

곡선의 형태학적 성장과 변환의 제어 방법

이주행*, 박형준**

Control of Morphological Development and Transformation of Curves

Joo-Haeng Lee* and Hyungjun Park**

ABSTRACT

We present novel methods to generate a sequence of shapes that represents the pattern of morphological development or transformation of Bezier curves. The presented methods utilize the intrinsic geometric structures of a Bezier curve that are derived from rib and fan decomposition (RFD). Morphological development based on RFD shows a characteristic pattern of structural growth of a Bezier curve, which is the direct consequence of development path defined by fans. Morphological transformation based RFD utilizes development patterns of source and target curves to mimic the theory of evolutionary developmental biology: although the source and target curves are quite different in shapes, we can easily find similarities in their younger shapes, which makes it easier to set up feature correspondences for blending them. We also show that further controls on base transformation for intensity of feature blending, and extrapolation can compensate the immaturity of blended curves. We demonstrate the experimental results where transformation patterns are smoother and have unique geometric style that cannot be generated using conventional methods based on multi-linear blending.

Key words : Bezier Curve, Rib, Fan, Morphology, Development, Transformation, Metamorphosis

1. 서 론

형태학은 동식물의 구조를 탐구하는 생물학의 한 분야로 출발했다^{1,7,8,19,26,27}. 특히, 형태학적 발달과 변환은 개체의 외부의 모양 및 내부 구조의 변화의 분체를 다룬다. 생물학적 개체는 생명주기 동안 개체 전반과 각 부분이 복잡한 변화를 겪게 된다. 발달 생물학에서 이러한 과정을 개체 발생(ontogeny) 또는 발달이라고 한다. 또 다른 형태의 모양의 변화는 진화라는 좀 더 긴 시간을 거쳐 일어난다. 즉, 같은 조상에서 출발하지만 나중에는 매우 다른 형태적 특징을 갖는 개체들이 진화하게 된다. 특히, 우리는 개체간 형태의 변화를 유발한 발달 과정의 차이에 주목하게 되었고, 이를 통해 기하학 문제의 해결에 영감을 얻게 되었다.

기하학적 개체의 형태학은 컴퓨터 그래픽스와 CAGD 분야에서도 중요하게 다뤄지고 있다. 본 논문

에서는 CAGD 분야에서 가장 기본적인 개체인 베지어 곡선의 형태 변환 문제를 다루게 된다. 특히, 본 논문의 기여는 베지어 곡선의 고유한 내부 구조의 변화를 이용하여 형태의 발달과 변환을 다루는데 있다. 우리는 생물학적 비유를 통해 이 현상을 설명하고 이에서 영감을 얻은 계산 및 제어 방법을 제시한다. 따라서, 본 논문에서는 베지어 곡선은 생명 주기에 따라 성장하는 기하학적 개체로 볼 수 있다.

형태 발달과 변환의 차이는 우선 관련된 곡선의 개수에 있다. 발달에서는 한 곡선의 시간상 변화를 다룬다. 어떤 곡선이든지 그 초기의 형태는 두 끝점을 연결하는 직선이며, 시간에 따라 특징이 발달하게 된다. 형태 변환은 컴퓨터 그래픽스의 모핑에서와 같이 두 개 이상의 곡선 사이의 변환을 다룬다. 특히, 두 곡선 사이의 발달의 차이를 비교하고 미지의 발달 과정을 유추하여 변환 과정의 중간 곡선을 생성하게 된다. 이러한 접근은 곡선이 특별한 내부 구조를 가질 때 가능한데, 본 논문에서는 최근 연구에서 베지어 곡선이 림과 팬으로 분해(Rib and Fan Decomposition, RFD)되는 성질을 이용하여 곡선의 성장을 다루게 된다¹⁵.

*종신회원, 한국전자통신연구원

**교신저자, 종신회원, 조선대학교 산업공학과

- 논문투고일: 2007. 04. 11

- 심사완료일: 2007. 07. 30

곡선의 변환에 대한 기존의 접근은 보통 세 단계를 거쳐게 된다: (1) 특징의 인식, (2) 각 곡선의 특징 사이의 대응, (3) 특징 사이의 보간. 본 논문에서 제안하는 방법은 두 번째와 세 번째 단계의 계산에 도움을 준다. RFD를 이용한 형태 변환은 두 곡선의 발달 패턴을 이용하는데, 이는 진화 발달 생물학에서 서로 다른 모양의 개체라고 하더라도 각 개체의 발달 초기형태에서는 유사점을 쉽게 발견할 수 있다는 사실을 이용하며, 이를 통해 중간 발달 단계에서 특징 대응을 쉽게 계산하게 된다. 특징 혼합은 대응된 중간 발달 단계의 베지어 곡선들과 주어진 곡선을 비선형 혼합하여 얻게 된다. 또한 추가적인 제어틀 통해 곡선의 미발달 현상을 해결한다.

논문은 다음과 같은 구성을 갖는다. 2절에서 립과 팬의 성질에 관련된 이전 연구 결과를 요약한다. 3절에는 곡선의 팬을 이용하여 발달 패턴을 생성하는 방법을 설명하고, 4절에서는 곡선의 발달과 추가적인 제어 방법을 통해 곡선 사이의 변환을 생성하는 방법을 설명하고, 5절에서는 본 논문을 맺는다.

2. 이전 연구

2.1 곡선의 형태학

형태학은 원래 생물학의 한 분야이다^[19]. 하지만 이를 수학과 기하학 관점에서 해석하고 이해하려는 시도가 있어 왔다^[26,27]. 최근 컴퓨터 그래픽스와 CAGD 분야에서도 기하학적 개체에 대한 형태학적 분석과 응용이 활발하다. 컴퓨터 그래픽스에서는 모핑이 대표적이다^[9]. 많은 영화에서 모핑 기법이 특수효과에 활용되고 있다. 2차원 캐릭터 애니메이션에서 중간 단계를 자동으로 생성하기 위한 시도들도 있다^[23,24]. CAGD 분야에서는 곡면 skinning이나 일반 원주 곡선의 곡선 생성을 위해서는 주어진 곡선들의 형태학적 분석과 인접 곡선 사이의 변환을 통해 부드러운 곡선을 만들게 된다^[11].

컴퓨터 그래픽스와 CAD 소프트웨어에서 형태를 디자인하는 경우 그 과정이 기록된다. 이는 목적으로 기하 개체의 내부 구조에 대한 정보가 된다. 디지털 타이핑을 통해 얻게 되는 형태에 대해서는 구조 정보를 얻기는 어렵다. 따라서 이런 경우에는 특징을 표현하고 대응을 결정할 기하학적 구조의 정의가 필요하다.

도형에 대한 형태학적 구조를 유추하고 이를 형태 변환에 이용한 이전 연구를 많이 찾아 볼 수 있다. 딘 코프스키 덧셈은 점선 특징의 대응에 근거한 연산이

다. 따라서 이를 이용한 모핑 방법은 직관적이지만 특징의 단위가 짐으로 국한되어 있기 때문에 그 응용이 매우 제한적이다^[12,20]. 이에 비해 형태의 거시적인 특징을 추출하여 형태 변환에 이용한 시도들이 있다. 대표적 것이 MAT이며^[2-4,23,29], 다각형의 고유한 모양 인수^[25], 푸리에 변환^[14], 웨이브릿^[5], 평면 삼각망^[21], 자기교차 없는 인수화^[21], 방향 지도^[13] 등의 시도들이 있다. 좀 더 나아가 모양의 진화 순서에서도 묵시적인 구조 정보를 얻을 수 있다^[11]. 형태가 속한 분야에 대한 도메인 지식과^[10] 형태의 불리해 해석도^[5,22]도 특징 대응에 큰 도움이 된다.

물리적인 힘도 형태학적 패턴 형성에 영향을 준다. Weng은 상상과 형태를 설명할 수 있는 2차 비분 방정식을 제시하였다^[28]. Gielis의 super formula는 곡선의 모델링과 성장을 설명하는데 유용하다^[8].

2.2 곡선의 립과 팬

본 절에서는 베지어 곡선의 립과 팬의 성질들을 요약하여 설명한다^[15,16].

일반적으로 n 차의 베지어 곡선은 제어점 \mathbf{b} 와 변수 타인 다항식 $B_i^n(s)$ 를 사용하여 $\mathbf{b}(s) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(s)$ 로 정의된다. 하지만, 립과 팬 분해를 하게 되는 경우 립과 팬의 차수를 명확히 하기 위해 각 차수를 함께 표기 한다. 예를 들어, 주어진 곡선은 자체가 n 차의 립이며 $\mathbf{r}^n(s) \equiv \mathbf{b}(s)$ 로 표기한다. 베지어 곡선 $\mathbf{r}^n(s)$ 에 립과 팬 분해(RFD)를 적용하면, $(n-1)$ 차의 베지어 곡선 $\mathbf{r}^{n-1}(s)$ 과 $(n-2)$ 차의 벡터 필드 $\mathbf{f}^{n-2}(s)$ 를 얻게 된다:

$$\mathbf{r}^n(s) = \mathbf{r}^{n-1}(s) + 2s(1-s)\mathbf{f}^{n-2}(s) \quad (1)$$

위 식에서 $\mathbf{r}^{n-1}(s)$ 과 $\mathbf{f}^{n-2}(s)$ 각각 립과 팬이라고 한다. 립 $\mathbf{r}^k(s) = \sum_{i=0}^k \mathbf{r}_i^k B_i^k(s)$ 의 제어점 \mathbf{r}_i^k ($1 \leq k \leq n-1$ 및 $0 \leq i \leq k$)은 상위 립 $\mathbf{r}^{k+1}(s)$ 의 제어점으로도 표현된다:

$$\mathbf{r}_i^k = \frac{(k-i)}{k} \mathbf{r}_i^{k+1} + \frac{i}{k} \mathbf{r}_{i+1}^{k+1} \quad (2)$$

팬 $\mathbf{f}^k(s) = \sum_{i=0}^k \mathbf{f}_i^k B_i^k(s)$ ($0 \leq k \leq n-2$ 및 $0 \leq i \leq k$)의 제어 벡터 \mathbf{f}_i^k 는 상위 립 $\mathbf{r}^{k+2}(s)$ 의 제어점으로도 표현된다:

$$\mathbf{f}_i^k = \mathbf{r}_{i+1}^{k+2} - \frac{1}{2}(\mathbf{r}_i^{k+2} + \mathbf{r}_{i+2}^{k+2}) \quad (3)$$

식 (1)의 RFD를 주어진 곡선 및 중간 립에 적용하

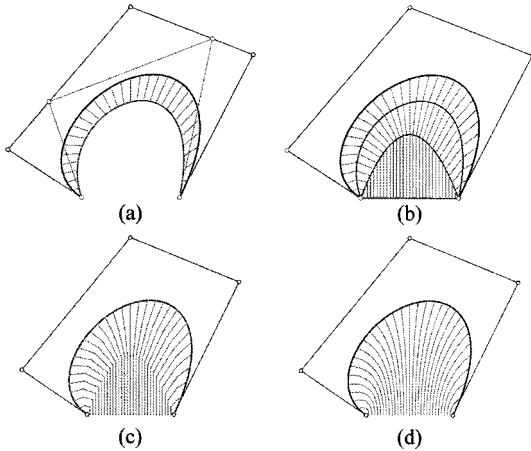


Fig. 1. 4차 곡선에 대한 RFD의 예: (a) 식을 이용하여 주어진 4차 곡선이 곡선은 3차 립(굵은 회색)과 팬 벡터(얇은 회색)로 분해된다; (b) 식을 반복적으로 적용하여 립과 팬을 순차적으로 생성한다; (c) 이때 생성된 팬직선들과 (d) 팬곡선들.

면 최종적으로 립 $r^1(s)$ 와 일련의 팬 $f^i(s)$ ($0 \leq i \leq n-2$)들로 분해된다:

$$r^n(s) = r^1(s) + 2s(1-s) \sum_{i=0}^{n-2} f^i(s) \quad (4)$$

특히 $r^1(s)$ 은 최하위 립으로 주어진 두 끝점 $b_0 = r_0^n$ 과 $b_n = r_n^n$ 을 연결하는 직선이며, 이를 기저립(base rib)이라고도 한다. 식 (4)에서 각 팬들은 모두 스칼라 함수 $2s(1-s)$ 로 크기 조절이 된다. 또한 립은 기저립으로부터 팬을 순차적으로 더해져 만들어 짐을 알 수 있다(Fig. 1 참조).

기본적인 정의 외에 립과 팬의 추가적인 성질들로 다음과 같은 것들이 있다^[4]. 합성팬을 이용한 분해 및 조합, 립 불변 곡선 변형, 곡선 분할에서의 팬 연속성. 본 논문에서는 합성팬의 성질을 사용하여 곡선의 성장을 설명한다(3.1절 참조). 식 (4)로부터 k 차의 합성팬 $\bar{f}^k(s)$ 을 다음과 같이 정의한다:

$$\bar{f}^k(s) = \sum_{i=0}^k f^i(s) \quad (5)$$

식 (4)와 (5)에서 베지어 곡선은 기저립과 합성팬으로 분해된다:

$$r^n(s) = r^1(s) + 2s(1-s)\bar{f}^{n-2}(s) \quad (6)$$

합성팬 $\bar{f}^{n-2}(s)$ 의 제어 벡터 \bar{f}_i^{n-2} 는 다음과 같다:

$$\bar{f}_i^{n-2} = v_i^{n-2} \left(b_{i+1} - \binom{n-1}{i+1} b_0 + \binom{n-1}{i} b_n \right) / \binom{n}{n+1} \quad (7)$$

$$v_i^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2(i+1)(n-i-1)}$$

식 (6)과 (7)을 통해 주어진 곡선과 기저립과의 차이를 명시적으로 표현할 수 있다: $b(s) - r^1(s) = 2s(1-s)\bar{f}^{n-2}(s)$. (이 벡터 필드가 베지어 곡선의 가장 단순한 성장 패턴에 해당한다.) Fig. 2의 첫 번째 줄은 11차 곡선들에 대한 합성팬의 예를 보여 준다.

합성팬을 이용하여 베지어 곡선을 정의할 수 있다. 두 끝점 b_0 와 b_n 을 잇는 직선 $r^1(s)$ 와 $n-2$ 차의 벡터 필드 $\bar{f}^{n-2}(s) = \sum_{i=0}^{n-2} \bar{f}_i^{n-2} B_i^{n-2}(s)$ 가 주어졌을 때, n 차의 베지어 곡선을 정의할 수 있다:

$$r^1(s) + 2s(1-s)\bar{f}^{n-2}(s) \equiv r^n(s) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(s) \quad (8)$$

위 식에서 제어점은 다음과 같이 정의된다.

$$b_i = \left(\binom{n-1}{i} b_0 + \binom{n-1}{i-1} b_n \right) / \left(\binom{n}{i} + \frac{2i(n-i)}{n(n-1)} \bar{f}_{i-1}^{n-2} \right) \quad (9)$$

3. 형태학적 발달

기하 개체의 생물학적 발달의 분석은 일정 기간 동안의 성장과정으로 볼 수 있는 일련의 모양을 찾아내는 것이다. 그런데 기하 개체의 외형을 나타내는 경계선(또는 면) 정보만으로 물체가 어떻게 성장하여 현재의 모습을 갖게 되었는지 알기는 쉽지 않고, 기하 개체 내부 구조나 외형 변화를 유발한 요인들을 알고 있어야 한다. 2.1절에서 기하 개체의 유형에 따라 이 문제를 해결한 다양한 시도들을 볼 수 있다. 이 논문에서는 베지어 곡선으로 표현되는 기하 개체의 발달 문제를 다루게 된다.

2.2절에서 RFD를 통해 베지어 곡선을 일련의 립과 팬으로 분해할 수 있음을 보였다. 여기서 나아가, 식 (1)과 (4)에 따른 립과 팬의 점진적 특성을 시간에 따라 변화하는 구조로 확장할 수 있다. 우선 서로 다른 차수의 립은 주어진 곡선의 특정 순간의 발달 단계로 볼 수 있다.

일반적으로 베지어 곡선의 형태적 발달을 나타내기 위해서는 세가지 요소가 필요하다: (1) 성숙한 단계와 초기 단계를 표현하는 두 개의 곡선, 즉, 현재 곡선과 초기 곡선, (2) 각 곡선 사이의 특징 대응 관계, (3) 대응된 각 특징쌍 사이의 발달 경로.

Table 1. 발달 패턴 생성방법 유형

생성 방법		표기	발달 경로	
			경로 유형	독립 곡선 개수 (m : 차수)
선형	합성팬 (DCF)	$d_r(s, t)$	직선	1
	팬직선 (DFL)	$d_g(s, t)$	직선	$n-1$
곡선	팬곡선 (DFC)	$d_k(s, t)$	베지어 곡선	1
	팬스플라인 (DFS)	$d_s(s, t)$	스플라인 곡선	1

초기 단계의 곡선은 기저립처럼 최소한의 특징을 갖는 단순한 곡선일수록 좋다. 인접한 림 사이에서 대응되는 특징은 같은 인수에 해당하는 심이다. 즉, $s_a = s_b$ 일 때 $r^k(s_a)$ 와 $r^{k+1}(s_b)$ 는 대응관계에 있다고 본다. 하지만 본 논문에서는 계산 편의를 위해 이를 제어점 대응으로 대신한다. 즉, 인접한 두 림의 차수가 다른 경우, 두 림의 차수를 맞추고 제어점을 순차적으로 대응시킨다.

베지어 곡선 $b(s)$ 의 발달 패턴은 시간 인수 t 를 써서 $d(s, t)$ 로 표기한다(s 는 공간인수로 본다.). 즉, 기저립이 초기 곡선일 때, 발달 패턴은 다음과 같다:

$$d(s, t) = r^1(s) + p(s, t) \tag{10}$$

위 식에서 $p(s, t)$ 는 s 에서 정의되는 심의 발달 경로이다. 발달 패턴은 위의 s 에 대해 다음과 같은 조

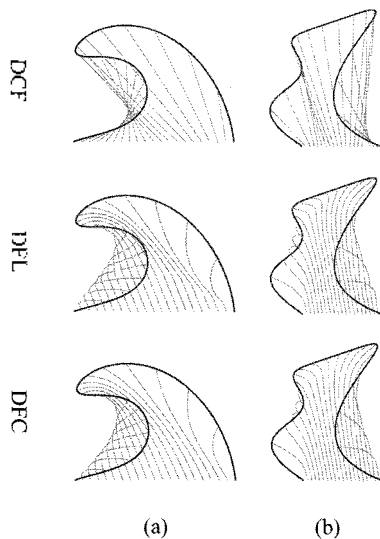


Fig. 2. 베지어 곡선의 팬의 유형과 예.

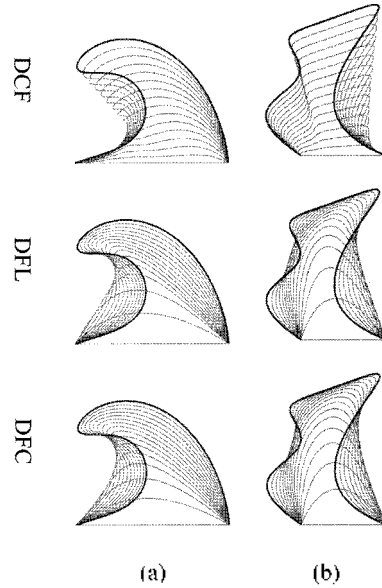


Fig. 3. 베지어 곡선의 발달 패턴의 유형과 예.

건을 만족시킨다: $d(s, 0) = r^1(s)$ 및 $d(s, 1) = r^n(s)$. 이는 발달 경로의 조건을 암시한다: $p(s, 0) = 0$ 및 $p(s, 1) = r^n(s) - r^1(s)$. 시간 인수 t 는 구간 $[0, 1]$ 에서 곡선의 나이에 해당한다.

초기 곡선이 결정되면 발달 패턴은 발달 경로에 의해 결정된다. Table 1은 곡선의 발달 패턴을 발달 경로 유형에 따라 요약하여 보여준다. 아래에서는 각 발달 패턴을 생성하는 방법을 설명한다.

3.1 합성팬에 의한 발달

가장 간단한 발달 패턴 $d_{cf}(s, t)$ 은 주어진 곡선 $r^n(s)$ 과 기저립 $r^1(s)$ 의 시간 인수 t 에 대한 선형 혼합으로 정의된다. 이 경우 발달 경로 $p_{cf}(s, t)$ 는 식 (6)에 의해 다음과 같이 합성팬으로 표현된다:

$$\begin{aligned} d_{cf}(s, t) &\equiv (1-t)r^1(s) + tr^n(s) = r^1(s) + t(r^n(s) - r^1(s)) \\ &= r^1(s) + t(2s(1-s)\bar{f}^{n-2}(s)) \\ &= r^1(s) + p_{cf}(s, t) \end{aligned} \tag{11}$$

식 (7)에서 합성팬의 제어 벡터를 알 수 있으므로 공간 인수 s 에서의 발달 경로를 계산할 수 있다. 이러한 곡선 발달을 합성팬에 의한 곡선 발달(DCF, development by composite fan)이라고 한다. 일반적으로 이 발달 패턴은 곡선 나이가 0이나 1일 때 외에는 림들을 포함하지 않는다.

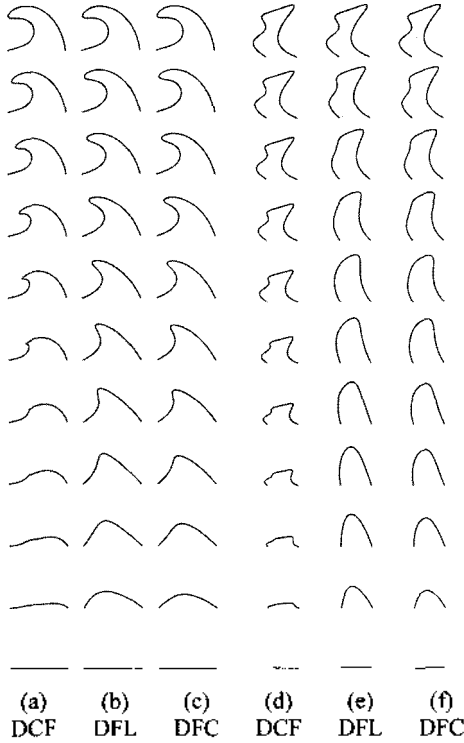


Fig. 4. 베지어 곡선의 발달 패턴의 유형과 예.

곡선 $\mathbf{b}(s) = \mathbf{r}_b^n(s)$ 와 q 차의 림 $\mathbf{r}_b^q(s)$ 에 대해서, DCF는 다음과 같이 일반화 된다:

$$\mathbf{d}_{cf}(s, t; \mathbf{r}_b^n, q) = (1-t)\mathbf{r}_b^q(s) + t\mathbf{r}_b^n(s) = \mathbf{r}_b^q(s) + \mathbf{p}_f(s, t) \tag{12}$$

식 (11)에서 곡선 혼합 순서를 바꾸면 발달 패턴이 거꾸로 된다: $\mathbf{d}_{cf}(s, 1-t) = (1-t)\mathbf{r}^n(s) + t\mathbf{r}^1(s)$. 즉, 곡선은 복잡한 쪽에서 간단한 쪽으로 변화하게 된다. 이를 형태학적 퇴화라고 할 수 있고, 4절에서 형태학적 변환에 이용된다.

Fig. 2의 맨 윗줄은 두 가지 11차 곡선에 대해서 합성팬에 의한 발달 경로의 예를 보여준다. Fig. 3의 윗 줄은 이에 따른 발달 패턴을 보여준다. Fig. 4의 (a)와 (d)는 기저림으로부터 시작하여 주어진 곡선으로 성장하는 일련의 과정을 순차적으로 보여준다. 합성팬 발달의 특징은 모든 특징(예를 들어, 주름이나 꼬임)들이 발달 초기 단계부터 발생한다는 것이다. 곡선의 차수가 높을수록 이러한 특징 발달의 선형성이 뚜렷이 드러난다. 이러한 현상을 방지하기 위해서는 곡선의 내부 구조를 고려해야 하며, 이러한 방법을 아래에서 설명한다.

3.2 팬직선에 의한 발달

이 절에서는 특징들이 단계적으로 발생하게 되는 구조적인 발달 방법을 설명한다. 기본 개념은 일련의 림과 팬을 각각 중간 발달 단계와 경로로 이용하는 것이다. 식 (4)에서 두 인접한 림 $\mathbf{r}^k(s)$ 와 $\mathbf{r}^{k-1}(s)$ 에 대해서 ($2 \leq k \leq n$), 일련의 팬 벡터 $2s(1-s)\mathbf{f}^{k-2}(s)$ 를 얻는다. 어떤 s 에서의 팬 벡터를 순서대로 연결하면 다직선(polyline)을 얻게 되는데 이를 팬직선이라고 한다(Fig. 1 참조). 이 절에서는 팬직선을 발달 경로로 이용하는 성장인 DFL(development by fan lines)에 대해서 설명한다.

가장 중요한 문제는 팬직선을 이용하여 발달 경로 $\mathbf{d}_f(s, t)$ 를 시간 인수 t 로 인수화하여 표현하는 것이다. 다음과 같은 인수화가 가능하다:

$$\mathbf{d}_f(s, t) = \mathbf{r}^1(s) + \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i(t)(2s(1-s)\mathbf{f}^i(s)) = \mathbf{r}^1(s) + 2s(1-s) \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i(t)\mathbf{f}^i(s) \tag{13}$$

$\alpha_i(t)$ 는 시간 구간 $\{t_i | 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_{n-1} = 1\}$ 에 대해 아래와 같이 정의된다:

$$\alpha_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < t_i \\ \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} & \text{for } t \in [t_i, t_{i+1}] \\ 1 & \text{for } t > t_{i+1} \end{cases} \tag{14}$$

시간 구간을 정하는 방법은 다양하겠지만, 가장 간단한 방법은 림의 차수로부터 일어 내는 것이다: $t_i = i/(n-1)$. (본 논문에서는 이 방식을 따른다.) 또는 인접한 팬의 상대적인 길이를 이용할 수도 있다. 만약 $\alpha_i(t) \equiv t$ 인 경우, $\mathbf{d}_f(s, t) = \mathbf{d}_{cf}(s, t)$ 가 된다. 식 (13)의 발달 패턴은 다음의 조건을 만족시킨다: $\mathbf{d}_f(s, 0) = \mathbf{r}^1(s)$ 및 $\mathbf{d}_f(s, 1) = \mathbf{r}^n(s)$. 또한 $t = t_i$ 일 때 발달 패턴은 림에 해당한다: $\mathbf{d}_f(s, t_i) = \mathbf{r}^{i+1}(s)$. $\mathbf{b}(s) = \mathbf{r}_b^n(s)$ 과 q 차의 림 $\mathbf{r}_b^q(s)$ 에 대해, DFL은 다음과 같이 일반화 된다:

$$\mathbf{d}_f(s, t; \mathbf{r}_b^n, \mathbf{r}_b^q) = \mathbf{r}_b^q(s) + 2s(1-s) \sum_{i=q-1}^{n-2} \alpha_i(t)\mathbf{f}^i(s) \tag{15}$$

시간 인수 t 가 속한 시간 구간을 미리 알고 있으면 (즉, $t \in [t_k, t_{k+1}]$), 식 (13)은 아래와 같이 단순화 된다:

$$\mathbf{d}_f(s, t) = \mathbf{r}^1(s) + 2s(1-s) \left(\sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{f}^i(s) + \alpha_k(t)\mathbf{f}^k(s) \right) = \mathbf{r}^1(s) + 2s(1-s)(\bar{\mathbf{f}}^{k-1}(s) + \alpha_k(t)\mathbf{f}^k(s)) \tag{16}$$

팬 $\tilde{f}^{k-1}(s)$ 은 식 (5)와 (7)로 간단히 계산할 수 있다.

일반적으로 DFL에 의한 발달 패턴에서는 어린 곡선은 성숙한 곡선에 비해 확실히 단순한 모양인데 이는 립의 점진적 발달 성질에 직접적으로 기인한다. 예를 들어, 2차 립 $r^2(t)$ 는 평면에 정의되는 포물선의 일부인데, 이 곡선에 주름이나 꼬임과 같은 복잡한 특징이 있을 수 없다. 하지만, 상위 차수의 립에서는 섬세한 특징들이 얼마든지 발생할 수 있다.

Fig. 2의 가운데 줄은 DFL로 생성된 팬곡선 방식의 발달 경로의 예를 보여 준다. 이는 Fig. 2와 첫 줄의 DFC 방식과 매우 다르다. 이는 DFL에 의한 경로에 독특한 내부 구조가 반영되어 있기 때문이다. Fig.3의 가운데 줄은 DFL 방법에 의한 발달 패턴을 보여 준다. Fig. 4의 (b), (e)는 DFL 방법에 의해 기저립으로부터 시작하여 주어진 곡선으로 성장하는 일련의 과정을 순차적으로 보여준다. Fig. 4의 (a)와 (b)에서, 초기 단계부터 발달 패턴에 차이가 남을 알 수 있다. 특히, 주름이나 꼬임이 발생하는 시점에서 큰 차이가 있다.

3.3 팬곡선에 의한 발달

DFL은 곡선의 구조 정보를 활용한다는 점에서 DCF와 다름을 알 수 있다. 그런데, DFL의 발달 패턴은 시간 인수에 대해 C^0 연속성만을 갖는다. 이러한 현상은 일부 응용에서는 문제가 될 수 있다. 예를 들어, 발달 패턴을 이용하여 부드러운 곡면을 생성하고자 하는 경우 DFL 방법으로는 C^0 연속성밖에 보장할 수 없다. 이러한 한계를 극복하기 위해, 이 절에서는 다직선 대신 부드러운 곡선을 발달 경로로 삼는 곡선 발달 방법을 설명한다.

기본 개념은 팬곡선을 이용하여 곡선을 정의하여 이를 발달 경로로 사용하는 것이다. 특히 이 곡선을 팬곡선이라고 한다. 정해진 공간 인수 s 에 대해 팬곡선 $\tilde{f}^{n-1}(s, t)$ 은 $n-1$ 차의 베지어 곡선으로 정의된다:

$$\tilde{f}^{n-1}(s, t) = \sum_{i=0}^{n-1} r^{i+1}(s) B_i^{n-1}(t) \quad (17)$$

식 (17)은 어떤 시간 t 에서 $\tilde{f}^{n-1}(s, t)$ 은 모든 립들을 혼합하여 얻은 곡선임을 의미한다. 식 (13)의 $\alpha_i(s)$ 와 달리 변슈타인 함수를 혼합에 사용하기 때문에 정의되는 일련의 곡선은 연속적이다. 아래에서는 팬곡선을 성장 경로로 하는 곡선 발달 방법인 DFC(development by fan curves)에 대해서 설명한다.

DFC의 발달 패턴 $d_{fc}(s, t)$ 은 아래와 같다:

$$\begin{aligned} d_{fc}(s, t) &= \tilde{f}^{n-1}(s, t) = \sum_{i=0}^{n-1} r^{i+1}(s) B_i^{n-1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(r^1(s) + 2s(1-s) \sum_{j=0}^{i-1} r^j(s) \right) B_i^{n-1}(t) \\ &= r^1(s) + 2s(1-s) \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{i-1} r^j(s) B_i^{n-1}(t) \quad (18) \\ &= r^1(s) + 2s(1-s) \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{f}^i(s) B_i^{n-1}(t) \end{aligned}$$

위 식에서 발달 경로는 일련의 합성팬들을 혼합하여 정의됨을 알 수 있다.

Fig. 2의 마지막 줄은 DFC로 생성된 발달 경로의 예를 보여 준다. Fig. 3의 마지막 줄은 DFC로 생성된 발달 패턴의 예를 보여 준다. DFC의 결과가 DFL의 결과와 유사해 보이지만 결정적인 차이는 발달 패턴의 곡선들의 연속성이다. Fig. 4의 (c), (f)는 기저립으로부터 시작하여 주어진 곡선으로 성장하는 일련의 과정을 순차적으로 보여준다.

DFC만이 연속적인 성장 경로를 얻는 곡선 성장 방법은 아니다. 예를 들어, 립 상의 각 점을 통과하는 스플라인 곡선을 정의할 수 있다. 이를 DSC(development by spline curve)라고 하자. DSC와 DFC에서 발달 경로 곡선의 제어점은 같지만 혼합방법이 다르다.

4. 형태학적 변환

곡선의 형태학적 변환은 두 곡선 $\mathbf{a}(s) = \mathbf{r}_a^m(s)$ 과 $\mathbf{b}(s) = \mathbf{r}_b^n(s)$ 에 대해 아들의 변환 과정을 표현하는 중간 곡선들을 찾는 문제이다. 특히, 본 논문에서는 두 곡선들의 특징과 구조를 모두 반영하는 변환 과정을 시간 인수에 대해서 인수화하여 표현하는 방법들을 제시한다(Table 2 참조).

첫 번째 방법(TLI)은 주어진 곡선을 선형 혼합하는 것이다. 이 방법은 특별한 제어 요소를 갖지 않는다. 따라서, 복잡한 특징을 갖는 고차 곡선에 대해서는 그 결과가 바람직하지 않은 경우가 많다. 특히, 고차 곡선에서는 제어점이 매우 복잡하고 때로 폭주하는 경우가 있어, 대응하는 특징을 찾기 어렵고, 결과적으로 변환 패턴에 오류가 발생할 수 있다.

이 문제의 해결을 위해 본 논문에서는 곡선의 발달 정보를 특징 대응에 이용한다. 즉, 매우 다른 복잡한 곡선들이라고 할지라도 그들의 발달 초기단계는 매우

유사할 수 밖에 없고, 이 단계에서의 특징 대응은 상대적으로 용이하다는 것이다. 예를 들어 Fig. 4의 DFL이나 DFC 결과에서 기저립에 가까운 초기 곡선들은 공통적으로 포물선 모양으로 단순하다. 따라서 3차 정도의 곡선들은 선형 혼합으로 별다른 문제가 발생하지 않는다. 고차의 곡선이라도 특징이 두드러지지 않는 경우라도 마찬가지이다. 이러한 중간 발달 단계에서 곡선의 특징을 대응하여 혼합하고 추가적인 발달을 시키는 것이 본 논문에서 제시되는 곡선 변환의 기본적인 개념이다.

두 번째 방법(TCE)에서 먼저 DCF 방법과 3차 혼합을 실험한다. 이전 연구^{12,13,20}에서 변환 패턴 생성을 위한 추가적인 제어 도형을 사용한 예가 있다. 본 논문에서는 하위립 중 하나가 DCF 패턴의 초기곡선으로 혼합에 참여한다. 혼합 이후에 보외(extrapolation)를 통해 추가적인 제어를 하게 되는데 이는 결국 선형 혼합 패턴의 재인수화에 해당한다는 것을 발견했다.

이러한 제약을 해결하기 위해 세 번째 방법(TDE)에서는 DFL, DFC, DSC와 같은 구조적 발달 패턴과 2차 혼합에 사용하게 된다. 다음 절에서 세 가지 방법을 자세히 설명한다.

Table 2. 변환 패턴 생성방법 유형

생성 방법	표기	선형보간 개수	발달 유형	보외부 제어
선형혼합 (TLI)	$t_1(s, t)$	1	없음	없음
3차혼합, 보외 (TCE)	$t_c(s, t)$	6	DCF (묵시적)	있음
2차혼합, 구조적 발달 및 보외 (TDE)	$t_d(s, t)$	4	DFL, DFC, DSC	있음

4.1 선형 보간에 의한 변환

선형 혼합은 곡선 변환의 가장 간단한 방법이고 이를 TLI(transformation by linear interpolation)라고 한다. 차수 m 과 n 의 두 곡선 $\mathbf{a}(s) = \mathbf{r}_a^m(s)$ 와 $\mathbf{b}(s) = \mathbf{r}_b^n(s)$ 에 대해 먼저 적당한 차수 올림¹⁶을 수행하고 대응 제어점을 혼합한다. 예를 들어, $m < n$ 일 때 $\mathbf{r}_a^m(s)$ 의 차수를 m 에서 n 으로 올려서 $\hat{\mathbf{r}}_a^{n,m}(s)$ 을 얻는다:

$$\mathbf{r}_a^m(s) = \sum_{i=0}^m \mathbf{r}_{a,i}^m B_i^m(s) = \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{r}}_{a,i}^{n,m} B_i^n(s) = \hat{\mathbf{r}}_a^{n,m}(s) \quad (19)$$

이 때 선형 변환은 아래와 같다:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1(s, t; \mathbf{r}_a^m, \mathbf{r}_b^n) &= (1-t)\mathbf{r}_a^m(s) + t\mathbf{r}_b^n(s) \\ &= (1-t)\hat{\mathbf{r}}_a^{n,m}(s) + t\mathbf{r}_b^n(s) \quad (20) \\ &= \sum_{i=0}^n ((1-t)\hat{\mathbf{r}}_{a,i}^{n,m} + t\mathbf{r}_{b,i}^n) B_i^n(s) \end{aligned}$$

TLI에서 특징 대응은 단순히 제어점의 인덱스에 의해 결정되는데, 이 방법은 간단한 곡선들에서는 문제가 없다. 하지만, 복잡한 곡선에 적용하면 변환 패턴이 단조롭고 선형적이다. 즉, 변환 패턴상의 어떤 곡선에서도 두 곡선의 특징이 동시에 뚜렷이 나타난다. 이런 현상의 효율은 응용에 따라 결정된다. 예를 들어, 애니메이션에서는 지루하게 느껴질 수 있고, CAD 곡면 설계에서는 최소한 나쁘다고는 할 수 없을 것이다. Fig. 7(a)는 TLI로 두 베지어 곡선 사이의 변환 패턴을 생성한 예를 보여 준다.

4.2 삼차 혼합과 보외에 의한 변환

선형 혼합에 의한 TLI 변환 패턴의 단조로움을 피하기 위해 하위립을 제어 곡선으로 추가하여 3차 혼합을 시도하는 과정과 이 방법의 의미를 설명한다. 이 절에서 제시된 방법은 먼저 추가 제어 곡선으로 주어진 곡선의 하위 립을 선택한다. 주어진 두 곡선 $\mathbf{a}(s) = \mathbf{r}_a^m(s)$ 와 $\mathbf{b}(s) = \mathbf{r}_b^n(s)$ 그리고 두 하위립 $\mathbf{r}_a^p(s)$ ($1 \leq p \leq m$)와 $\mathbf{r}_b^q(s)$ ($0 \leq q \leq n$)에 대해 3차 혼합을 이용하여 변환 패턴을 얻을 수 있다:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_c(s, t) &= \mathbf{a}(s)B_0^3(t) + \mathbf{c}(s)B_1^3(t) + \mathbf{d}(s)B_2^3(t) + \mathbf{b}(s)B_3^3(t) \\ &= \mathbf{r}_a^m(s)B_0^3(t) + \mathbf{r}_a^p(s)B_1^3(t) + \mathbf{r}_b^q(s)B_2^3(t) + \mathbf{r}_b^n(s)B_3^3(t) \quad (21) \end{aligned}$$

이러한 혼합을 TCB (transformation by cubic blending)라고 한다. 식 (21)은 De Casteljau 알고리즘과 유사하다:

$$\mathbf{t}_0^1(s, t) = (1-t)\mathbf{r}_a^m(s) + t\mathbf{r}_a^p(s) \quad (22)$$

$$\mathbf{t}_1^1(s, t) = (1-t)\mathbf{r}_a^p(s) + t\mathbf{r}_b^q(s) \quad (23)$$

$$\mathbf{t}_2^1(s, t) = (1-t)\mathbf{r}_b^q(s) + t\mathbf{r}_b^n(s) \quad (24)$$

$$\mathbf{t}_0^2(s, t) = (1-t)\mathbf{t}_0^1(s) + t\mathbf{t}_1^1(s) \quad (25)$$

$$\mathbf{t}_1^2(s, t) = (1-t)\mathbf{t}_1^1(s) + t\mathbf{t}_2^1(s) \quad (26)$$

$$\mathbf{t}_0^3(s, t) = (1-t)\mathbf{t}_0^2(s) + t\mathbf{t}_1^2(s) = \mathbf{t}_c(s, t) \quad (27)$$

식 (22)-(27)을 각각 형태학적 성장과 변환의 관점에서 해석할 수 있다(Fig. 5 참조). 먼저 식 (23)의 $\mathbf{t}_1^1(s, t)$ 은 TLI에 의한 하위립 사이의 변환 패턴이다:

$t_1^1(s, t) = t_1(s, t; r_a^p, r_b^q)$. 이를 기저변환(base transformation)으로 부른다. 기저변환에서는 단순한 특징간의 대응 및 혼합만 발생한다고 가정한다. 식 (22)의 $t_0^1(s, t)$ 와 식 (24)의 $t_2^1(s, t)$ 은 식 (11)과 (12)로 얻을 수 있는 DCF 성장 패턴이다: $t_0^1(s, t) = d_{cf}(s, 1-t; r_a^m, p)$ 및 $t_2^1(s, t) = d_{cf}(s, t; r_b^n, q)$. 이 발달 패턴은 기저변환의 $t_1^1(s, t)$ 의 결과와 혼합되는데, 이를 통해 발달과 변환이 동시에 일어나게 된다. 예를 들어 식 (25)에서 $t_1^1(s, t)$ 와 $t_0^1(s, t)$ 을 2차 혼합한다: $t_0^2(s, t) = r_a^m(s)B_0^2(t) + r_b^n(s)B_1^2(t) + r_b^q(s)B_2^2(t)$. 이는 $r_a^m(s)$ 의 성숙함과 기저변환의 특징변환 모두를 혼합하게 되는 것이다. 식 (26)도 이와 유사한 2차 혼합이다: $t_1^2(s, t) = r_a^m(s)B_0^2(t) + r_b^n(s)B_1^2(t) + r_b^q(s)B_2^2(t)$. 식 (27)에서 두 중간 변환 결과 $t_0^2(s, t)$ 와 $t_1^2(s, t)$ 가 선형 혼합된다. 하지만 $t_0^2(s, t)$ 와 $t_1^2(s, t)$ 가 미성숙한 특징들 만을 갖고 있기 때문에 $t_0^3(s, t)$ 에도 유사한 미성숙의 문제가 상속된다(Fig. 7(b) 참조). 이는 기저변환에서 하위립간의 단순한 특징 내용으로 발생하는 부작용으로 볼 수 있다. 따라서 최종적인 고려 사항은 식 (27)의 결과에 대한 전반적인 크기 제어 방법이다.

기본적으로 미성숙한 곡선에 발달 시간을 더 부여하면 추가적인 성장을 기대할 수 있다. 문제는 성장의 정도를 결정하는 것이다. 이를 위해 본 논문에서는 발달 연령(developmental age) 개념을 사용한다. 우선 주어진 곡선의 발달 연령은 최대 성숙도를 고려하여 다음과 같이 정의된다: $g_d(r_a^m(s)) = g_d(r_b^n(s)) = 1$. 림 $r_a^p(s)$ 의 발달 연령은 다음과 같이 정의된다:

$$g_d(r_a^p(s)) = \frac{p-1}{m-1} \tag{28}$$

m 과 p 는 곡선 $r_a^m(s) = a(s)$ 과 $r_a^p(s)$ 의 차수이다. 변환 패턴 $t_1^1(s, t)$ 의 발달 연령은 아래와 같다:

$$\begin{aligned} g_d(t_1^1(s, t)) &= (1-t)g_d(r_a^p(s)) + t g_d(r_b^q(s)) \\ &= (1-t)\frac{p-1}{m-1} + t\frac{q-1}{n-1} \end{aligned} \tag{29}$$

변환 패턴 $t_0^3(s, t)$ 의 발달 연령은 아래와 같다:

$$g_d(t_0^3(s, t)) = \sum_{i=0}^3 g_{d,i} B_i^3(t) \tag{30}$$

위 식에서 제어 곡선의 발달 연령은 다음과 같다: $g_{d,0} = (r_a^m(s))$, $g_{d,1} = g_d(r_a^p(s))$, $g_{d,2} = g_d(r_b^n(s))$, $g_{d,3} = g_d(r_b^q(s))$. 기저립으로 기저변환을 한 경우, 즉

$p = q = 1$ 이면, $t_1^1(s, t)$ 와 $t_0^3(s, t)$ 의 발달 연령은 아래와 같이 단순화된다:

$$\begin{aligned} g_d(t_1^1(s, t)) &= 0 \\ g_d(t_0^3(s, t)) &= \sum_{i=0}^3 g_{d,i} B_i^3(t) = B_0^3(t) + B_3^3(t) \\ &= 1 - 3t(1-t) \end{aligned} \tag{31}$$

위 식에서 $t=0.5$ 일 때의 $t_0^3(s, 0.5)$ 의 발달 연령은 0.28인데 이는 곡선의 미성숙함을 설명한다.

본 논문에서 $t_0^3(s, t)$ 의 추가 성장을 위해 기저 변환 $t_1^1(s, t)$ 과의 보외(extrapolation)를 적용한다:

$$t_{ce}(s, t) = (1-e(t))t_1^1(s, t) + e(t)t_0^3(s, t) \tag{32}$$

위 식에서 $e(t)$ 아래와 같이 정의되는 보외 인수이다:

$$e(t) = \frac{1 - g_d(t_1^1(s, t))}{g_d(t_0^3(s, t)) - g_d(t_1^1(s, t))} = \frac{1}{1 - 3t(1-t)} \tag{33}$$

식 (32)는 변환 생성 방법인 TCE (transformation by cubic blending and linear extrapolation)를 설명한다. 사용된 보외의 인수 $e(t)$ 는 주어진 곡선과 하위립의 차수에 영향을 받지 않는데, 이를 변형하여 사용할 수도 있다.

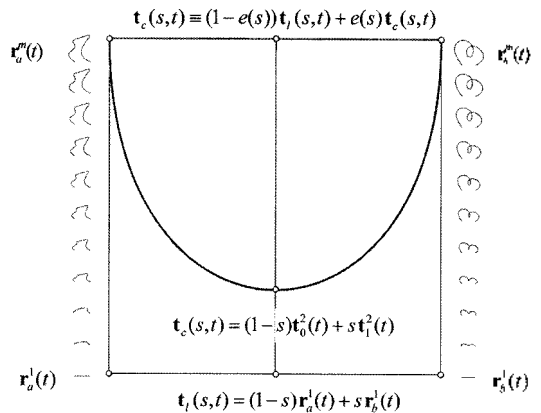


Fig. 5. TCE 변환 방법의 설명.

Fig. 7(c)는 $p = q = 1$ 일 때의 변환 패턴을 보여 준다. 이는 식 (32)를 통해 Fig. 7(b)의 결과에 추가적인 성장을 허용한 것이다. 즉, 제시된 방법을 통해 3차 혼합만 사용했을 때의 미성숙의 문제를 해결할 수 있었다. 하지만, 식 (32)를 분석해 보면 주어진 곡선 $r_a^m(s)$ 와 $r_b^n(s)$ 의 선형 보간을 재인수화한 것과 같음

을 알 수 있다:

$$t_{ce}(s, t) = e(t)(B_0^3(t)r_a^m(s) + B_3^3(t)r_b^n(s)) \\ = \frac{1}{1-3t(1-t)}((1-t)^3 r_a^m(s) + t^3 r_b^n(s)) \quad (34)$$

이는 TLI와 TCE의 변환 패턴은 모양 자체가 아니라 특정 모양이 나타나는 시점만 다른 것임을 의미한다. 이는 사용된 DCF 발달의 선형성에 기인한다. 따라서 아래에서는 이 비선형 발달을 사용하여 TLI와 TCE로는 생성할 수 없는 발달 패턴을 만드는 방법을 제시한다.

4.3 발달과 보외에 의한 변환

위 절에서 TCE는 DFC와 선형성으로 인해 곡선의 구조적인 변환을 표현할 수 없었음을 보였다. 하지만, 이를 위해 고안된 식 (21)-(27)는 발달 패턴을 곡선 혼합에 이용할 수 있는 가능성을 열어 주었다. 또한 식 (32)를 통해 곡선의 추가적인 성장을 제어하는 방법을 제시하였다. 본 절에서는 TCE의 기본 방법에 발달 방법으로 구조적이고 비선형적인 DFL이나 DFC 방법을 사용하여 변환 패턴을 생성하는 방법을 제시한다.

식 (27)의 3차 혼합은 기저변환 패턴과 두 DCF 발달 패턴의 2차 혼합으로 해석할 수 있다:

$$t_0^3(s, t) = t_0^1(s, t)B_0^2(t) + t_1^1(s, t)B_1^2(t) + t_2^1(s, t)B_2^2(t) \\ = d_{cf}(s, 1-t; r_a^m, p)B_0^2(t) + t_1(s, t; r_a^p, r_b^q)B_1^2(t) \\ + d_{cf}(s, t; r_b^m, q)B_2^2(t) \quad (35) \\ \equiv t_{d,cf}(s, t)$$

여기서 식 (35)의 발달 패턴 DFL이나 DFC로 교체하면 다음과 같은 2차 혼합을 얻는다:

$$t_{d,n}(s, t) = d_n(s, 1-t; r_a^m, p)B_0^2(t) + t_1^1(s, t; r_a^p, r_b^q)B_1^2(t) \\ + d_n(s, t; r_b^m, q)B_2^2(t) \quad (36)$$

$$t_{d,tc}(s, t) = d_{tc}(s, 1-t; r_a^m, p)B_0^2(t) + t_1^1(s, t; r_a^p, r_b^q)B_1^2(t) \\ + d_{tc}(s, t; r_b^m, q)B_2^2(t) \quad (37)$$

식 (36)와 (37)도 미성숙한 곡선을 생성한다(Fig. 7(d) 참조). 따라서 다음의 추가 성장 단계를 적용해야 한다:

$$t_{dc,*}(s, t) = (1-e(t))t_1(s, t) + e(t)t_{d,*}(s, t) \quad (38)$$

위 식은 변환 방법인 TDE(transformation by development and linear extrapolation)를 나타낸다. (Fig. 6 참조).

Fig. 7(e)는 기저립을 기저변환에 사용할 때, 즉 $p = q = 1$ 일 때의 TDE 결과를 보여 준다. TLI와 TCB 방법에 비해 변환 패턴의 곡선이 더 부드러운 특징을 갖고 있음을 알 수 있다. 하지만, 추가 성장이 과도하게 적용된 경우가 발생할 수 있음을 알 수 있다. 이는 발달 연령의 추측의 오류에 기인한다.

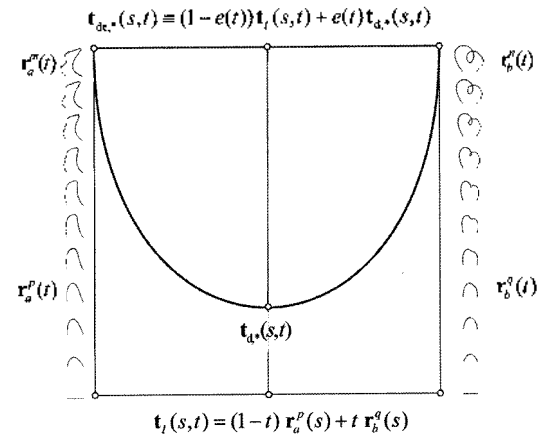


Fig. 6. TDE 변환 방법의 설명.

이 문제는 보외 인수를 다음과 같이 일반화하여 해결할 수 있다:

$$e_{\beta}(t) = \frac{1}{1-\beta t(1-t)} \quad (39)$$

즉, $e_{\beta}(t)$ 는 β 에 상관없이 $t = 0.5$ 에서 최대값을 갖는다. 또한 $0 < \beta < 4$ 이면 항상 $e_{\beta}(t) > 1$ 이 된다. 그런데 $\beta \approx 4$ 일 때 최대값 $e_{\beta}(0.5)$ 이 너무 크므로 일반적으로 $0 < \beta \leq 3$ 를 사용하는 것이 좋다. Fig. 7(f)는 개선된 보외 인수를 사용한 TDE의 결과이다. 곡선이 부드러우면서도 적당한 크기를 갖고 있음을 알 수 있다.

보외 인수 일반화를 통해 과도 성장의 문제를 해결할 수 있지만, 선택한 하위립의 차수가 너무 낮으면 변환 패턴의 곡선이 너무 단순할 수 있다. 이 때는 좀 더 높은 차수의 하위립을 기저변환에 사용하면 된다. Fig. 7(g)는 $p = q = 4$ 일 때 보외 전의 변환 패턴이고, Fig. 7(h)는 $\beta = 3$ 으로 보외했을 때의 최종 변환 패턴을 보여 준다. 최종 결과는 적당한 크기를 가지면서도 특징이 부드러우면서도 이전에 비해 더 선명해짐을 알 수 있다.

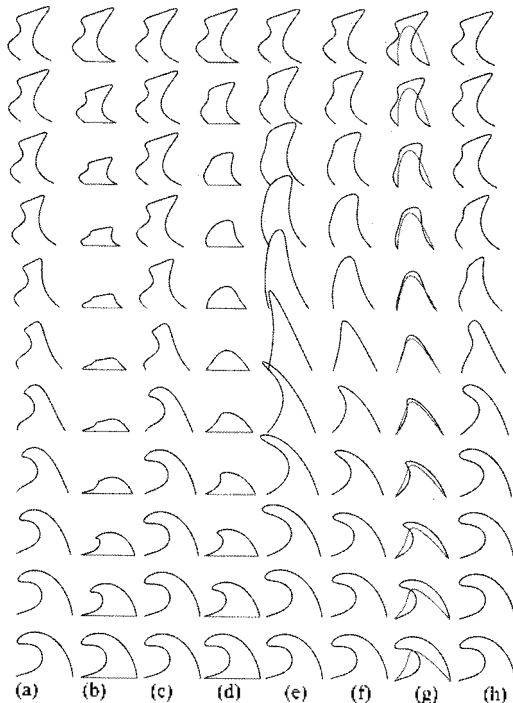


Fig. 7. 곡선의 형태학적 변환 예: (a) TLI 패턴; (b) 기저변환(회색 실선)과 보외 선의 TCF 패턴($p=q=1$); (c) (b)의 보외 결과; (d) 기저변환과 보외 선의 TDE 패턴($p=q=1$); (e) (d)의 보외($\beta=3.0$); (f) (d)의 보외($\beta=2.7$); (g) 기저변환과 보외 선의 TDE 패턴($p=q=4$); (h) (g)의 보외($\beta=3.0$).

6. 결 어

림과 팬은 베지어 곡선의 고유한 구조 정보를 담고 있는 기하학적인 특성이다. 본 논문에서는 이들을 이용하여 베지어 곡선의 발달과 변환 패턴을 생성하는 방법을 제시하였다. 제시된 곡선의 형태학적 발달 방법(DFL/DFC)은 선형 발달(DFC)에 비해 곡선의 구조적 성장을 잘 보여준다. 제시된 곡선의 형태학적 변환 방법(TDE)은 선형 혼합(TLI)이나 3차 혼합(TCE)으로 만들 수 없는 독특한 변환 패턴을 만들 수 있다. 또한, 제시된 방법을 베지어 곡면으로 쉽게 확장할 수 있다.

제시된 방법은 단일 베지어 곡선에서 대해서 적용되기 때문에 독립적인 특징에 적용하기에 적합하지만 생분이나 인공물 개체의 전체적인 모습을 나타내는 윤곽선에 적용하기는 쉽지 않다. 따라서, Fig. 8에서는 단일 곡선 단위로 변환과정이 적용되었다. 즉, 나각형 내부 구조로 분할되는 대응 곡선쌍에 대해서 제시된 변환 방법을 개별적으로 적용한 것이다. 따라서 변환

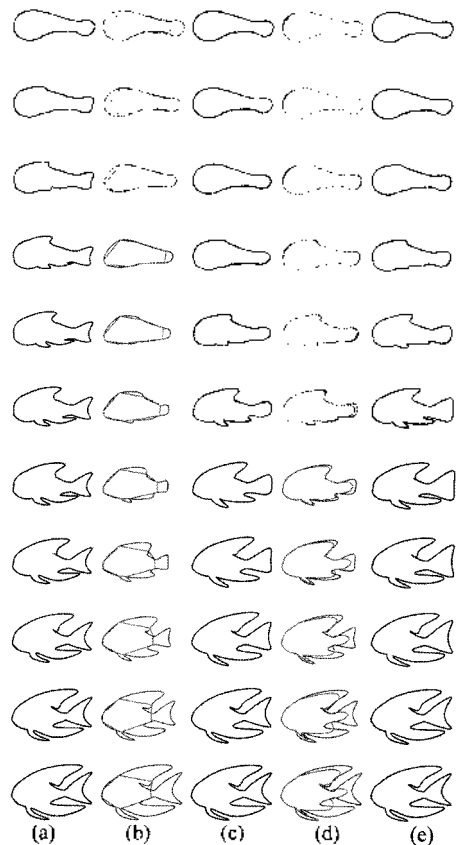


Fig. 8. 어류의 발달 과정: (a) TLI 패턴; (b) $p=q=1$ 일 때 기저변환(회색 실선)과 보외 선의 TDE 패턴; (c) $\beta=2.4$ 일 때 (d)에 대한 보외; (d) $p=q=3$ 일 때 기저변환과 보외 선의 TDE 패턴 (c) $\beta=3.0$ 일 때 (g)의 보외.

패턴의 전체 윤곽선에선는 곡선의 연속성을 지리할 수 없다. 이런 문제를 해결하기 위해 스플라인에 대한 림과 팬을 정의하여 본 논문에서 제시된 발달 및 변환 방법을 시도해도 좋을 것이다.

곡선 변환 과정에서 기저변환을 적용할 하위림을 선택하는 것을 자동화 할 수 있을 것이다. 즉, [16]에서 제시된 림 불변 곡선 변형 방법을 사용하여 두 곡선의 차이를 측정하고 차이가 가장 적은 하위 림들 간에 기저 변환을 수행하는 것이 가능할 것이다.

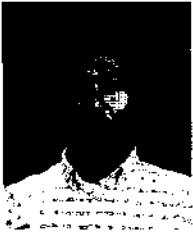
차수 내림^[6,7]은 곡선의 발달 패턴을 생성할 수 있다. 본 논문에서 제시된 변환 패턴 생성 방법에 적용된다면 보외에 의한 추가 성장 과정을 피할 수 있을 것이다. 왜냐하면 대부분의 차수 내림은 모양의 차이를 최소화하려는 과정이 들어 있기 때문이다. 단, 계산량이 좀 더 많을 수 있고, 변환 패턴의 인수화 표현이 어려울 수 있다.

참고문헌

1. Aguado, A. S., Montiel, E. and Zaluska, E., "Modeling Generalized Cylinders via Fourier Morphing", *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 18, No. 4, pp. 293-315, 1999.
2. Bai, X., Latecki, L. J. and Liu, W.-Y., "Skeleton Pruning by Contour Partitioning with Discrete Curve Evolution", *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, to appear.
3. Blanding, R. L. et al., "Skeleton-based Three-dimensional Geometric Morphing", *Computational Geometry: Theory and Applications*, Vol. 15, No. 1-3, pp. 129-148, 2000.
4. Che, W., Yang, X. and Wang, G., "Skeleton-driven 2D Distance Field Metamorphosis Using Intrinsic Shape Parameters", *Graphical Models*, Vol. 66, No. 2, pp. 102-126, 2004.
5. Chuang, G. C. H. and Kuo, C. C. J., "Cartoon Animation and Morphing with Wavelet Curve Descriptor", *Multidimensional Systems and Signal Processing*, Vol. 8, No. 4, pp. 423-447, 1997.
6. Farin, G. E., *Curves and Surfaces for CAD: A Practical Guide*. 5th ed. Morgan Kaufmann Series in Computer Graphics and Geometric Modeling, 2001, San Francisco, CA: Morgan Kaufmann. xvii, 497 pp.
7. Forbes, N., *Imitation of Life: How Biology is Inspiring Computing*. 2004, Cambridge, Mass.: MIT Press. xv, 171 p.
8. Gielis, J., "A Generic Geometric Transformation that Unifies a Wide Range of Natural and Abstract Shapes", *American Journal of Botany*, Vol. 90, No. 3, pp. 333-338, 2003.
9. Gomes, J., *Warping and Morphing of Graphical Objects*. Morgan Kaufmann Series in Computer Graphics and Geometric Modeling, 1999, San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers. xvii, 490 p.
10. Hui, K. C. and Li, Y., "A Feature-based Shape Blending Technique for Industrial Design", *Computer-Aided Design*, Vol. 30, No. 10, pp. 823-834, 1998.
11. Latecki, L. J. and Rolf Lakaemper, Polygon Evolution by Vertex Deletion, in *Proceedings of the Second International Conference on Scale-Space Theories in Computer Vision* (LNCS 1682). Springer-Verlag, 1999.
12. Lee, J.-H., Lee, J. Y., Kim, H. and Kim, H.-S., "Interactive Control of Geometric Shape Morphing based on Minkowski Sum", *Trans. SCCE.*, Vol. 7, No. 4, pp. 317-326, 2002.
13. Lee, J.-H., Kim, H. and Kim, H.-S., "Efficient Computation and Control of Geometric Shape Morphing based on Direction Map", *Trans. SCCE.*, Vol. 8, No. 4, pp. 243-253, 2003.
14. Lee, J.-H., "Modeling Generalized Cylinders Using Direction Map Representation", *Computer-Aided Design*, Vol. 37, No. 8, pp. 837-846, 2005.
15. Lee, J.-H. and Park, H., "Ribs and Fans of Bezier Curves and Surfaces", *Computer-Aided Design and Applications*, Vol. 2, No. 1-4, pp. 125-134, 2005.
16. Lee, J.-H. and Park, H., "Geometric Properties of Ribs and Fans of a Bézier Curve", *Journal of Computer Science and Technology*, Vol. 21, No. 2, pp. 279-283, 2006.
17. Lu, L. and Wang, G., "Optimal Multi-degree Reduction of Bézier Curves with G2-continuity", *Computer Aided Geometric Design*, doi:10.1016/j.cagd.2006.09.002, 2006.
18. Miyashita, S., Sawada, Y., Okada, T., Murata, O. and Kumai, H., Morphological Development and Growth of Laboratory-reared Larval and Juvenile Thunnus Thynnus (Pisces: Scombridae), *Fishery Bulletin*, Vol. 99, No. 4, pp. 601-616, 2001.
19. Purves, W. K., *Life: the Science of Biology*. 7th ed. 2004, Sunderland, Mass.
20. Rossignac, J. and Kaul, A., "AGREI.s and BIPs: Metamorphosis as a Bézier Curve in the Space of Polyhedra", *EUROGRAPHICS '94*, M. Dæhlen and L. Kjelldhal (Eds.), Blackwell Publishers, pp. C179-C184.
21. Samoilov, T. and Elber, G., "Self-intersection Elimination in Metamorphosis of Two-dimensional Curves", *Visual Computer*, Vol. 14, No. 8-9, pp. 415-428, 1998.
22. Sederberg, T. W. and Greenwood, F., "Physically based Approach to 2-D Shape Blending", *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 26, No. 2, pp. 25-34, 1992.
23. Shapira, M. and Rappoport, A., "Shape Blending Using the Star-skeleton Representation", *IEEE Computer Graphics and Applications*, Vol. 15, No. 2, pp. 44-50, 1995.
24. Sun, Y. M., Wang, W. and Chin, F. Y. L., "Interpolating Polyhedral Models Using Intrinsic Shape Parameters", *Journal of Visualization and Computer Animation*, Vol. 8, No. 2, pp. 81-96, 1997.
25. Surazhsky, T. and Elber, G., "Metamorphosis of Planar Parametric Curves via Curvature Interpolation", *International Journal of Shape Modeling*, Vol. 8, No. 2, pp. 201-216, 2002.
26. Thom, R., *Structural Stability and Morphogenesis: An Outline of a General Theory of Models*. Advanced Book Classics. 1989, Reading, Mass.: Addison-Wesley Pub. xxxvi, 348 p.
27. Thompson, D. A. W., *On Growth and Form*. 1992, New York: Dover. 1116 p.
28. Weng, Y. X., "Growth and Form in Biology: Generation of the Plant Morphology by Spontaneous Symmetry Breaking Based on a Pressure Field",

Chinese Physics Letters, Vol. 21, No. 1, pp. 211-214, 2004.

29. Wolberg, G., Skeleton based Image Warping. Visual Computer, Vol. 5, No. 1/2, pp. 95-108, 1989.



이 주 형

- 1994년 포항공과대학교 전자계산학과 학사
- 1996년 포항공과대학교 전자계산학과 석사
- 1999년 포항공과대학교 전자계산학과 박사
- 1999년~현재 한국전자통신연구원 디지털 콘텐츠연구단 선임연구원

관심분야: Geometric modeling and processing for computer graphics, CAD, and robotics; Biology-inspired computing for aesthetic, scientific and engineering applications; Image synthesis and rendering for digital contents



박 형 준

- 1991년 포항공과대학교 산업공학과 학사
- 1993년 포항공과대학교 산업공학과 석사
- 1996년 포항공과대학교 산업공학과 박사
- 1996년~2001년 삼성전자 중앙연구소 객임연구원
- 2001년~현재 조선대학교 산업공학과 부교수

관심분야: Geometric Modeling and Processing, Virtual Prototyping of Engineered Products, 3D Shape Construction and Understanding, Reverse Engineering, CAD/CAM/CG Applications