. 16은 수렴된 후 원본 메쉬와 겹쳐 위에서 내려다 본 모양이다.

### 3. 가이드 면 인근 형상의 추종변화

두개의 가이드 면 사이에 대응 삼가방을 구하게 되면 이를 기준으로 인근 형상의 추종변화를 계산하여야 변형이 구현될 수 있다. Fig. 17은 이 과정을 도시화한 것이다. 이를 위해서 곡면 변화를 정량적으로 기술하는 방법과 이에 의해 인근 형상을 변화시키는 기법이 개발되었다.

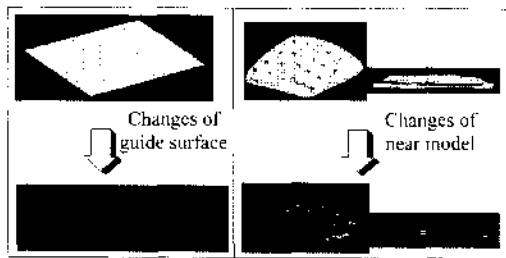


Fig. 17. Shape changes of model near guide surface.

#### 3.1 곡면 변형의 정량적 기술

가이드 면과 목적면 간의 대응관계가 이루어지면 가이드 면의 노드에 대해 목적면의 대응 노드를 찾을 수 있게 된다. Fig. 18은 이런 관계를 보여주며 이것으로부터 곡면 변화의 정량적 기술을 유도할 수 있다. 그림에서 위쪽은 원본 곡면 위의 메쉬이고 아래쪽은 목적 곡면 위에 얻어진 전개 메쉬이며 노드간의 대응 관계가 회색선으로 표시되어 있다. 여기서 위쪽 노드점의 변경 위치는 위에서 아래쪽의 벡터(회색선)만큼 이동하여 새로운 위치가 정해지게 된다. 이로부터 가이드 면 인근의 어떤 점의 변형 대응 위치를 얻기 위해서는 회색 변형선중 인접한 것의 변화율 가장 잘 반영하는 방향과 크기로 이동하여야 함을 알 수 있다.

한편 그림에서 사각형은 변형 대상 볼체를 포함하는 공간을 표시하는 것으로 변형이 정의되어야 하는 영역에 해당한다.

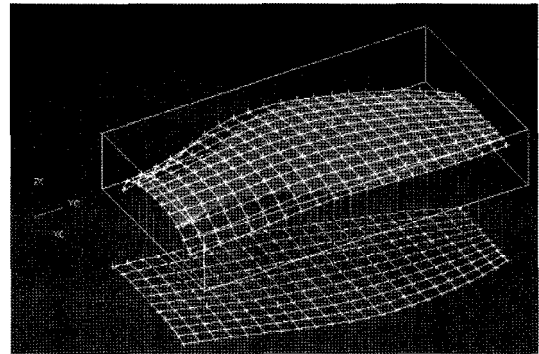


Fig. 18. Node mapping from original to target surface.

#### 3.2 인근 형상의 추종 변화

몇 개의 곡면 간의 대응관계가 정해지면 인근 형상의 추종 변화를 계산할 수 있어야 한다. 이 문제는 컴퓨터 그래픽스 분야의 자유형상 변형<sup>18,9)</sup>(FFD: Free Form Deformation)과 매우 유사하게 보이지만 큰 차이가 있어 FFD 적용으로는 구현하기 어렵다. 추종 변화의 구현을 위해 보다 바람직한 기법으로 이미지 워핑<sup>10)</sup>(warping)이 있다. 워핑은 컴퓨터 이미지에서 특징점(feature point)을 정하고 이들이 어떻게 옮겨지는가가 성해지면 이에 따라 주변 형상이 추종하여 변경됨을 계산하여 변형된 이미지를 만들어 내는 방법이다. 일반적으로 변형을 정의하는 특징점들은 매우 불균일한 분포를 보이는 경향이 있다.

이때 이미지 처리는 2차원 문제이며, 우리는 공간 곡면을 다루므로 3차원 문제가 된다. 3차원 문제는 2차원 문제와 충분한 상사성을 가지며 축이 하나 늘어나는 문제이다. 이 문제에 대해서는 Lee<sup>10)</sup>의 2차원 연구를 확장하여 김성환과 송성재<sup>11)</sup>가 3차원으로 적용한 바 있고, 여기서는 2차원 문제에 대해 간략히 설명한다. 2차원 워핑을 위한 벡터장은 다른 관점에서 생각될 수 있다. 변형시키고자 하는 공간(2차원 문제 이므로 평면)에서 각 점에 대한 변형량을 x 방향과 y 방향으로 나누고 이를 높이로 삼으면 각각에 대해 곡면이 생성된다. 이때 곡면은 각 점에 부여된 스칼라 값이므로 각각은 스칼라장(scalar field)으로 볼 수 있다. 그리고 이 곡면의 조합이 벡터장을 이루게 된다.

일단 이 곡면들을 가지게 되면 공간 내의 모든 점에 대해 각 방향의 변형량을 알 수 있게 되므로 변형(deformation)을 구현할 수 있게 되고 문제는 구속 조건점들로부터 어떻게 이 곡면을 얻을 수 있을 것인가로 좁혀진다.

Fig. 19는 (a)에 주어진 데이터를 만족시키는 곡면의 생성을 두가지 관점에서 보여준다. (c)는 곡면을 추

분한 해상도로 근사시킨 모습이며 (b)는 해상도를 낮추어 근사시킨 모습이다. 일반적으로 부드러운 변형 곡면이나 모델을 얻기 위해서는 스킬라장이 (b)처럼 부드러운 형상을 가져야 하지만 부정확하다. 반면 (c)와 같은 형상을 갖게 되면 조건점 인근만 급격한 형상 변화를 보이고 멀어지면서 변형이 곧바로 사라지게 되어 부분적으로 꼬집힌 형상이 생기게 된다. 이런 관점에서 (b)와 (c)는 모두 바람직한 결과로 볼 수 없다.

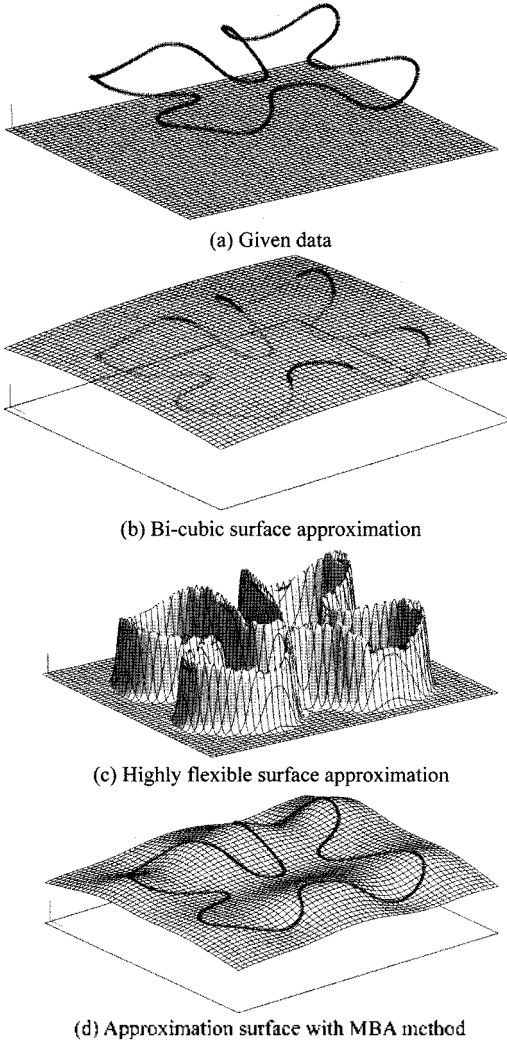


Fig. 19. Smoothness and accuracy of surface fitting.

이와 같이 스킬라 곡면의 원활함과 정확도는 둘 다 요구조건인 반면 구현하기에는 상충되는 면이 있다. 이때 원활하면서도 정확한 곡면을 얻는 바람직한 방법으로는 MBA<sup>[10]</sup>(MultiLevel B-Spline Approximation) 기법이 있다. Fig. 19의 (d)는 MBA 방법을 통

해 얻어진 정확하면서도 부드러운 곡면이다. MBA 방법은 대상 공간을 격자로 나누고 격자점(lattice)을 B-스플라인의 조정점(control point)로 삼아 곡면을 생성해 내는 방법이다. Fig. 20은 공간을 격자로 나누는 모습을 나타낸다.

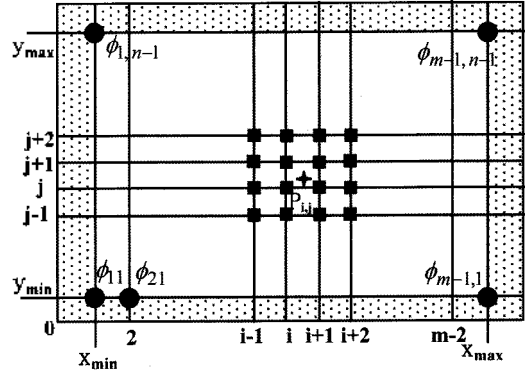


Fig. 20. Control lattice.

이때 곡면의 높이는 식 (15)로 나타내며 그때 베이스 함수는 식 (16)으로 정해져 있다.

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 B_k(s)B_l(t)\phi_{(i-1+k)(j-1+l)} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} B_0(t) &= (1-t)^3/6 \\ B_1(t) &= (3t^3-6t^2+4)/6 \\ B_2(t) &= (-3t^3+3t^2+3t+1)/6 \\ B_3(t) &= t^3/6 \end{aligned} \quad (16)$$

따라서 원하는 곡면이 얻어지려면 곡면이 주어진 조건점을 지나도록  $\phi_{(i+k)(j+l)}$ 의 해상도와 값을 정해야 하는 작업이 필요하다. 이를 위해 조건점이 주어지면 관계되는 조정점이 관계되는 연립 방정식을 구성하여 풀어내는 과정이 필요하며 충분히 만족되도록 그리드의 해상도를 레벨을 올려가면서 계산하는 과정이 수행된다. 그러기 위해서는 조건점으로부터 관계되는 조정점이 선택되고 식 (17)과 같이 연관 조건점으로부터 조정점의 값을 결정되어야 한다<sup>[10]</sup>.

$$\phi_{ij} = \frac{\sum_c w_c^2 \phi_c}{\sum_c w_c^2}, \quad \phi_{kl} = \frac{w_{kl} z_c}{\sum_{p=0}^3 \sum_{q=0}^3 w_{pq}^2} \quad (17)$$

한편 레벨을 높여가며 근사(fitting) 과정이 반복되면서 격자의 해상도가 증가하는데 해상도가 증가하면



조정점의 값이 분할(refine)되어야 하고 이러한 반복과정은 최대 해상도에 도달하거나 원하는 공차 내에서 조건점들이 곡면 위에 놓여지면 종료된다.

이제 3차원 문제에서는 격자가 2차원이 아닌 3차원으로 형성되어야 한다. 따라서 식 (15)가 3차원으로 변경되어 다음과 같이 나타난다. 2밖에 조정점과 조건점의 연결, 분할(refinement), 해상도의 증가 등을 모두 2차원 두 방향에서 3차원 세 방향으로 조정해 주어야 한다.<sup>[11]</sup>

$$f(x,y,z) = \sum_{a=0}^3 \sum_{b=0}^3 \sum_{c=0}^3 B_a(s)B_b(t)B_c(u)\phi_{(i-a)(j-b)(k-c)} \quad (18)$$

여기서  $\phi_{(i-a)(j-b)(k-c)}$ 는  $i, j, k$  방향으로의 조정점이고  $B_i(u)$  등은 B-스플라인의 베이스 함수이다.

이상과 같이 부드러운 3차원 벡터장을 얻으면 곡면을 변형할 수 있는데 이의 과정은 다음 순서도와 같이 요약될 수 있다.

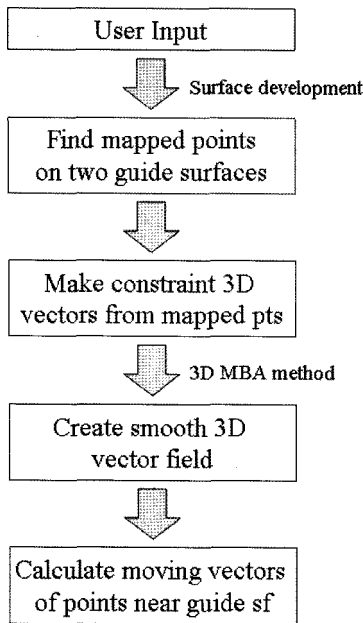


Fig. 21. Process of surface deformation.

## 4. 적용예

### 4.1 3차원 곡면에 대한 실험

앞서 설명한 3차원 공간에 대한 알고리즘이 프로그래밍되었고 테스트 되었다. 대상물인 에어백은 174개의 비교적 복잡한 곡면으로 구성되어 있으며 다수의 드

림 곡면을 포함하고 있다. Fig. 18에 보인 것과 같은 변형 구속조건으로부터 육면체 공간내에 3차원 벡터장(세 개의 스칼라장)을 형성하면 공간 내의 모든 점에 대해 대응되는 벡터값이 존재하게 되며, 이 벡터가 곧 변형되어질 값이 된다. 벡터장을 MBA 방법으로 계산하는 시간은 P4-2.8G 컴퓨터에서 약 10초가량 소요된다. Fig. 22는 계산된 벡터장에서 육면체 영역의 윗면에서의 벡터값을 나타낸 것으로 곡면의 변화와 유사한 경향을 가짐을 볼 수 있다.

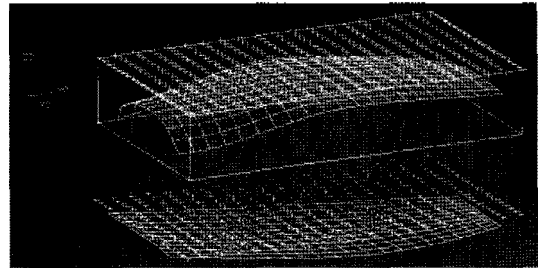


Fig. 22. Vectors of upper points.

이제 관심 영역내의 모든 점에서 이동 벡터값을 알 수 있게 되었으므로 이에 따른 곡면의 변형이 필요한데 곡면을 변형하기 위해서는 위본 곡면 위에서 점을 추출한 후 이를 이동시켜 다시 보간 곡면을 생성하는 방법을 사용한다. Fig. 23은 이와 같은 과정을 거쳐 얻은 결과를 보여준다.

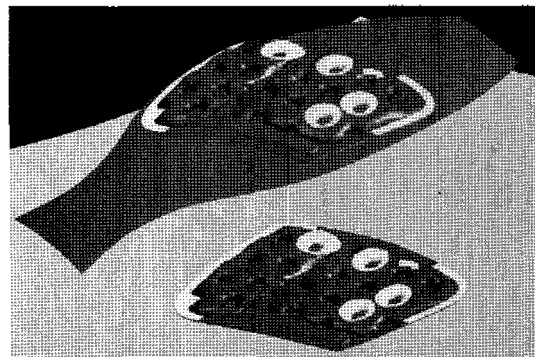


Fig. 23. Result of deformation of air bag model.

### 4.2 에어백(Air bag)

이제 적용예를 추가로 제시하면 다음과 같다. 에어백은 Fig. 23에 이미 표시하였다. 곡면 173개로 구성 되어 있으며 변형 소요시간은 약 200초이다. 이중 3차원 벡터장의 계산에는 10초 미만이 소요되고 대부분의 시간은 변형 곡면의 보간 생성에 소요된다.

### 4.3 신발 외창(Out sole)

아래 그림은 신발 외창의 앞꿈치 부분이며 곡면 1517개로 구성되어 있고 변형 생성에 약 590초가 소요되었다. 이 경우 원본 가이드 면은 평면이고 목적 가이드 면은 곡면이다.

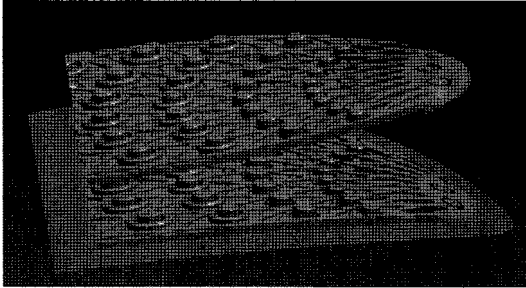


Fig. 24. Result of deformation of out sole.

### 4.4 구부러진 신발 외창

다음 적용예는 앞부분이 구부러진 외창이다. 이 경우는 두 개의 가이드 면이 모두 곡면일 뿐만 아니라 상당히 급하게 굽어져 있다. 잘 수행되었으며 곡면 1414개의 모델에 대해 약 1300초가 소요되었다.

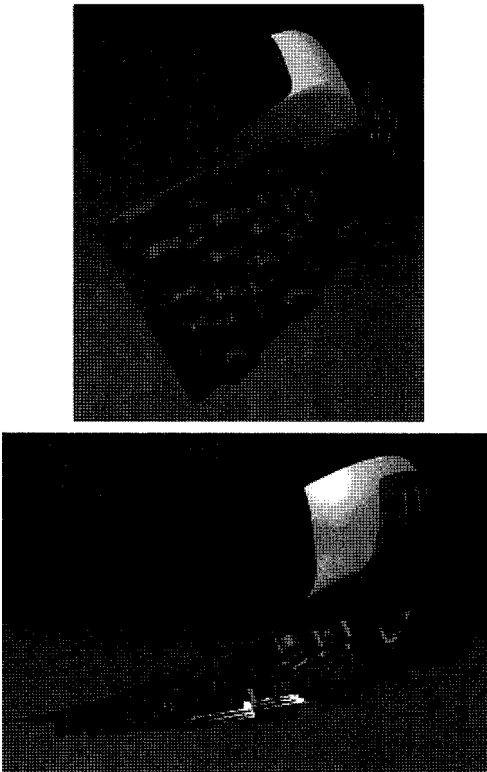


Fig. 25. Result of deformation of bended out sole.

## 5. 결 론

본 연구는 원하는 곡면 모델이 있을 때 이를 원하는 경향을 추종하도록 변형된 모델을 생성하는 방법을 개발하였다. 변형 의도를 나타내기 위해 사용자는 원본 가이드 면과 목적 가이드 면을 제공하여야 하며 아울러 고정점과 고정방향도 형상 요소로 입력한다. 이 방법은 크게 두가지 단계로 이루어져 있는데 첫 번째는 원본 가이드 면을 목적 가이드 면에 곡면 전개하여 각 곡면 위의 대응점을 먼저 찾는다. 이를 위하여 최소사승법을 이용하여 형상 오차를 최소화 하는 최적해를 찾는 과정이 개발되었다. 두 번째는 노드점 간의 대응 관계를 구속조건으로 이를 만족하면서 공간에 부드럽게 퍼져있는 3차원 벡터장을 형성하였다. 3차원 벡터장의 형성을 위해서는 저자의 이전 연구인 3차원으로 확장된 MBA방법이 적용되었다.

이 기법은 상용 CAD 시스템인 Unigraphics에 UG/Open 기반으로 구현되어 신발 설계자들에게 제공되었다. 현장의 설계자들은 이 기능을 이용하여 변형 곡면의 성공적으로 생성하였으며 4점의 모델들이 그 예이다. 이들 통해 복잡한 곡면을 다뤄야 하는 설계 작업에 효과적으로 적용될 수 있음을 보여주었다.

## 참고문헌

1. Carmo, M. P. D., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1976.
2. Azariadis, P., Nearchou, A. and Aspragathos, N., "An Evolutionary Algorithm for Generating Planar Developments of Arbitrarily Curved Surfaces", *Computers in Industry*, Vol. 47, No. 3, pp. 357-368, 2002.
3. Wang, C., Smith, S. and Yuen, M., "Surface Flattening based on Energy Model", *Computer Aided Design*, Vol. 34, pp. 823-833, 2002.
4. 조성범, "구두 패턴 설계를 위한 자유곡면의 펼침알고리즘에 대한 연구", 석사학위논문, 서울대학교 대학원 기계항공공학, 2002.
5. 송성재, 김성환, "신발패턴의 3차원 설계를 위한 곡면의 평면전개에 관한 연구". 한국 CAD/CAM학회 논문집, 제9권, 제3호, pp. 266-275, 2004.
6. Faires, J. D. and Burden, R. L., *Numerical Methods*, International Thomson Publishing, 1996.
7. Kundert, K. S. and Sangiovanni-Vincentelli, *A Sparse Linear Equation Solver*, Dept. of Electrical Engineering and Computer Sciences, U.C. Berkeley, 1988.
8. Sederberg, T. W. and Parry, R., "Free-form Deformations of Solid Geometric Models", *Computer Graphics*, Vol. 20, No. 4, pp. 151-160, 1986.

9. Coquillart, S. and Jancene, P., "Animated Free-form Deformation: An Interactive Animation Technique", *Computer Graphics*, Vol. 25, No. 4, pp. 23-26, 1991.
10. Lee, S., Wolberg, G. and Shin, S. Y., "Scattered Data Interpolation with Multilevel B-Splines", *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, Vol. 3, No. 3, pp. 228-244, 1997.
11. 김성환, 송상재, "불규칙 이산 구속조건을 만족시키는 곡면 모델의 변형 방법", 한국 CAD/CAM학회 논문집, 제12권, 제1호, pp. 58-73, 2007.
12. Farin, G. and Hansford, D., *The Essentials of CAGD*, AK Peters, Ltd., 2000.



### 김 성 환

1986년 2월 서울대학교 기계설계학과  
학사

1988년 2월 서울대학교 기계설계학과  
석사

1994년 2월 서울대학교 기계설계학과  
박사

1997년 3월-현재 서울산업대학교 기계설  
계자동화공학부 교수

관심분야: Geometric modeling, Surface Modeling, Virtual  
design & manufacturing