PUBLICATIONS OF THE KOREAN ASTRONOMICAL SOCIETY
22: 103 ~ 111, 2007

확률적 중력파동 배경에 의한 약한 중력렌즈
WEAK GRAVITATIONAL LENSING BY STOCHASTIC GRAVITATIONAL WAVE BACKGROUND

송 두 종
한국천문연구원
DOO JONG SONG
[1]Korea Astronomy and Space Science Institute 61-1 Hwaam-dong, Yuseong-gu, Daejeon, 305-348, Korea
E-mail: djsong@kasi.re.kr
(Received November 20, 2007; Accepted December 5, 2007)

ABSTRACT

On the formulation frameworks of linearly perturbed spacetime and weak gravitational lensing(WGL) we studied the statistical properties of a bundle of light rays propagating through stochastic gravitational wave background(SGWB). For this we considered the SGWB as tensor perturbations of linearly perturbed Friedmann spacetime. Using the solution of null geodesic deviation equation(NGDE) we related the convergence, shear and rotation deformation spectra of WGL with the strain spectra of SGWB. Adopting the astrophysical and cosmological SGWB strain spectra which were already known we investigated the approximated spectral forms of convergence, shear and rotation of WGL.

Key words: Gravitational waves, stochastic gravitational wave backgrounds; Gravitational lens, weak lensing

1. 서론

중력파동은 시공간의 잔 물결로 빛의 속도로 전파되는 것으로 일반상대성이론의 자연스러운 결과로 존재한다. 우주 속의 다양한 샘에서 방출되는 중력파동(GW)은 우주 속에 널리 퍼져서 확률적 중력력파동 배경(SGWB)을 만들어낸다. SGWB의 샘은 물리학적 특성에 따라 우주론적인 것과 천체물리학적인 것으로 크게 나눌 수 있다. 우주론적 중력파는 초기 인플레이션 시기의 양자론적 흔들림에 의해 생겨난다는 것이 알려져 있고, (Kosowsky et al., 1992; Liddle & Lyth, 1992; Liddle & Lyth, 2000; Dodelson, 2003) 그 멱스펙트럼(power spectrum)은 척도-독립(scale-invariant)이다. 천체물리학적 중력파동의 샘은 매우 다양한데, 초신성 폭발, 근접 밀집성 쌍성계의 궤도운동과 합병과 같은 질량의 격렬한 시간적 변화에 따라 발생되는 것들이 있다. (MTW, 1973; Muller & Janka, 1997; Cutler & Thorne, 2002)

우주 속에 널리 퍼져있는 SGWB는 시공간의 약한 건드림으로 기술되어진다. 선형건드림이론에 따르면, SGWB가 만드는 시공간의 약한 건드림은 건드림된 프리이드만 시공간 속의 텐서 방식 건드림으로 기술할 수 있다. (Bardeen, 1980; Hwang, 1991; Noh & Hwang, 1995) 마지막 산란표면 혹은 먼 천체에서 나온 광자들은 관측지점까지 도달하는 동안, 선형 텐서 건드림으로 대표되는 SGWB의 영향을 받아서 에너지가 바뀌고 빛살의 경로가 쏠림을 받는다. (Panek, 1985; Pyne & Birkinshaw, 1993; Durrer, 1994; Linder, 1988a,b; Bar-Kana, 1996; Pyne et al., 1996; Kaiser & Jaffe, 1997; Mollerach, 1998; Jaffe, 2004) 이 논문에서는 SGWB가 빛살에 미치는 영향을, 약한 중력렌즈(WGL) 공식화 틀 안에서 다루고, WGL 영상의 변형을 특징짓는 수렴, 층밀리기 및 회전 성분의 스펙트럼을 SGWB의 특성 물리량으로 표현하는 것이 그 목적이다.

이 논문의 구성은 다음과 같다: 제2장에서 빛다발 속에 정의된 간격벡타의 진화를 선형 텐서 건드림된 프리이드만 시공간 속의 빛형측지선 벗어나기 방정식(NGDE)을 통해 기술하고, 선형화된 NGDE의 해를 통해 렌즈확대행렬과 광학적 조석힘 텐서를 연결시킨다. 제3장에서는 약한 중력렌즈 방정식을 도입하고, 제4장에서 SGWB의

특성 물리량을 이용하여 WGL 스펙트럼을 평가할 수 있는 공식을 살펴본다. 제5장에서는 GW 샘에 따른 SGWB 변형 스펙트럼을 도입하고, 제6장에서는 SGWB에 의한 WGL 스펙트럼의 꼴을 평가하고 결론을 보였다.

2. 빛형측지선 벗어나기 방정식

광자는 빛형측지선을 따라 움직이고, 이것이 빛살이다. 일반적 시공간에서 한 빛다발을 생각하면, 빛다발 속의 개개 빛살은 빛형측지선방정식(NGE)

$$\frac{D^2x^a}{d\lambda^2} = 0 \tag{1}$$

의 다스림을 받는다. 여기서 $x^a(\lambda)$는 빛형측지선을 나타내고 λ는 아핀맺음변수이다. 빛다발 속의 이웃하는 빛살과 빛살 사이의 간격벡타의 진화는 빛형측선 벗어나기방정식(NGDE)

$$\frac{D^2Y^a}{d\lambda^2} = -R^a{}_{bcd}k^bY^ck^d \tag{2}$$

의 다스림을 받는다. 여기서 Y^a는 간격벡타, $R^a{}_{bcd}$는 리이만텐서, 그리고 $k^a = \frac{dx^a}{d\lambda}$는 빛형측지선의 접선벡타이다. (MTW, 1973; Hawking & Ellis, 1973)

2.1. 광학적 조석힘 텐서

공간 속의 한 빛샘에서 나와 관측지점에 이르는 한 빛다발을 생각하고, 이 속에서 한 기준 빛살을 선택한다. 샘 또는 관측자의 4차원 속도를 u^a라 하면, 기준 빛살 속의 한 점 λ_q에서 빛형 접선벡타와 k^a와 4차원속도 u^a에 수직한 초곡면을 정의할 수 있다. 이 초곡면 상에서 정의된 간격벡타 Y^a는 점 λ_q에서 접선벡타와 4차원속도에 수직한 영이 아닌 간격벡타를 가진 영사막을 결정한다. (Hawking & Ellis, 1973; Schneider et al., 1992)

빛형측지선 조건에 맞도록 선택된 유사직교맞춤 기저를 영사막 위에 도입하면, 간격벡타를 $Y^a = e^a_m\xi^m + e^a_0\xi^0$처럼 분해할 수 있고, (Hawking & Ellis, 1973) 식 (2)의 NGDE는 2차원 영사막 위의 NGDE, 곧

$$\frac{d^2\xi^m}{d\lambda^2} = -T_{mn}\xi^n \tag{3}$$

처럼 쓰여질 수 있다. 여기서 T_{mn}은 광학적 조석힘텐서이고, 봐일텐서와 리치스칼라의 조합으로

$$T_{mn} = e^a_m R_{abcd}k^bk^de^c_n = W_{mn} + \frac{1}{2}\delta_{mn}R \tag{4}$$

와 같이 정의되었다. 여기서 $W_{mn} = e^a_m C_{abcd}k^bk^de^c_n$는 봐일초점맞추기 텐서이고, $R = R_{ab}k^ak^b$는 리치스칼라텐서이다. 선형 텐서 건드림으로 표현된 꼴의 식 (4)는 송두종(2004)에서 찾아볼 수 있다.

2.2. 렌즈확대행렬

선형 건드림된 시공간에서, 식 (3)에 주어진 NGDE의 해는, 간격벡타가 영이 되는 기준 빛살 위의 한 꼭지점(λ_q)에서 시작된 빛살이 임의의 지점에서 가지는, 2차원 영사막 위의 간격벡타

$$\xi_m(\lambda) = r(\lambda - \lambda_q)M_{mn}(\lambda - \lambda_q)\theta_n. \tag{5}$$

가 된다. 여기서 $r(\lambda - \lambda_q)$는 시공간의 고유거리이고, θ_n은 영사막 위의 각좌표를 정의한다. 나아가 $M_{mn}(\lambda - \lambda_q)$은 렌즈확대행렬이라 부르고, 광학적 조석힘 텐서의 빛형측지선을 따른 적분

$$M_{mn}(\lambda - \lambda_q) = \delta_{mn} + \int_{\lambda_q}^{\lambda} \frac{r(\lambda - \tau)r(\tau - \lambda_q)}{r(\lambda - \lambda_q)}\delta T_{mn}(\tau)d\tau \tag{6}$$

으로 정의된다. (Seitz et al., 1994; Tomita et al., 1999)

2.3. 텐서 건드림된 프리이드만 시공간 속의 광학적조석힘 텐서

우리의 목적에 맞게, 선형 텐서 건드림된 프리이드만 시공간을

$$ds^2 = a^2(\eta)[-d\eta^2 + (\gamma_{ij} + h_{ij}^{TT})dx^i dx^j] \tag{7}$$

과 같이 도입한다. 여기서 η는 한꼴 시간(conformal time), a는 우주의 크기인자, 그리고 h_{ij}^{TT}는 가로파동-흔적없음(transverse-traceless) 게이지($h_{jk}^{TT|j} = 0 = h_j^{TTj}$)가 선택된 텐서 건드림이다. (MTW, 1973)

곡률맺음변수가 영인 건드림된 프리이드만 시공간에서 리치스칼라 및 봐일텐서를 각각 계산하여 정리하면, 광학적 조석힘텐서의 건드림된 부분은

$$\delta T_{mn} = \frac{1}{2} e_m^i [-\frac{d^2}{dy^2} h_{ij}^{TT} + 2\frac{d}{dy} h_{ij}^{TT} - h_{kl|ij}^{TT} n_{(0)}^k n_{(0)}^l] e_n^j \tag{8}$$

과 같음이 알려져 있고, (송두종, 2004) 여기서 $n_{(0)}^k = k_{(0)}^k / k_{(0)}^0$로 정의된 건드림되지 않은 프리이드만 시공간의 틀맞춤된 접선벡타이고, $dy = k_{(0)}^0 d\lambda = d\eta$로 정의되었다.

3. 약한 중력렌즈

약한 중력렌즈(WGL)는 중력렌즈(GL) 중에서 야코비행렬이 단위행렬에 매우 근접한 것들이다. WGL은 그 쏠림 정도가 매우 작아서 개별적 빛샘보다는 그것들의 모듬을 이용한 통계적인 측정에 더 의미를 두고 있다. WGL 현상은, 야코비행렬의 성분을 이용하여 표현하면, 빛샘 영상의 수렴, 층밀리기 및 회전으로 나눌 수 있다. 이 중에서 최근에 층밀리기 현상을 관측을 통해 측정함으로써 우주 속의 암흑물질의 분포를 직접 측정할 수 있는 강력한 수단으로 많은 주목을 받고 있다.

영상의 위치를 나타내는 천구상의 건드림된 각좌표 β_m을 이용하여 영사막 위의 간격벡타를 $\xi_m(\lambda) = r(\lambda - \lambda_q)\beta_m$과 같이 정의하면, 영상과 샘의 위치를 나타내는 건드림되지 않은 각좌표 θ_n 사이를 맺어주는 렌즈방정식은, 식 (5)에서,

$$\beta_m = (\delta_{mn} + \delta M_{mn})\theta_n \tag{9}$$

처럼 정의된다. (Schneider et al., 1992) 편평한 프리이드만 시공간을 생각하면 렌즈확대행렬의 건드림된 부분, δM_{mn}은 식 (6)과 (8)을 이용하면, $\delta M_{mn}(x_s) = \int_0^{x_s} D_{(0)}(x_s, x)\delta T_{mn}(x)dx$처럼 쓰여지고. 여기서 $D_{(0)}(x_s, x) = x(x_s - x)/x_s$로 주어지고, $x(\eta) = \eta - \eta_o$이며, x_s는 샘의 위치를 나타낸다.

렌즈되는 광학 샘들의 거리분포를 $n(x_s)$라고 하면, 식 (6) 또는 식 (9)에 주어진 렌즈확대행렬의 건드림 부분을

$$\psi_{mn}(\mathbf{x}) = \int_0^\infty n(x_s)\delta M_{mn}(x_s, \mathbf{x})dx_s = \int_0^\infty \delta T_{mn}(x, \mathbf{x})G(x)dx. \tag{10}$$

처럼 다시 쓸 수 있다. 이것이 잘 알려진 WGL의 기본 공식이다. (Kaiser & Jaffe, 1997; Kaiser, 1998) 여기서 $G(x)$는

$$G(x) = \int_{x_s}^\infty n(x_s)(x - x^2/x_s)dx_s \tag{11}$$

로 정의되었고, 샘의 거리분포함수 $n(x_s)$는 $\int_0^\infty n(x_s) = 1$로 틀맞춤되었다. 점 빛샘인 경우, i.e. $n(x) = \delta(x - x_s)$이면, $G(x) = x - x^2/x_s$가 된다.

4. 확률적 중력파동배경에 의한 약한 중력렌즈

SGWB는 그 파동의 샘이 개별적으로 구분되지 않아 통계적으로만 다룰 수 있는 것이다. SGWB는 등방이며 정상이고 가우스분포한다고 생각한다. 이러한 가정에서 중력파동을 대표하는 텐서건드림은

$$h_{jk}^{TT}(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} df \int d\Omega h_\sigma(f, \hat{\mathbf{q}})\epsilon_{jk}^\sigma(\hat{\mathbf{q}})e^{i[2\pi f(\eta - \hat{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{x})]} \tag{12}$$

와 같이 전개되어 질 수 있다. 여기서 f는 중력파동의 진동수, $\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q}/q$는 중력파동의 진행 방향을 따른 단위벡타, $h_\sigma(f, \hat{\mathbf{q}})$는 중력파동의 진폭, $\epsilon^\sigma_{jk}(\hat{\mathbf{q}})$는 편극 텐서이고, $\sigma = +, \times$는 중력파동의 두 편극을 나타내고, $\hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \cos\theta = \mu$는 중력파동의 진행방향과 관측방향 사이의 각도를 나타낸다.

SGWB의 진폭 $h_\sigma(f, \hat{\mathbf{q}})$의 모듬 평균은 모든 진동수 f와 f'에 대해 관계식

$$< h_\sigma(f, \hat{\mathbf{q}}) h_{\sigma'}(f', \hat{\mathbf{q}}') >= \frac{1}{2} S_h(f) \delta(f - f') \frac{1}{4\pi} \delta(\hat{\mathbf{q}} - \hat{\mathbf{q}}') \delta_{\sigma\sigma'} \tag{13}$$

이 성립한다. 이것을 이용하면, SGWB의 특성 물리량들인 견줌 에너지밀도 $\Omega_{GW}(f)$, 변형 스펙트럼 $S_h(f)$, 특성 진폭 $h_c(f)$ 및 견줌 에너지다발 $F_f(f)$ 사이에 관계식

$$\rho_c c^2 \Omega_{GW}(f) = \frac{\pi c^2}{2G} f^3 (|h_+|^2 + |h_\times|^2) = \frac{\pi c^2}{2G} f^3 S_h(f) = \frac{\pi c^2}{4G} f^2 h_c^2(f) = \frac{1}{c} f F_f(f) \tag{14}$$

이 성립함이 잘 알려져 있다. (Allen, 1996; Maggiore, 2000)

4.1. SGWB에 의한 WGL 공식

선형 건드림된 프리이드만 시공간에서 얻어진 텐서 건드림 식 (12)를 광학적 조석힘 텐서 식 (7)에 대입하여 얻어진 식을 다시 WGL의 기본 공식 식 (10)에 대입하고 정리하면, SGWB에 의한 WGL 공식은

$$\begin{aligned}
\psi_{mn}(\mathbf{x}) &= \Gamma_\alpha(\mathbf{x}) H^\alpha_{mn}, \\
\Gamma_\alpha(\mathbf{x}) &= 2\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} df\ f^2 \int d\Omega h_\sigma(f, \hat{\mathbf{q}}) E^\sigma_\alpha(\hat{\mathbf{q}}) G[q(1-\mu)], \\
G[q(1-\mu)] &= \int_0^\infty dx G(x) e^{i[2\pi f \eta (1-\mu)]}
\end{aligned} \tag{15}$$

가 된다. 여기서 H^α_{mn}는 WGL의 변형을 특징짓는 행렬로 $\alpha = 0, 1, 2, 3$에 따라 각각

$$H^0_{mn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H^1_{mn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad H^2_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H^3_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

이고, Γ_α는, 행렬 H^α_{mn}의 결수로 변형의 종류에 따른 크기를 결정하는 것으로, 각각 Γ_0은 수렴(convergence), Γ_1과 Γ_2는 층밀리기(shear) 그리고 Γ_3은 회전(rotation) 변형의 크기를 나타낸다. 한편 E^σ_α는 중력파동의 편극, 중력파동의 진향방향 및 빛샘의 관측 방향에 따라 결정되는 양으로

$$\begin{aligned}
E^+_0(\hat{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2}(1-\mu)^2(1+\mu)(1-\cos 2\varphi), \\
E^+_1(\hat{\mathbf{q}}) &= -(1-\mu)^2 \cos 2\varphi = -E^\times_2(\hat{\mathbf{q}}), \\
E^+_2(\hat{\mathbf{q}}) &= -(1-\mu)^2 \sin 2\varphi = E^\times_1(\hat{\mathbf{q}}), \\
E^{+\times}_3(\hat{\mathbf{q}}) &= -(1-\mu)^2(1+\mu).
\end{aligned} \tag{17}$$

와 같이 표현된다.

4.2. WGL 스펙트럼

우리는 SGWB가 등방이고, 정상이고 가우스분포한다고 생각하였다. 이 바탕위에서, 식 (13)에 주어진, SGWB의 진폭 $h_\sigma(f, \hat{\mathbf{q}})$의 모듬 평균을 이용하면, SGWB에 의한 WGL 영상 변형의 물리량, 곧 수렴, 층밀리기 및 회전의 크기는 결수 $\Gamma_\alpha(\mathbf{x})$의 두점상관관계함수

$$< \Gamma_\alpha(\mathbf{x}) \Gamma_\beta(\mathbf{x}') >= \frac{\pi^3}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} df f^4 S_h(f) \int d\Omega E^\sigma_\alpha(\hat{\mathbf{q}}) E^\sigma_\beta(\hat{\mathbf{q}}) |G[q(1-\mu)]|^2 \tag{18}$$

을 통해서 평가할 수 있다. 여기서

$$
\begin{aligned}
|G[q(1-\mu)]|^2 &= A[q(1-\mu)]^2 + B[q(1-\mu)]^2, \\
A[q(1-\mu)] &= 1 + \int_0^\infty dx_s n(x_s) \cos\phi - \frac{2}{q(1-\mu)} \int_0^\infty dx_s \frac{n(x_s)}{x_s} \sin\phi, \\
B[q(1-\mu)] &= -\frac{2}{q(1-\mu)} \int_0^\infty dx_s \frac{n(x_s)}{x_s} \\
&\quad + \int_0^\infty dx_s n(x_s) \sin\phi + \frac{2}{q(1-\mu)} \int_0^\infty dx_s \frac{n(x_s)}{x_s} \cos\phi
\end{aligned}
\tag{19}
$$

으로 정의되었다.

식 (18)의 두점상관관계함수를 이용하여 WGL의 수렴, 층밀리기 및 회전 성분에 대한 분산을 각각 구할 수 있고, 그것을 다시 적어보면,

$$
<\Gamma_\alpha^2> = \int_{-\infty}^{+\infty} df f^4 S_h(f) \bar{\Psi}_\alpha(f) \tag{20}
$$

과 같다. 여기서 $\bar{\Psi}_\alpha(f)$는 각각

$$
\bar{\Psi}_0(f) = \frac{3}{128}\psi_0(f), \quad \bar{\Psi}_1(f) = \frac{1}{32}\psi_1(f), \quad \bar{\Psi}_3(f) = \frac{1}{16}\psi_3(f) \tag{21}
$$

와 같은 변형 성분을 가지고, $\psi_\alpha(f)$는 변형에 따른 성분

$$
\begin{aligned}
\psi_0(f) &= \int_{-1}^{+1} d\mu (1-\mu)^2 (1+\mu)^2 |G[q(1-\mu)]|^2, \\
\psi_1(f) &= \int_{-1}^{+1} d\mu |G[q(1-\mu)]|^2, \\
\psi_3(f) &= \int_{-1}^{+1} d\mu (1+\mu)^2 |G[q(1-\mu)]|^2
\end{aligned}
\tag{22}
$$

을 가진다. 분산값 식 (20)을 $<\Gamma_\alpha^2> = \int_{-\infty}^{+\infty} df \Delta_{\Gamma_\alpha}(f)$ 처럼 다시 써보면, SGWB에 의한 WGL의 스펙트럼을 정의할 수 있고, 그 공식은

$$
\Delta_{\Gamma_\alpha}(f) = S_h(f) \bar{\Psi}_\alpha(f) \tag{23}
$$

가 된다. 말하자면, 식 (23)은 WGL의 변형 스펙트럼 $\Delta_{\Gamma_\alpha}(f)$와 SGWB의 변형 스펙트럼 $S_h(f)$를 연결시켜주는 공식이다.

4.3. WGL 스펙트럼 어림

식 (23)에서 SGWB의 변형 스펙트럼과 이것에 기인한 WGL 변형 스펙트럼은 선형 관계에 있음을 볼 수 있다. 이제 그 결수 $\bar{\Psi}_\alpha(f)$의 어림을 살펴봄으로써 WGL 변형 스펙트럼의 어림을 알아보자. 이를 위해 먼저 식 (18)에 주어진 두점상관관계함수의 적분인자를 구성하는 성분 $|G[q(1-\mu)]|^2$의 어림을 계산한다. WGL의 빛샘 분포 $n(x_s)$가 반듯하다고 가정하고, 또 식 (19)에 주어진 $|G[q(1-\mu)]|^2$의 적분인자는 x_s가 무한한 경우 영이되고, 영이 되는 경우 유한한 값을 가진다고 가정한다. 그러면 식 (19)에 대한 다음과 같은 두 가지 어림을 생각할 수 있다:

(i) 매우 작은 값의 $q(1-\mu)x_s$에 대한 어림:

$$
|G[q(1-\mu)]|^2 \simeq 1 + \frac{1}{\pi^2 f^2}(1-\mu)^{-2}[\cdots]. \tag{24}
$$

(ii) 매우 큰 값의 $q(1-\mu)x_s$에 대한 어림:

$$
|G[q(1-\mu)]|^2 \simeq \frac{4\pi^4}{9} f^4 (1-\mu)^4 Q_2^2 [1 - \frac{6\pi^2}{5} f^2 (1-\mu)^2 (\frac{Q_4}{Q_2} - \frac{5}{6}\frac{Q_5^2}{Q_2^2} + \cdots)]. \tag{25}
$$

표 1. WGL 어림 스펙트럼

	$\Delta_{\Gamma_\alpha}(f)$: $q(1-\mu)x_s << 1$인 경우	$\Delta_{\Gamma_\alpha}(f)$: $q(1-\mu)x_s >> 1$인 경우
수렴	$\Delta_{\Gamma_0}(f) \simeq \frac{4\pi^4}{135} S_h(f) f^4 d_s^4$	$\Delta_{\Gamma_0}(f) \simeq \frac{1}{120} S_h(f)$
층밀리기	$\Delta_{\Gamma_1}(f) \simeq \frac{4\pi^4}{45} S_h(f) f^4 d_s^4$	$\Delta_{\Gamma_1}(f) \simeq \frac{1}{16} S_h(f)$
회전	$\Delta_{\Gamma_3}(f) \simeq \frac{4\pi^4}{135} S_h(f) f^4 d_s^4$	$\Delta_{\Gamma_3}(f) \simeq \frac{19}{24} S_h(f)$

여기서 $Q_n = \int_0^\infty x_s^n n(x_s) dx_s$로 정의되었고, 특히 $n = 2$인 경우를 $d_s^2 = Q_2$로 두어 샘까지 거리 x_s의 제곱 평균으로 정의하였다.

윗 어림 식 (24)와 (25)를 이용하면 식 (21)의 $\bar{\Psi}_\alpha(f)$를 상응하는 적분 식 (22)를 수행하여 계산할 수 있다. 그 결과를 정리하면, 먼저 수렴인 경우, 그 어림은

$$\begin{cases} \bar{\Psi}_0(f) \simeq \frac{16}{15}[1 + \frac{1}{\pi f}\int_{-1}^{+1} d\mu (1+\mu)(\cdots)], & q(1-\mu)x_s >> 1; \\ \bar{\Psi}_0(f) \simeq \frac{512\pi^4}{567} f^4 d_s^4 [1 - \frac{672}{275}(\pi f)^2 (\frac{Q_4}{d_s^2} - \frac{5}{6}\frac{Q_3^2}{d_s^4})], & q(1-\mu)x_s << 1 \end{cases} \tag{26}$$

와 같고, 층밀리기인 경우

$$\begin{cases} \bar{\Psi}_1(f) \simeq 2[1 + \frac{1}{2(\pi f)^2}\int_{-1}^{+1} d\mu (1-\mu)^{-2}(\cdots)], & q(1-\mu)x_s >> 1; \\ \bar{\Psi}_1(f) \simeq \frac{128\pi^4}{45} f^4 d_s^4 [1 - \frac{4}{3}(\pi f)^2 (\frac{Q_4}{d_s^2} - \frac{5}{6}\frac{Q_3^2}{d_s^4})], & q(1-\mu)x_s << 1 \end{cases} \tag{27}$$

이 되고, 회전인 경우

$$\begin{cases} \bar{\Psi}_3(f) \simeq \frac{38}{3}[1 + \frac{3}{38}\frac{1}{(\pi f)^2}\int_{-1}^{+1} d\mu (1+\mu)^2(1-\mu)^{-2}(\cdots)], & q(1-\mu)x_s >> 1; \\ \bar{\Psi}_3(f) \simeq \frac{64\pi^4}{135} f^4 d_s^4 [1 - \frac{16}{7}(\pi f)^2 (\frac{Q_4}{d_s^2} - \frac{5}{6}\frac{Q_3^2}{d_s^4})], & q(1-\mu)x_s << 1 \end{cases} \tag{28}$$

가 된다. 어림 관계식 식 (26) - (28)을 식 (23)에 대입하고 정리하면, SGWB에 의한 WGL 스펙트럼 어림을 얻어낼 수 있고, 그 결과를 표 1에 정리하였다.

표 1에서 볼 수 있는 것과 같이, WGL 변형 스펙트럼의 어림 꼴은 곁수의 차이는 있지만 변형의 종류와 무관하게 같은 형태를 하고 있다는 것을 알 수 있다. SGWB의 변형 스펙트럼 $S_h(f)$가 명확하게 결정되면, WGL의 스펙트럼을 평가할 수 있다.

어림 $q(1-\mu)x_s << 1$인 경우 나타나는 $(fd_s)^4$는 $\Delta_{\Gamma_\alpha}(f)$의 크기에 중대한 영향을 미친다. 어림 $q(1-\mu)x_s = 2\pi(1-\mu)(fx_s) << 1$이 만족되는 경우는 $(1-\mu) << 1$이 되거나 $(fx_s) << 1$이 될 때이다. 나중의 경우 곧 $cx_s/\lambda << 1$인 경우는 GW의 파장이 빛샘의 거리보다 매우 긴 경우로 $S_h(f)$에 의한 WGL 변형의 효과는 매우 작을 것이다. 그렇지만, 아주 특별한 경우, 곧 $\mu \sim 1$ 부근에서는 GW의 파장이 빛샘의 거리와 비교할 만한 경우 또는 보다 긴 경우에도 WGL에 그 효과를 미칠 것이다.

어림 $q(1-\mu)x_s = 2\pi(1-\mu)(fx_s) >> 1$이 만족되는 경우는, $0 < (1-\mu) < 1$임을 고려에 넣으면, $cx_s/\lambda >> 1$가 되어야함을 알 수 있고, 말하자면, GW의 파장이 빛샘의 거리보다 짧은 경우에 해당한다. 이 경우 SGWB에 의한 WGL의 변형 스펙트럼은, 곁수를 생각하지 않으면, 바로 SGWB의 변형스펙트럼이 된다.

4.4. WGL의 입체각 변형

WGL에서 빛샘의 입체각 변형은 바로 영상의 확대(또는 수렴), 층밀리기 및 회전으로 나누어지고, 수렴 스펙트럼은 입체각 변형량/각지름거리 흔들림의 스펙트럼을 제공한다. (Linder, 1988; Kaiser & Jaffe, 1997) 입체각 변형의 흔들림 $\Delta_\Omega(x)$는 렌즈확대행렬의 결정자, 곧 건드림된 영상 좌표 β_m과 건드림되지 않은 샘좌표 θ_n 사이의 야코비안을 계산하면 얻어지고, 렌즈방정식 식 (9)를 이용하여 계산하고 정리하면

$$\Delta_\Omega(x) = 2\Gamma_0(x) + [\Gamma_0^2(x) - \Gamma^2(x) + \Gamma_3^2(x)] \tag{29}$$

처럼 쓰여진다. 여기서 Γ_α는 식 (16)에서 정의된 것으로 각각 수렴(Γ_0), 층밀리기($\Gamma^2 = \Gamma_1^2 + \Gamma_2^2$) 및 회전($\Gamma_3$) 성분을 나타낸다.

식 (29)에서 볼 수 있는 것은, 선형 어림에서, 주어진 빛다발의 입체각 변형의 기대값은 바로 수렴 Γ_0의 기대값이 된다는 것이다. 그래서 입체각 변형 스펙트럼의 어림은, 식 (26) 또는 표 1의 어림을 이용하면,

$$\begin{cases} \Delta_\Omega(f) \simeq \frac{1}{30}S_h(f), & q(1-\mu)x_s >> 1; \\ \Delta_\Omega(f) \simeq \frac{16\pi^4}{135}S_h(f)f^4d_s^4, & q(1-\mu)x_s << 1 \end{cases} \tag{30}$$

과 같다.

5. GW 샘에 따른 SGWB 스펙트럼

식 (23)의 WGL 변형 스펙트럼 또는 표 1에 주어진 그 어림은 SGWB의 변형 스펙트럼 $S_h(f)$ 꼴을 알면 완성된다. SGWB는 많은 수의 분해되지 않는 샘에서 내쏘인 중력파동이 만들어내는 것으로 그 샘의 기원이 우주론적인 것과 천체물리학적인 것으로 다시 나눌 수 있다. 먼저 천체물리학적 SGWB를 생각하고, 그 GW 샘으로 주기적인 밀집성 쌍성계에 초점을 맞춘다. 회전-낙하하면서 합체하는 밀집성 쌍성계가 GW 샘인 경우, 변형 스펙트럼 $S_h(f)$를 평가할 수 있는 일반적인 공식은

$$S_h(f) = \frac{2G}{\pi c^2}f^{-3}\int_0^\infty dzN(z)\frac{1}{1+z}\left(f_r\frac{dE_{GW}}{df_r}\right)_{f_r=(1+z)f} \tag{31}$$

와 같다는 것은 잘 알려져 있다. (Phinney, 2001; Enoki et al., 2004) 여기서 $N(z)$는 적색이동 범위 $[z, z+dz]$ 안에 속하는 우주론적 GW 샘의 수밀도이고 $\left(f_r\frac{dE_{GW}}{df_r}\right)_{f_r=(1+z)f}$는 밀집성 쌍성계에서 GW로 방출되는 총에너지이다. f_r은 샘의 정지틀에서 GW 진동수 그리고 f는 관측되는 진동수로 둘 사이에는 적색이동 z를 매개로 $f_r = (1+z)f$처럼 맺어진다.

회전-낙하 단계에 있는 밀집성 쌍성계가 만들어내는 GW의 총에너지는, 밀집성 쌍성계의 GW 광도 $L_{GW}(f)$와 GW 방출의 시간눈금 τ_{GW}를 이용하면, 공식

$$\begin{aligned} f_r\frac{dE_{GW}}{df_r} &= \frac{1}{2}f_rL_{GW}(f_r)[\frac{1}{f_p}\tau_{GW}(f_p)]_{f_p=f_r/2} \\ &= \frac{1}{3}\frac{c^5}{G}\left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{5/3}(\pi f_r)^{2/3} \end{aligned} \tag{32}$$

에서 계산되고, (Enoki et al., (2004)) M_c는 밀집성 쌍성계의 동반성과 주성의 질량으로 정의되는 짹짹질량(chirp mass)이다.

밀집성 쌍성계가 제공하는 SGWB의 변형 스펙트럼 $S_h(f)$는, 적색이동 범위 $[z, z+dz]$ 안에 속하는 GW 샘의 수밀도 $N(z)$를 알면 계산할 수 있다. 식 (29)를 식 (28)에 대입하고 Phinney(2001)에 따라 계산하면, $S_h(f)$는

$$S_h(f) = \frac{2}{3}\frac{1}{\pi^{1/3}c^2}N_0 < (1+z)^{-1/3} > M_c^{5/3}f^{-7/3} \tag{33}$$

가 됨을 알 수 있다. 여기서 $< (1+z)^{-1/3} >= N_0^{-1}\int_0^{z_{\max}} dzN(z)(1+z)^{-1/3}$로 정의되었고, $N_0 = \int_0^\infty dzN(z)$는 현재의 밀집성 쌍성계의 공변 수밀도이다. Phinney(2001)에 따르면, 보통 $< (1+z)^{-1/3} >$의 값은 세세한 $N(z)$의 값에 크게 영향을 받지않고, 그 값은 0.74에서 0.8 정도가 된다. 그 결과 얻어지는 변형 스펙트럼은, GW의 진동수와 짹짹 질량 M_c의 함수로 써보면,

$$S_h(f, M_c) \sim M_c^{5/3}f^{-7/3} \tag{34}$$

과 같이 어림할 수 있다.

다음에 우주론적 SGWB를 살펴본다. 초기우주의 초팽창 기간 동안의 양자흔들림의 결과로 중력파동은 생겨난다는 것이 알려져 있다. (Liddle & Lyth, 2000) 이렇게 생성된, 시공간의 텐서 건드림인 GW의 스펙트럼은 멱법칙 특성을 가지고 있고, (Liddle & Lyth, 1992; Dodelson, 2003) 그 진동수 영역은 극히 낮은 떨기수로서 10^{-15}에서

표 2. 밀집성 쌍성계 GW 샘에 의한 WGL 어림 스펙트럼

	$\Delta_{\Gamma_\alpha}(f)$: $q(1-\mu)x_s >> 1$인 경우
수렴	$\Delta_{\Gamma_0}(f) \sim \frac{1}{120} M_c^{5/3} f^{-7/3}$
층밀리기	$\Delta_{\Gamma_1}(f) \sim \frac{1}{16} M_c^{5/3} f^{-7/3}$
회전	$\Delta_{\Gamma_3}(f) \sim \frac{19}{24} M_c^{5/3} f^{-7/3}$

표 3. 우주론적 GW 샘에 의한 WGL 어림 스펙트럼

	$\Delta_{\Gamma_\alpha}(f)$: $q(1-\mu)x_s << 1$인 경우	$\Delta_{\Gamma_\alpha}(f)$: $q(1-\mu)x_s >> 1$인 경우
수렴	$\Delta_{\Gamma_0}(f) \sim \frac{4\pi^4}{135} f^{n_T+1} d_s^4$	$\Delta_{\Gamma_0}(f) \sim \frac{1}{120} f^{n_T-3}$
층밀리기	$\Delta_{\Gamma_1}(f) \sim \frac{4\pi^4}{45} f^{n_T+1} d_s^4$	$\Delta_{\Gamma_1}(f) \sim \frac{1}{16} f^{n_T-3}$
회전	$\Delta_{\Gamma_3}(f) \sim \frac{4\pi^4}{135} f^{n_T+1} d_s^4$	$\Delta_{\Gamma_3}(f) \sim \frac{19}{24} f^{n_T-3}$

10^{-18} Hz에 속한다. 널리 유행하고 있는 느린-구르기(slow-roll) 초팽창(inflation)에 따르면, SGWB 변형 스펙트럼의 꼴은

$$\begin{cases} S_h(f) \sim f^{n_T-3}, & f >> f_{eq}; \\ S_h(f) \sim f^{n_T-5}, & f << f_{eq}. \end{cases} \tag{35}$$

와 같고, (Turner, 1996; Liddle & Lyth, 2000; Smith et al., 2005) 여기서 $f_{eq} \simeq 10^{-16}\Omega_0 h^2 Hz$는 질량-복사 동등 시기에 지평선 안으로 들어오는 건드림된 지역의 척도(scale)에 해당한다.

6. WGL 스펙트럼 어림 평가 및 결론

SGWB에 의한 WGL의 스펙트럼 어림은, 식 (34)와 (35)에 주어진 천체물리학 및 우주론적 SGWB 스펙트럼의 어림 꼴을 표 1에 주어진 식 (23)의 어림 스펙트럼에 넣고 정리하면, 평가할 수 있다. 먼저 천체물리학적 SGWB에 의한 어림을 생각하자. 밀집성 쌍성계가 GW 샘인 천체물리학적 SGWB인 경우, 합체하는 밀집성 쌍성계가 기여하는 SGWB의 GW 진동수 범위는, 밀집성 쌍성계의 종류에 따라 다르지만, 10^{-5} Hz에서 10^{-1} Hz 안에 속하는 것으로 알려져 있다. (Farmer & Phinney, 2003) 이 진동수 범위에 속하는 GW의 파장은 짧아서 표 1의 한계 $q(1-\mu)x_s >> 1$에 속하는 것으로 판단된다. 따라서 상응하는 WGL 변형의 스펙트럼 어림은, 식 (23)과 표 1을 이용하고 식 (34)를 대입하여 계산하면, 표 2에 주어진 것과 같다.

표 2에 실린 이 어림은 SGWB와 마찬가지로 WGL의 변형 스펙트럼이, 천체물리학적 GW 샘인 경우, 밀집성 쌍성계의 짝짝질량 M_c와 그가 방출하는 GW의 진동수의 스펙트럼 꼴을 가짐을 보여준다.

이론적으로 우주론적 SGWB는 모든 진동수 범위에서 가능하다. 지평선 안쪽에 해당하는 SGWB 만을 대상으로 하면, 곧 진동수 범위 $f > f_{eq}$에서 SGWB 변형 스펙트럼의 어림은 식 (35)에서 볼 수 있는 것과 같이, $S_h(f) \sim f^{n_T-3}$이 되고, 여기에 상응하는 WGL 변형 스펙트럼의 어림은, 식 (23)과 표 1을 이용하여 평가하면, 표 3과 같다.

표 3에 실린 범위 $q(1-\mu)x_s << 1$에 대한 어림에서, $fd_s << 1$을 만족시키면, SGWB에 의한 WGL 변형은 무시할 수 있을 정도로 작다는 것을 다시 확인할 수 있고, μ가 1에 접근하는 특별한 경우, SGWB가 WGL의 변형에 상당한 영향을 미칠 것으로 추정할 수 있다. 범위 $q(1-\mu)x_s >> 1$에 속한 어림에서, WGL 변형은 SGWB의 변형에 선형적으로 응답하고 있음을 볼 수 있다. 덧붙여, 식 (30)에 주어진 입체각 변형 스펙트럼의 어림 공식은, 원칙적으로 WGL 변형의 하나에 속하므로, SGWB에 의한 WGL의 어림 스펙트럼으로 설명이 됨을 알 수 있다.

지금까지 살펴본 것을 요약하면, SGWB를 선형 건드림된 프리이드만 시공간의 텐서 건드림으로 생각하면, NGDE의 해를 통하여 WGL 영상의 변형을 특징 짓는 수렴, 층밀리기 및 회전 성분의 스펙트럼을 SGWB의 특성 물리량인 변형 스펙트럼 $S_h(f)$로 나타낼 수 있었다. 선형 어림에서 빛다발의 입체각 변형은 곧 WGL의 수렴 변형이 되었다. 천체물리학적 및 우주론적 GW 샘이 만들어내는 SGWB의 변형 스펙트럼을 도입하여 WGL의 수렴,

층밀리기 및 회전에 대한 어림 스펙트럼 꼴을 이끌어내었다. 특히 회전-낙하하는 밀집성 쌍성계의 경우, 스펙트럼이 GW 진동수와 짹짹질량의 멱함수로 주어짐을 보였다.

ACKNOWLEDGMENT

본 연구는 한국천문연구원 기본연구비 지원을 통해 수행된 결과입니다.

참고문헌

송두종, 2004, 건드림된 프리이드만 시공간 속의 각지름 거리: 중력파의 효과, PKAS, 19, 1
Allen, B., 1996, The stochastic gravity-wave background: sources and detection, gr-qc/9604033
Bardeen, J. M., 1980, Gauge-invariant cosmological perturbations, PRD, 22, 1882
Bar-kana, M. S., 1996, Limits on a stochastic background of gravitational waves from gravitational lensing, PRD, 54, 7138
Cutler, C. & Thorne, K. S., 2002, An Overview of Gravitational-Wave Sources, gr-qc/0204090
Dodelson, S., 2003, *Modern Cosmology*, Academic Press
Durrer, 1994, Light deflection in perturbed Friedmann universes, PRL, 72, 3301
Enoki, M., Inoue, K. T., Nagashima, M. & Sugiyama, N., 2004, Gravitational Waves from Supermassive Black Hole Coalescence in a Hierarchical Galaxy Formation Model, astro-ph/0404389
Farmer, A. J. & Phinney, E. S., 2003, The Gravitational Wave Background from Cosmological Compact Binaries, astro-ph/0304393
Hawking, S. W. & Ellis, G. F. R., 1973, *The Large Scale Structure of Spacetime*, Cambridge University Press
Hwang, J.-C., 1991, Perturbations of the Robertson-Walker space - Multicomponent sources and generalized gravity, ApJ, 375, 443
Jaffe, A. H., 2004, Observing Gravitational Radiation with QSO Proper Motions and the SKA, astro-ph/0409637
Kaiser, N., 1998, Weak Lensing and Cosmology, ApJ, 498, 26
Kaiser, N. & Jaffe, A., 1997, Bending of Light by Gravity Waves, ApJ, 484, 545
Kosowsky, A., Turner, M. S., & Watkins, R., 1992, Gravitational waves from first-order cosmological phase transitions, PRL, 69, 2026
Liddle, A. L. & Lyth, D. H., 1992, COBE, gravitational waves, inflation and extended inflation, Phys. Lett. B, 291, 391
Liddle, A. L. & Lyth, D. H., 2000, *Cosmological Inflation and Large Scale Structure*, Cambridge
Linder, E. V., 1988a, Early universe constraints from gravitational waves, A&A, 204, L11
Linder, E. V., 1988b, Clustering correlations and limits on cosmological gravitational waves, ApJ, 328, 77
Maggiore, M., 200, Gravitational Wave Experiments and Early Universe Cosmology, gr-qc/9909001
Mollerach, S., 1998, Gravitational lensing on the cosmic microwave background by gravity waves, PRD, 57, 1303
MTW: Misner, C. W., Thorne, K. S. & Wheeler, J. A., 1973, *Gravitation*, Freeman, San Francisco
Muller, E. & Janka, H.-T., 1997, Gravitational radiation from convective instabilities in Type II supernova explosions, A&A, 317, 140
Noh, H. & Hwang, J.-C., 1995, Perturbations of an anisotropic spacetime: Formulation, PRD, 52, 1970
Panek, M., 1986, Large-scale microwave background fluctuations: Gauge-invariant formalism, PRD, 34, 416
Phinney, E. S., 2001, A Practical Theorem on Gravitational Wave Backgrounds , astro-ph/0108028
Pyne, T. & Birkinshaw, M., 1993, Null Geodesics in Perturbed Spacetimes, ApJ, 415, 459
Schneider, P., Ehlers, J, & Falco, E. E., 1992, *Gravitational Lenses*, Springer-Verlag, Berlin
Seitz, S., Schneider, P., & Ehlers, 1994, Light propagation in arbitrary spacetimes and the gravitational lens approximation, Class. Quant. Grav., 11, 2345
Smith, T., Kamiokowski, M. & Cooray, A., 2005, Direct detection of the inflationary gravitational wave background, astro-ph/0506422
Tomita, K., Asada, H. & Hamana, T., 1999, Distances in Inhomogeneous Cosmological Models, Prog. Theo. Phys. Suppl., 133, 155
Turner, M. S., 1996, Detectability of inflation-produced gravitational waves, astro-ph/9607066