대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 17 권 제 4 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 17, No. 4, 359-380. Nov 2007

초등학교 6학년 학생의 비례 추론[1] 능력 분석 : 2명의 사례 연구

고 은 성* · 이 경 화**

본 연구는 초등학교 6학년 학생들을 대상으로 이들의 비례 추론 능력은 어떠한지, 다양한 상황에서 비례적 사고의 발현은 어떠한지, 이들의 비례적 사고에 영향을 미치는 요소는 무엇인지에 대해 알아보았다. 연구결과 선행연구에서 지적했듯이 도구적 이해에 의해 습득된 비례식은 형식적 알고리즘으로써 문제의 답을 구하는데 유용할 수 있지만 학생들의 비와 비례 개념 형성과 비례 추론 능력 향상을 위한 풍부한 학습 기회를 제공하지는 못했다. 학생들은 기존에 학습한 수학적 지식들, 특히 약수와 배수, 분수, 분수의 연산 등과 비례 상황을 통합할 때 비례 문제에 대한 해결 능력이 뛰어났으며, 부족한 수감각이나 연산감각 등은 비례적 사고를 어렵게 하였다. 그리고 수학이나 다른 교과목에서 경험한 문제 상황에서 비례적 사고를 어렵지 않게 할 수 있었으나, 친숙하지 않은 상황에서는 전혀 비례 상황을 인식하지 못하였다.

Ⅰ. 서 론

비례 추론은 학생들이 어려워하는 수학적 추론의 하나로 초등 수학의 절정이며 상위 수학의 학습을 위한 초석이 된다(Nabors, 2003). 특히 비례는 기하(Freudenthal, 1978), 대수(김성준, 2004; Lesh, Post, & Behr, 1988), 확률과 통계(Watson, 2006)등 다른 학습 요소들과 강한 연결성을 지니고 있어 중요한 학습 요소로 평가받고 있다.

그 동안 학생들의 비례적 사고와 관련하여 학생들의 비례 추론 능력이 어떻게 발달하는지(이종욱, 2006; Ben-Chaim, Fey, Fttzgerald., Benedetto, & Miller, 1998; Nabors, 2003; Singh, 2000), 학생들의 비례 추론 능력을 어떻게 평가하고 향상시킬 것인지(장혜원, 2003; 정은실, 2003a, 2003b; Clark, Berenson, & Cavey, 2003; Misailidou, & Williams, 2003; Nabors, 2003; Thompson, Austin, & Beckmann, 2002; Weinberg, 2002)에 대한 논의가 이루어져 왔다.

7차 교육과정에서 비와 비례는 6-가 단계의 '비와 비율' 단원과 '비례식' 단원에서 다룬다. 정은실(2003b)은 교과서 분석을 통하여, 비 개념에 대한 사고 교육보다는 비 그 자체의 외형적 표현과 기계적 알고리즘에 치우쳐 있어 학생들이 계산을 능숙하게 할 수 있다 해도 그 개념의 진정한 의미를 제대로 파악한다고 보기는 어렵다고 주장하였다. Behr, Harel, Post와 Lesh(1992) 역시 비례 문제를 해결하기 위해 비

* 한국교원대학교 대학원, kes-7402@hanmail.net
** 한국교원대학교, khmath@knue.ac.kr
1) 비례 추론은 양적 관계를 파악하여 그 양을 비교하게 하는 일종의 사고 방법(정은실, 2003a)으로 본 논문에서는 이를 비례적 사고와 구별하여 사용하지 않는다.

례식을 사용하는 학생들이 반드시 비례적 사고를 하고 있는 것은 아니며, 오히려 A/B=C/D 형태의 비례식은 대각선 곱과 같은 알고리즘을 이용하여 해결 가능하기 때문에 비례적 사고를 하지 않아도 된다고 주장하였다.

본 연구는 비례적 사고를 요구하는 다양한 상황과 다양한 형태의 문제를 이용하여 임상면담을 실시함으로써 초등학교 6학년 학생들의 비례적 사고를 분석하고자 한다. 학생들의 비례 추론 능력은 어떠한지, 다양한 문제 상황에서 비례적 사고가 발현되는지를 알아보고 이를 통하여 교육적 시사점을 얻고자 한다.

II. 이론적 배경

1. 비와 비례

비 개념은 비례적 추론의 바탕이 되는 것(정은실, 2003a)으로 비와 비례에 대해 살펴보면 다음과 같다. Freudenthal(1978)은 비에 앞서 비의 동치 또는 비의 보존에 대한 인식이 우선한다고 하였다. 이것은 '동일한 정도로 무거운', '동일한 정도로 긴' 상황을 인식하는 능력이 ' 무게'와 '길이' 개념에 앞서는 원리와 같은 것이다. 비의 보존은 아동의 발달초기과정에서 일어나는 것으로 비례적 사고를 위해 가장 기초적인 것이다. Freudenthal은 비례 추론을 위한 단계를 다음과 같이 제시하고 있다. 우선 두 대상 사이의 비의 보존 여부를 확인하고, 비가 보존되는 사상을 구성한다. 그리고 비 보존을 위한 기준을 조절하여 이를 형식화 한다. 이때 길이, 면적, 부피 등과 같이 기존의 양을 2배, 3배하면 그 결과도 2배, 3배로 변하는 성질을 외연적(extensive)이라 하고, 온도, 색깔, 농도 등과 같이 기존의 양을 2배, 3배 하여도 그 결과가 2배, 3배로 되는 것에는 영향을 미치지 않는 성질을 내포적(intensive)이라 하였다. 예를 들면 두 개의 비이커에 20℃의 물 100g이 들어 있는데 이를 섞으면 물의 양은 200g이 되어 2배가 되는 반면 물의 온도는 40℃로 2배가 되는 것이 아니라 그대로 20℃를 유지한다.

Freudenthal(1983)은 비의 속성도 둘로 구분하여 설명한다. 하나는 내적비로 예를 들어, 등속운동에서 움직인 시간이 1배, 2배, 3배, … 증가할 때마다 그에 대한 이동 거리도 1배, 2배, 3배, … 로 증가한다는 사실에 주목하여 비를 설명하는 것이다. 다른 하나는 외적비로 역시 등속 운동의 예에서 생각할 때, 시간에 대한 이동거리의 비를 의미한다. 따라서 내적비는 수가 되고 외적비는 또 다른 양이 되는데 등속운동의 경우 외적비는 속도가 된다. 내적비는 동일한 체계 내에서의 비이며 한 체계(시간) 내에서의 비가 다른 체계(거리) 내에서의 대응되는 비와 일치하는 것으로 이것을 '내적비의 불변성'이라 한다. 외적비는 서로 다른 체계 사이의 비로 항상 일정한데 이것을 '외적비의 일정성'이라 한다. 내적비의 불변성은 외적비의 일정성과 동치인데 이는 사상의 선형성을 의미하는 것으로 이후 선형 함수 개념의 기초가 된다. 내적비의 불변성에 의해 등속운동은 $s_1 : s_2 = t_1 : t_2$ 로, 외적비의 일정성에 의해 $s_1 : t_1 = s_2 : t_2$로 표현된다. 이와 같이 내적비의 불변성과 외적비의 일정성에 대해 인식한 후, 비례식으로 그 상황을 표현할 수 있으며 두 형태의 비례식이 동일하다는 것도 파악할 수 있다.

2. 비례 추론 능력의 발달

이종욱(2006)과 Singh(2000)는 비와 비례에 대한 형식적인 교육이 이루어지기 전의 학생을 대상으로 비와 비례 개념이 어떻게 발달하고

구체화되는지를 연구하였다. 이들 연구에 따르면 학생들은 문제를 해결하는 과정에서 과제 상황, 과제에서 주어진 수, 비의 유형에 따라 다양한 전략을 구성하고, 기존에 습득한 곱셈과 나눗셈, 분수, 분수의 연산, 약수와 배수 등의 개념들과 상호관련성을 맺으면서 비와 비례 개념을 상보적으로 발달시킨다(이종욱, 2006). 그리고 상황에 맞는 다양한 전략의 경험을 통하여 비례 추론에서의 곱셈적 사고에 대한 통찰을 이루고 자신의 방법을 스스로 스키마화할 수 있으며, 문제를 해결하기 위해 수행한 절차나 추론에 수학적 의미를 부여하고 이를 내면화함으로써 다른 비례 문제 상황까지 일반화할 수 있게 된다(Singh, 2000).

3. 비례 추론의 수준

Nabors(2003)는 Kaput과 West의 연구, 그리고 Tourniaire와 Pulos의 연구를 토대로 비례 추론의 능력을 4수준으로 구분하였다. 제1수준은 공통적 구성 접근(coordinated build-up/down approach), 제2수준은 압축적 구성 접근(abbreviated build-up/down approach), 제3수준은 단위인수 접근(unit factor approach), 제4수준은 형식적 방정식을 이용한 접근(formal equation approach)이다. 1수준에서는 비가 보존되는 두 대상을 인식하고 유의미한 대응을 이끌어낸 후 합성단위를 반복적으로 더하는 방식으로 두 개의 합성단위를 함께 조절할 수 있어야 하며, 2수준에서는 곱셈적 사고를 통하여 두 개의 합성단위를 함께 조절할 수 있거나 부분-전체 관계와 전체-부분 관계를 이용할 수 있는 분수 개념을 이용할 수 있어야 한다. 3수준에서는 단위인수를 결정하기 위해 어떤 양의 단위를 제수, 어떤 양의 단위를 피제수로 사용할 것인지 정할 수 있어야 하며, 몫을 얻기 위한 나눗셈이 아니라 분할을 위한 나눗셈을 사용할 수 있어야 한다. 4수준에서는 내적비 또는 외적비를 이용하여 비례식을 세울 수 있어야 한다. 예를 들어 그 의미를 살펴보자.

> 빵을 만드는 과정에서 반죽의 적절한 조건은 밀가루 5컵과 물 2컵을 섞는 것이라고 한다. 밀가루를 40컵 사용한다면 물이 몇 컵 필요하겠는가?

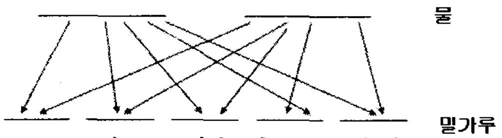
위의 문제를 해결하는 과정에서 학생들의 비례 추론 수준을 다음과 같이 구분할 수 있다. 1수준의 학생들은 문제 상황에서 두 개의 서로 다른 대상인 밀가루와 물을 확인하고, 전체적인 상황을 인식하여 의미 있는 대응에 해당하는 '밀가루 5컵에 물 2컵'이라는 표현을 구성한다. 그리고 40에 도달할 때까지 10과 4, 15와 6, ..., 40과 16을 만들어 내고, 40에 대응하는 16을 답으로 택한다. 이 수준의 학생들은 두 개의 구성단위(composite unit) 5와 2를 함께 조절할 수 있다.

2수준의 학생들은 구성단위인 5가 더 큰 구성단위로 바뀔 수 있다는 것을 인식하기 때문에 40을 8개의 5로 이루어졌다고 보고 구성단위 2로 구성단위 16을 얻는다. 이러한 사고는 기본적으로 곱셈적이므로 1수준에서 구성단위를 반복적으로 합하는 것보다 더 높은 수준이다. 그리고 2수준의 학생들은 부분-전체 관계와 전체-부분 관계를 이용할 수 있다. 다음의 예를 살펴보자.

15 30 45 60 ... 70
12 24 36 48 ... (?)

2수준의 학생들은 위의 문제에 대해서도 15와 12에 대응되는 구성단위 5와 4를 구한 후 이를 70과 미지의 수에 대응시켜 70을 5로 나눈 값에 4를 곱하는 방법으로 해결한다. 이 과정에서 부분-전체 관계와 전체-부분 관계를 이용할 수 있다.

3수준의 학생들은 단위인수(unit factor)를 구성하고, 몫을 얻기 위한 나눗셈이 아니라 분할을 위한 나눗셈을 사용한다. 밀가루 5컵을 물 2컵에 대응시킨 후 이 비를 보존하면서 밀가루 40컵에 대응하는 물의 양을 정해야 하기 때문에 밀가루 1컵에 대응하는 물의 양이 얼마인지를 구해야 한다. 그래서 물 2컵을 각각 5부분으로 동등하게 나누어 분배하고 물 2/5컵에 대응하는 밀가루 1컵을 구하게 된다. 물과 밀가루의 비인 2/5가 유지되도록 하면서 밀가루 40컵에 대한 물의 양을 구하기 위해 40을 곱한다. 이것은 다음 [그림 Ⅱ-1]과 같이 표현될 수 있다. 이러한 사고는 이후 선형 함수의 학습과 가장 밀접한 관계가 있는 것으로 비(rate)의 개념이 중요한 역할을 하게 된다.



[그림 Ⅱ-1] 밀가루와 물의 분배 상황

4수준의 학생들은 비례식을 사용하기 시작하는데, 같은 체계 내에서의 비교인 내적비와 다른 체계 내에서의 비교인 외적비를 이용하여 비례식을 만들 수 있다. 따라서 이 수준의 학생들은 단순히 알고리즘을 이용하여 문제를 해결하는 것이 아니라 동치분수에 대한 이해를 비의 개념과 통합하여 비례식의 원리를 이해할 수 있어야 한다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 참여자

본 연구는 2명의 초등학교 6학년 학생을 대상으로 한 사례연구이다. 2명의 학생은 청주시에 소재한 초등학교에 다니고 있으며 1명은 남학생(민수)이고 1명은 여학생(진희)으로 연구에 참여하는 당시 6-가의 '비와 비율' 및 '비례식' 단원을 학습한 상태였다. 두 학생 모두 자신의 생각을 언어로 표현하는데 적극적이었다. 민수는 전교과 성적이 상위권에, 진희는 중상위권에 속한다.

2. 자료 수집 및 분석

이 연구는 비와 비례에 대한 학습이 이루어진 후의 학생들의 비례적 사고를 조사할 목적으로 임상 면담법을 실시하였다(Ginsburg, 1997). 면담은 개별적으로 이루어졌으며 2명의 학생에게 매 회마다 약 30분씩 총 4회 실시되었다. 학습자의 수학적 지식과 이해 정도는 문제를 해결하는 과정에서 나타날 수 있으므로, 면담은 학생이 먼저 문제를 해결한 후 학생의 문제 해결 방법을 매개로 하여 이루어졌다(Singh, 2000에서 재인용). 학생이 문제를 해결하는 동안 연구자는 계속적으로 학생의 문제해결 과정을 관찰하면서 사전에 준비한 면담을 위한 질문의 적정성을 확인하거나 일부 수정하였다. 모든 면담은 오디오로 녹음하였으며, 각 면담을 마친 후 학생의 활동지, 연구자의 필드노트, 전사 자료를 이용하여 예비 분석을 하고 이를 다음 면담을 위한 기초자료로 활용하였다(Ginsburg, 1997). 최종 면담이 끝난 후 모든 자료를 다시 면담의 순서에 따라 또는 문제의 유형별로 나누어 면밀히 재분석한 후 활동지 내용과 면담의 내용 중 학생의 사고가 잘 드러나는 부분을 중심으로 분석 결과를 정리하였다(Greeno, 1978).

3. 면담

매 회마다 학생이 먼저 6문제를 해결하고 학

생의 문제 해결과정을 매개로 면담이 이루어졌다. 학생의 사고에 대한 정확한 이해가 필요할 경우 추가적인 문제를 제시하기도 하였다 (Ginsburg, 19 97). 면담에 사용한 문제는 부록에 제시하였으며, 각 차시별 면담 내용 및 목적은 <표 Ⅲ-1>과 같다.

1차면담을 위해 선정한 문제는 비례적 추론 능력을 알아보기 위한 것으로 선행연구(이종욱, 2006; Singh, 2000)에서 비와 비례 개념에 대한 조사를 위해 사용한 것을 수정하여 완성하였다. 1차면담에서 문제를 해결하는 동안 두 학생 모두 내적비와 외적비 중 하나에만 초점을 두어 문제를 해결하는 경향이 관찰되었다. 즉 민수의 경우 등속운동을 예로 들면 항상 외적비를 이용한 $s_1 : t_1 = s_2 : t_2$ 형태의 구조에 초점을 두고 문제를 해결하였으며 이러한 형태의 비례식만이 올바른 식이라고 하였다. 그리고 진희의 경우 항상 내적비를 이용한 $s_1 : s_2 = t_1 : t_2$ 형태의 구조에 초점을 두고 문제를 해결하였으며 이 형태의 비례식만이 올바른 식이라고 하였다. 이러한 경향이 1차면담에서 사용한 문제의 구조 때문에 나타난 현상인지 알아보기 위해 1차면담에서 사용한 과제의 구조를 변형하여 2차면담을 실시하였다. 즉 1차면담에서의 문제 "영희는 밀가루 6컵으로 빵 14개를 만들었다. 철수가 밀가루 12컵을 가지고 있다면 몇 개의 빵을 만들 수 있는가?"를 2차면담에서 상황과 수는 그대로 유지하고 문제의 구조만 변형하여 "영희와 철수는 각각 밀가루를 6컵, 12컵 가지고 있다. 영희가 빵을 14개 만들었다면, 철수는 몇 개의 빵을 만들 수 있겠는가?"로 재구성하였다.

3차면담에서 사용한 문제는 도형을 이용한 문제로 비례적 사고가 다른 문제 상황으로 전이되는지, 문제 해결 과정에서 다른 비례적 사고 특징이 나타나는지 알아보고자 선행연구(이종욱, 2006; Singh, 2000)에서 사용한 문항을 검토하여 구성하였다. 4차면담에서는 좀더 다양한 문제 형태와 상황에서 비례적 사고를 알아보기 위해, 4개의 값이 모두 주어져 비례식을 사용할 수 없을 것이라 기대되는 비례 문제로 구성하였으며, 내포적 성질을 이용한 문제를 포함하였다. 이 문제들은 영국 SMP 교과서(The School Mathematics Project, 2003a)의 '비(ratio)' 단원에서 비를 도입할 때 전형적으로 이용되고 있는 상황으로 색의 밝기와 용액의 농도를 소재로 한 것이다.

Ⅳ. 연구 결과 및 분석

두 학생의 비례 추론 능력을 알아보기 위해 1-2차면담을 구성하였으나 3-4차면담에서 이전

<표 Ⅲ-1> 면담의 내용 및 목적

구분	면담 내용	면담 목적
1차	3개의 값이 주어지고 하나의 미지의 값을 구하는 문장제 비례 문제로, 선행연구에서 문제를 선별함	비례 추론 능력 조사
2차	3개의 값이 주어지고 하나의 미지의 값을 구하는 문장제 비례 문제로, 1차면담에서 제시한 문항을 재구성함	
3차	도형 문제 상황으로 3개의 값이 주어지고 하나의 미지의 값을 구하는 비례 문제	다양한 문제 상황에서 비례적 사고의 발현에 대한 조사
4차	4개의 값이 모두 주어진 형태의 비례 문제로 색의 밝기, 용액의 농도 등 내포적 성질을 소재로 한 문제 상황	

까지 보이지 않았던 새로운 사고 특성이 관찰되어 1-4차에 걸친 모든 면담 내용과 학생들의 활동지 내용을 Nabors(2003)가 제시하고 있는 비례 추론의 수준에 비추어 분석하였다. 비례적 사고의 발현에 대해 알아보기 위해서는 3차면담의 도형 문제에서 비례를 인식하는지, 4차면담의 내포적 성질을 소재로 한 문제 상황에서 비례를 인식하는지에 등에 초점을 두어 분석을 하였다. 그리고 이 외에도 어떠한 요소들이 학생들의 비례적 사고, 즉 비례 추론 능력과 비례적 사고의 발현에 영향을 미치는지 살펴보았다.

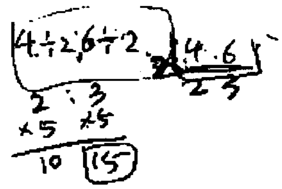
1. 민수의 비례 문제 해결 과정에서의 특징

1-4차면담 내용의 분석을 통하여 민수가 비례식을 능숙하게 세우고 해결하는 것을 관찰할 수 있었다. 그러나 비례 추론 능력의 2수준과 3수준에 해당되는 사고 특성만 관찰되었을 뿐, 4수준의 사고 특성은 관찰되지 않았다. 3차면담의 도형 문제에서 민수는 전혀 비례식을 사용하지 않고 처음 5문제를 모두 정확하게 해결하였다. 그러나 수의 구조가 복잡한 문제Ⅲ-6은 해결하지 못하였다. 4차면담에서, 민수는 분수 활동에서 다루었던 친숙한 내용의 문제 상황(문제Ⅳ-5)에서 1명당 먹는 피자의 양을 정확하게 계산하여 문제를 해결하였으나, 색의 밝기와 용액의 농도를 소재로 한 문제에서 전혀 곱셈적 사고를 하지 못하고 올바른 해결 방법을 제시하지 못하였다. 민수의 문제 해결과정에서 나타난 비례 추론 능력과 비례적 사고의 발현에 대한 분석 결과는 다음과 같다.

가. 민수의 비례 추론 능력

에피소드 1 (민수의 1차 면담에서)

민수는 1차면담과 2차면담 모두에서 대부분의 문제를 비례식을 세워 해결하였으나 문제Ⅰ-2와 문제Ⅰ-3은 비례식을 세우지 않고 비형식적 방법으로 해결하였다. 다음은 문제Ⅰ-3을 해결하는 동안 민수가 활동지에 기록한 내용과 면담 내용이다.



[그림 Ⅳ-1] 문제Ⅰ-3에 대한 민수의 활동지 내용

01 민수: (문제Ⅰ-2와) 비슷하네요.
02 연구자: (민수가 문제를 해결한 후) 자 선생님한테 한번 어떻게 풀었는지 설명해 볼까. 민수가 푼걸 보니까 4와 6을 2로 나누었네? 왜 이렇게 나누었어?
03 민수: 우선요, 4하고 10이요, 4 곱하기 네모를 해서 10이 나오는 것이 없기 때문에, 뭐였더라... 이거(4)를 (2로)나눠서요 이거(10)의 약수가 되는지 안되는지 알아보기 위해 이것을 나누어봤는데요.
04 연구자: 그러면 왜 2로 나누어 줄 생각을 했어? 4하고 6을.
05 민수: (4를 2로 나누어서 나온 2를 가리키며) 2가 10의 약수이고요 또 4하고 6의 공약수가 2라서 2로 나눠줬어요.
06 연구자: 그래서...

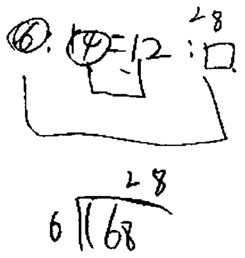
[그림 Ⅳ-1]에서 민수의 문제 해결 절차는 정확했으나 면담 내용([05])을 통하여 알 수 있듯이 이러한 해결 절차가 단순히 4, 6과 10의 공약수를 이용한 것인지 구성단위에 대한 이해를 통하여 이루어진 것인지 명확하지 않다. 다음은 민수의 이해 정도를 좀 더 알아보기 위해 문제의 조건을 일부 변형하여 새로운 문제를 제시한 후 이루어진 면담 내용이다.

07 연구자: 만약에 선생님이 이 10원을 7원으로 문제를 바꾸면?
08 민수: 7원이요?
09 연구자: 응.
10 민수: 소수로 나오겠는데요. 10.5개요.
11 연구자: 문제가 7원인데 여기서도 4와 6을 쓴 다음에 밑에다가 2하고 3이라고 썼네.
12 민수: 네
13 연구자: 여기서도 여전히 2로 나누었네? 여기서랑 (10원일 때와) 똑같이 그지? 왜 여기서랑 똑같이 2로 나누었지? 여기 숫자가 (10원에서 7원으로) 바뀌었는데?
14 민수: 여기서는요 7이 약수가 1과 자신뿐인 수잖아요, 그래서 최소의 숫자 (2원과 3개를 의미함) 로요, 응.. 이걸로 나눌 수 있는 최소의 그 몇 원과 사탕의 개수를 알기위해서요.
15 연구자: 그 다음에는 어떻게 해서 10.5가 나온거지?
16 민수: 여기요 돈이 7원이잖아요, 그러니까 2를 7로 나누어 보면은 2분의 7이 되가지고, 2분의 잉? (잠깐 생각한다) 2분의 7이 되잖아요, 2분의 7과 곱하기 3을 해줬더니 2분의 21이 되가지고 10.5원이 나왔어요.

민수가 활동지에 기록한 내용과 면담의 내용을 통하여 알 수 있듯이 민수는 문제 상황을 정확하게 이해한 후 가격 4원과 사탕 6개 사이에 의미 있는 대응을 구성하였다. 그리고 비례식을 이용하지 않고 비형식적 방법으로 문제를 해결하였다. 4와 6을 2로 나누어 더 작은 단위인 2와 3으로 재구성하고 이를 이용하여 더 큰 구성단위인 10과 15를 구성하였다([02-05]). 4원, 6개, 10원에 사용된 세 수 4, 6, 10 사이의 관계를 파악하고 문제를 해결하는 과정에서 처음의 구성단위 4와 6을 더 작은 구성단위 2와 3으로 만들고 이를 조작하여 더 큰 구성단위를 구성하였다. 그리고 민수는 4원과 10원, 4원과 7원의 관계에 주목한 후([03]과 [16]) 사탕의 개수에서도 이 관계가 유지되도록 하는 방법을 사용하여 문제를 해결하였다. 즉 내적비의 불변성을 이용하여 문제를 해결하였다. 이것은 연구자가 조건을 10원에서 7원으로 바꾸어 문제를 제시한 상황에서 더 분명하다. 사탕 1개당 가격, 또는 1원에 살 수 있는 사탕의 개수에는 주목하지 않았다. 여기에서 민수가 비례 추론의 2수준에서 요구하는 비례 추론 능력을 지니고 있음을 알 수 있다. 그리고 곱셈과 나눗셈, 약수와 배수, 공약수와 공배수 등에 대한 자신의 수학적 지식을 적절히 비례 개념과 통합함으로써 성공적으로 비형식적 방법으로 문제를 해결할 수 있었다.

에피소드 2 (민수의 2차 면담에서)

민수의 비례식 사용 능력은 우수했다. 1차면담과 2차면담에 사용한 12개의 문제에서 수의 구조가 비교적 단순한 2문제(문제 I-2와 문제 I-3)는 비형식적 방법으로 해결하고 나머지 10문제는 모두 정확하게 비례식을 세워 해결하였다. 그러나 면담을 통하여 확인한 결과 단순히 편리한 알고리즘으로만 이용하는 수준임을 알 수 있었다. 민수는 비례식을 사용한 모든 문제에서 $s_1:t_1=s_2:t_2$ 형태의 비례식만 올바른 식으로 인정하고 그 외의 다른 형태의 식인 $s_2:t_2=s_1:t_1$, $s_1:s_2=t_1:t_2$ 등은 잘못된 식이라고 하였으며, 이 식들이 $s_1:t_1=s_2:t_2$와 동일한 결과가 나오는 이유에 대해 적절히 설명하지 못하였다. 즉, 전항이 증가하는 만큼 후항이 증가하기 때문에, 또는 동치분수의 성질 등을 이용해 설명하지 못하고 단순히 외항의 곱과 내항의 곱이 같다는 사실만을 이야기 할 수 있었다. [그림 Ⅳ-2]은 2차면담에서 문제Ⅱ-1을 해결하는 동안 민수가 활동지에 기록한 내용이다.



[그림 Ⅳ-2] 문제Ⅱ-1에 대한 민수의 활동지 내용

01 연구자: (민수가 문제를 해결한 후) 자 이걸 선생님한테 한번 설명해 볼까...

02 민수: 이것도 비례식으로, 이거를 비례식을 세우면은요 영희는요 밀가루 6컵으로 빵을 14개 만들었다고 했잖아요, 철수는 12컵이고 여기는 빵은 네모잖아요 이렇게 풀어보면은요 168에다가 나누기 6을 하면은 28이요.

03 연구자: 그런데 친구가 식을 6:12=14: 네모, 이렇게 세웠어. 그러면 민수는 친구가 이렇게 식을 세워서 푸는 것을 보고 뭐라고 할거야?

04 민수: 그러면 안된다고요.

05 연구자: 그러면 뭐라고 설명을 해주면서 안된다고 할건데?

06 민수: 잠깐만요.. 6컵, 12컵, 14개.. 잉?(잠시 생각을 한다) 여기서는요, 6대 12를요, 밀가루 대 빵, 밀가루 대 빵 이렇게 들어가야 되는데요, 여기서는요 밀가루 대 밀가루가 들어가고 빵 대 빵이 들어가잖아요, 그래서 안되는 것 같은데...

07 연구자: 그래서 안되는 것 같애?

08 민수: 네..

09 연구자: 그러면 민수는 왜 여기에 밀가루와 빵, 밀가루와 빵이 들어가야 된다고 생각해?

10 민수: 이게 그, 기준량, 비교하는 양, 기준량과 비교하는 양이 만나야 비가 되잖아요, 그러니까 빵이...

11 연구자: 비교하는 양 대 기준량을 하면은 뭐가 나오는데?

12 민수: 비율이요

13 연구자: 비율? 그럼 비율하고 이런 비례식하고는 무슨 관계가 있는데?

14 민수: 이렇게 비교하는 양, 기준량, 비교하는 양, 기준량이 모여야 비례식이 되는데 이렇게 비교하는 양, 비교하는 양, 기준량, 기준량이 모이면 안 될 것 같은데..

15 연구자: 그럼 6컵을 비교하는 양, 12컵을 기준량, 빵 14개를 비교하는 양, 네모를 기준량이라고 하면은 안될까?

16 민수: (한참을 생각한다) 안 될 것 같은데요...

17 연구자: 왜 그렇게 생각하지?

18 민수: 밀가루로 빵을 만드는데 어떻게 밀가루 대 밀가루가 되요?

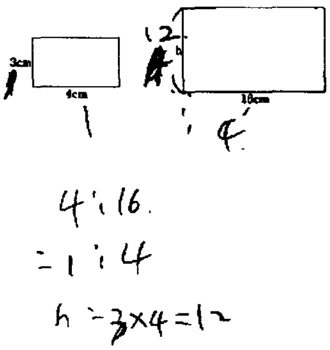
1차면담에서 내적비를 이용하여 비형식적 방법으로 문제를 해결한 반면 비례식에서는 외적비를 이용한 식만을 올바른 것으로 인정하였다. 민수는 (비율)=(비교하는 양)÷(기준량)이라는 것([10-12]), 비례식은 비의 값이 같은 두 비를 등식으로 나타낸 식이라는 것을 정확하게 알고 있었다([13-14]). 또한 비례식을 구성하고 있는 네 개 값의 위치가 대칭적이라는 것도 정확하게 알고 있었다([6]과 [14]). 그러나 이렇게 알고 있는 지식들을 비와 비율의 개념, 비례식과 의미 있게 연결시키지 못하고([15-18]), 외형적인 표현과 알고리즘으로서 비례식을 이해하고 있어 $s_1:t_1=s_2:t_2$ 형태의 비례식만을 고집하고 있었다. 비례식을 능숙하게 이용하고 있지만 비례 추론 능력의 4수준에서 요구하는 사고 특징은 보이지 않았다.

나. 민수의 비례적 사고의 발현

에피소드 3 (민수의 3차 면담에서)

3차면담에서 도형 문제를 해결할 때 민수는 전혀 비례식을 사용하지 않고, 두 수 사이의 약수와 배수 관계를 이용하여 비형식적 방법으로 문제를 해결하였다. 다음 [그림 Ⅳ-3]는 3차

면담에서 문제Ⅲ-1을 해결하는 동안 민수가 활동지에 기록한 내용이다. 민수는 두 도형에서 길이가 모두 주어진 가로의 길이를 이용하여 닮음비 1:4를 먼저 구하고 이것을 세로의 길이에 대응하여 미지의 세로의 길이 12cm를 구하였다. 즉, 민수는 도형 문제에서 비례적 사고를 할 수 있었으며 자신의 약수와 배수에 대한 지식을 비례 개념과 통합함으로써 문제를 해결할 수 있었다.



[그림 Ⅳ-3] 문제Ⅲ-1에 대한 민수의 활동지 내용

그러나 비교적 주어진 수가 복잡한 문제Ⅲ-6은 해결하지 못하였다. [그림 Ⅳ-4]는 민수가 활동지에 기록한 내용이다.

[그림 Ⅳ-4] 문제Ⅲ-6에 대한 민수의 활동지 내용

01 연구자: 이거 12는 뭐야? 어디서 가지고 온 거야?
02 민수: (왼쪽 도형을 가리키며) 여기요
03 연구자: 이거 37은?
04 민수: (오른쪽 도형을 가리키며) 여기요
05 연구자: 그러면 이거 37은?
06 민수: (왼쪽 도형을 가리키며) 여기요. 그 다음에 어떻게 해야 될지 모르겠네..
07 연구자: 천천히 생각해도 돼...
08 민수: (한참을 생각한다. 약 4분 정도의 시간이 흐른다) 일단 이 문제를 건너뛸께요.
09 연구자: 이 문제를 건너뛰고 싶어?
10 민수: 네. 너무 복잡해서 어떻게 해야 할지... 참...
11 연구자: 좋아 그러면 다음에 하자...

비록 민수가 이 문제를 해결하지는 못했으나 왼쪽 도형의 12와 오른쪽 도형의 37을 대응시키고, 왼쪽 도형의 37과 오른쪽 도형의 미지의 값을 대응시킨 것으로 보아 비례 상황을 인식했음을 알 수 있다. 그러나 문제에 주어진 수들 사이에 약수와 배수 관계가 성립하지 않아 앞의 문제에서 사용했던 방법을 사용하지 못했으며, 2차면담까지 가장 유용한 도구로 사용했던 비례식도 생각해 내지 못했다. 이 문제의 경우 비례식을 사용하지 않는다면 다른 대안으로 Nabors(2003)가 비례 추론 능력의 3수준으로 명시하고 있는 단위인수 방법을 사용할 수 있다. 즉 37을 12로 나눈 후 37을 곱해서 구해야 한다. 그러나 민수는 이러한 접근을 시도하지 못하고 결국 이 문제를 포기했다([08-11]). 즉, 도형 문제에서 민수는 비례적 사고를 하지만 문제에 사용된 수의 영향을 받아 3수준의 비례 추론 능력으로 나아가지 못하였다.

에피소드 4 (민수의 4차 면담에서)

[그림 Ⅳ-5]은 4차면담에서 문제Ⅳ-1을 해결하는 동안 민수가 활동지에 기록한 내용이다. 민수는 문제를 해결하기 위해 검정색 1통과 섞는 흰색 물감의 양, 또는 진수와 민철이의 검정색 물감의 양을 동일하게 조절한 후 흰색의 양을 비교하는 방법으로 접근을 해야 하는데

검정색 물감과 흰색 물감의 차이를 이용하여 문제를 해결하고자 하였다([03-05]). 그래서 검정색 물감과 흰색 물감의 차가 작은 민철이의 것이 더 어둡다고 생각하였다.

[그림 Ⅳ-5] 문제Ⅳ-1에 대한 민수의 활동지 내용

01 민수: (문제를 해결한다) 민철이 같아요.
02 연구자: 왜 민철이라고 생각했어.
03 민수: 여기 있잖아요, 진수는요 검정색 물통 5통하고 (흰색 물감) 8통을 섞고요, 민철이는 검정색 3개 흰색 5개를 했잖아요, 그런데 이 두 차가요 여기는 3통이 차가 나고 여기서는 2통이 차가 나가지고 이게(민철이가) 더 찐할 것 같아서요.
04 연구자: 그래서 민철이가 더 찐할 것 같에?
05 민수: 네..

4차면담에서 사용한 문제는 주로 4개의 값이 모두 주어진 수치적 비교 문제로 비례식을 사용하지 않고 해결해야 한다. 민수는 분수 학습에서 익숙한, 그리고 내포적 성질이 아닌 상황을 다룬 문제Ⅳ-5에서 1명당 먹는 피자의 양을 정확하게 계산하여 문제를 해결하였으나, 내포적 성질인 색의 밝기, 용액의 농도 문제에서는 전혀 비례 상황을 인식하지 못하였다. 즉, 민수의 비례적 사고에 영향을 준 것은 4개의 값이 모두 주어진 문제 형태가 아니라 내포적 성질을 이용한 문제 상황임을 알 수 있다.

다. 민수의 비례적 사고에 대한 분석

1차면담에서 민수는 두 대상 사이의 의미 있는 대응을 구성하고, 곱셈적 사고를 통해 하나의 구성단위로 더 큰 구성단위를 구성하는 등 비례 추론 능력의 2수준에 해당되는 사고 특성을 보였으며, 4차면담의 문제Ⅳ-5를 해결할 때 단위인수 방법을 사용하여 1명당 먹는 피자의 양을 구하는 등 비례 추론 능력의 3수준에 해당되는 사고 특성을 보였다. 이는 민수의 약수와 배수, 분수에 대한 수학적 지식이 비례 개념과 적절히 통합되었기 때문에 가능한 것이었다. 그러나 비례식을 사용하는데 있어 비와 비율의 개념을 비례식과 의미 있게 연결시키지 못하고([15-18]), 외형적인 표현과 알고리즘으로써 비례식을 이해하고 있어 4수준에는 도달하지 못하고 있었다. 이는 비례식을 구성하고 있는 전항과 후항, 외항과 내항 등이 비, 비례 개념과 의미 있게 연결되지 못하고, 동치분수에 대한 지식이 비례 개념과 적절히 통합되고 있지 않기 때문이었다.

3차면담의 도형 문제에서 민수는 모두 비례적 상황을 인식했으나, 앞의 5문제는 정확하게 해결한 반면 주어진 수가 복잡한 마지막 문제는 해결하지 못했다. 즉, 민수는 도형 문제로 비례적 사고를 전이할 수 있었으며, 문제에 주어진 수가 민수의 비례 추론에 영향을 미쳤음을 알 수 있다. 4차면담에서 4개의 수가 모두 주어진 외연적 성질을 이용한 문제에 대해 민수는 비례 상황을 인식할 수 있었으나, 색의 밝기나 용액의 농도와 같은 내포적 성질의 문제에서 비례 상황을 인식하지 못하였다. 즉, 민수의 비례적 사고에 영향을 미친 것은 4개의 수가 모두 주어진 문제 형태가 아니라 내포적 성질의 문제 상황임을 알 수 있었다.

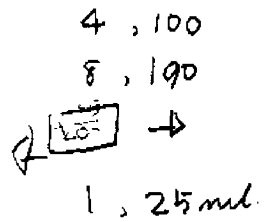
2. 진희의 비례 문제 해결 과정에서의 특징

1-4차면담 내용의 분석을 통하여 진희가 비례식을 세워 문제를 해결하는 것을 관찰할 수 있었다. 그러나 비례 추론 능력의 3수준에 해당되는 사고 특성만을 관찰할 수 있었다. 3차면담의 도형 문제에서 진희는 문제를 해결하기 위해 비례식을 세웠으나, 비례 상황을 인식했다기보다 단순히 3개의 값이 주어지고 하나의 미지의 값을 찾는 문제 상황이라는 것을 이용하여 비례식을 세웠다. 그래서 비례식을 세운 후 비례식을 해결하는 절차가 올바르지 못했다. 4차면담에서의 과학의 용액의 농도 학습과 수학의 분수 학습에서 익숙한 문제Ⅳ-3번과 문제Ⅳ-5번 문제에서 곱셈적 사고를 통하여 정확하게 해결하였으나 다른 문제에서는 민수와 마찬가지로 비례 상황을 인식하지 못하였다. 진희의 문제 해결과정에서 나타난 비례 추론 능력과 비례적 사고의 발현에 대한 분석 결과는 다음과 같다.

가. 진희의 비례 추론 능력

에피소드 5 (진희의 4차 면담에서)

[그림 Ⅳ-6]은 4차면담에서 문제Ⅳ-3을 해결하는 동안 진희가 활동지에 기록한 내용이다. 진희는 수진이의 것을 적정량이라 가정하고, 네스틱 1스푼에 대한 물의 양 25ml를 계산하였다. 그리고 25와 8을 곱한 후 네스틱이 8스푼이면 200ml의 물이 적정량인데 진경이의 물은 190ml이기 때문에 맛이 더 진하다고 하였다([04]). 진희는 100을 4로 나누어 단위인수 25를 구하고 이 값에 8을 곱하여 200을 얻는 3수준에서 요구하는 사고 특성을 보였다.



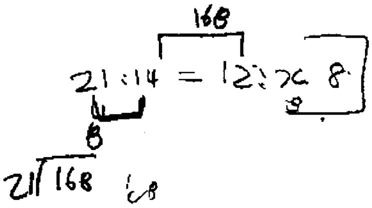
[그림 Ⅳ-6] 문제Ⅳ-3에 대한 진희의 활동지 내용

01 연구자: 누가 더 찐해?
02 진희: 진경이요
03 연구자: 왜?
04 진희: 하나에 25개가 적당해요. 여기(수진)는 적당하고... (8 곱하기 25를 계산한다) 애요. 누구더라... 진경이요
05 연구자: 왜?
06 진희: 200이 적당하고 (오른쪽 화살표를 그리며) 그 이후부터는 신겁고 (왼쪽 화살표를 그리며) 그 이전에는 찐해요.

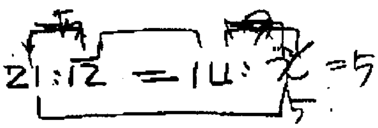
에피소드 6 (진희의 1차 면담에서)

1-3차면담에서 진희는 모두 비례식을 사용하여 문제를 해결하였다. 그러나 비례식에 대한 이해, 비와 비례 개념에 대한 이해는 상당히 낮은 편이었다. [그림 Ⅳ-7]은 문제Ⅰ-5를 해결하는 동안 진희가 활동지에 기록한 내용이다. 진희는 계속해서 $s_1 : s_2 = t_1 : t_2$ 형태의 비례식을 세워 문제를 해결하였다. $s_1 : t_1 = s_2 : t_2$ 형태의 비례식이 올바른 것인지에 대해 묻자 두 식 모두에서 내항의 곱과 외항의 곱이 같기 때문에 모두 사용 가능한 식이라고 말하지만([06]-[09]), 계산 절차는 달랐다. (a)의 비례식은 내항과 외항의 곱이 같다는 성질을 이용해서 해결하고, (b)의 비례식은 전항인 21과 12의 차가 9라는 것을 이용해 14에서 9를 뺀 후 5라는 답을 얻었다([10]). 두 개의 답이 같지 않자 (a)의 비례식을 통하여 나온 8컵을 맞는 것으로 택하였다. 왜 이것이 올바른 답이 되는지에 대한 설명을 요구하자

8컵을 x에 대입하면 외항의 곱과 내항의 곱이 같게 나오는데 5컵을 대입하면 외항의 곱과 내항의 곱이 같지 않기 때문에 8컵이 맞는 답이라고 설명을 하였다([11]-[16]). 그러나 내항의 곱과 외항의 곱이 같은 이유에 대해서는 적절히 설명을 하지 못하고 사실만을 말할 수 있었다([23]-[26]). 그리고 (b)의 비례식을 왜 내항의 곱과 외항의 곱이 같은 성질을 이용하지 않고 전항과 후항의 차를 이용해서 해결했는지 묻자, 이것은 틀린 비례식이기 때문이라고 하였다([19]-[22]). 2차면담에서 $s_1 : t_1 = s_2 : t_2$ 형태의 비례식이 왜 올바른 식이 아닌지에 대한 설명을 요구했을 때, 밀가루와 밀가루를 비교해야 하며 밀가루와 빵은 비교할 수 없기 때문이라고 대답했다.



(a)



(b)

[그림 Ⅳ-7] 문제Ⅰ-5에 대한 진희의 활동지 내용

01 진희: ((a)의 비례식을 세워 계산한다) 답은 8이에요.

02 연구자: 어떻게?

03 진희: (활동지의 내용을 보여준다)이렇게요.

04 연구자: 그럼 만약에 진희 친구가 이 식을 다르게 세웠어.

05 진희: 어떻게요?

06 연구자: 진희는 지금 21대 14는 12대 x, 이렇게 했잖아.. 그런데 친구는 21대 12는 14대 x라고 했거든.. 이거에 대해서 진희는 어떻게 생각해?

07 진희: ((b)의 비례식을 쓴다) 두 개 다 써도 되는데요.

08 연구자: 왜?

09 진희: 두 개가 계산이 똑같아요.

10 진희: (무언가 계산을 하고 (b)의 비례식을 이용해서 설명을 한다) (21과 12의 차가 9이니까 14에서)9를 빼야 되요, 그래서 x는 5고... 어! 8인데..

11 연구자: 그러면 둘 중에 어떤게 맞는 것 같애?

12 진희: 제 생각은요, 잠깐만요..

13 연구자: 음

14 진희: ((a)의 비례식에서 x를 가리키며) 여기다가 5를 넣어보면(내항의 곱과 외항의 곱이 틀리다는 것을 확인한다), ((a)의 식을 가리키며) 이게 맞는 것 같에요.

15 연구자: 왜 이게 맞는 것 같은데?

16 진희: 외항과 내항의 곱이 같아야 되잖아요.

17 연구자: 그래서 이게 맞는거야?

18 진희: 네

19 연구자: 그럼 아까는 왜 같다고 했어?(09의 대화를 의미함)

20 진희: 아까요.. 어...이렇게((a)의 식에서 내항의 곱과 외항의 곱) 이렇게((b)의 식에서의 내항의 곱과 외항의 곱) 같아서요.

21 연구자: 그럼 왜 이거((b)의 식)는 이렇게 풀었어?

22 진희: 이거는 틀린 거잖아요..($s_1 : t_1 = s_2 : t_2$ 형태의 비례식은 잘못된 식이라는 것을 의미함)

23 연구자: 그럼 왜 여기((a)의 식)에서 두 개(외항의 곱과 내항의 곱)가 같아야 되는데?

24 진희: 같아야죠...

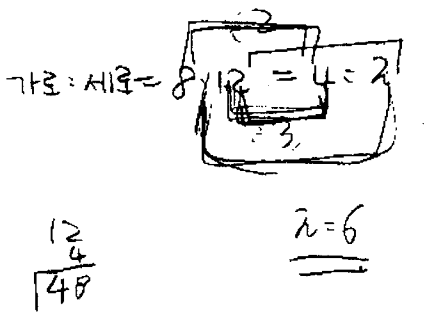
25 연구자: 왜?

26 진희: 당연히 같아야죠. 여기랑 여기랑 곱하면 여기... 여기 곱한거랑 같아야 되잖아요.

나. 진희의 비례적 사고의 발현

에피소드 7 (진희의 3차 면담에서)

3차면담의 도형 문제에서 진희는 비례식을 능숙하게 세웠다. [그림 Ⅳ-8]는 3차면담에서 문제Ⅲ-2를 해결하는 동안 진희가 활동지에 기록한 내용이다.



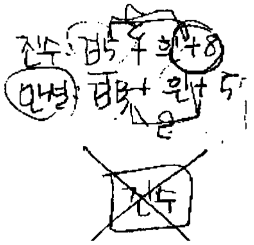
[그림Ⅳ-8] 문제Ⅲ-2에 대한 진희의 활동지 내용

01 연구자: 이거는 어떻게 한거야?
02 진희: 이렇게 안되잖아요..(12와 4가 나누기 3관계인 것을 이용해서 8을 3으로 나누려 하였으나 나누어 떨어지지 않음을 의미함) 그래서 이렇게 나누고(8 나누기 2는 4) 이렇게(12 나누기 2) .. 잠깐만요..
03 연구자: 음
04 진희:(무언가를 생각한다)
05 연구자: 지금 8 나누기 2하니까 4나오고
06 진희: 잠깐만요(12곱하기 4를 해서 48을 얻는다), 네 맞아요.
07 연구자: 8나누기 2하니까 4나오고?
08 진희: 네
09 연구자: 12나누기 6해서 2나오고?
10 진희: 네
11 연구자: 이거는 12하고 4하고 나누기 3관계였어?
12 진희: 네
13 연구자: 그러면 이거는 왜 썼는데?
14 진희: 이렇게 되는 줄 알고 해봤던건데 (8나누기 3이) 분수네요. 그래서 안했어요.
15 연구자: 분수가 나와서 안했어?
16 진희: 네
17 연구자: 분수가 나오면 안되는거야?
18 진희: 분수가 나오면 좀 그런데...

진희는 비례식을 세운 후, 외항의 곱과 내항의 곱이 같다는 성질을 이용하기 전에 네 개의 항 사이에 존재하는 배수 관계 등에 먼저 주목을 하였다. 문제를 해결하기 위해 비례식 8: 12=4:h를 세운 후 배수 관계가 쉽게 드러나는 12와 4에 먼저 주목을 하고, 12를 3으로 나누면 4가 된다는 것을 8에 적용시키고자 하였다. 그러나 8을 3으로 나누는 과정에서 분수가 나오자 포기하고, 8과 4의 관계에 주목하였다([02]와 [13-16]). 이 절차는 자연수만으로 모든 과정이 가능하기 때문에 이 방법으로 답을 구하고 비례식의 성질인 외항의 곱과 내항의 곱이 같다는 것을 이용해 답이 맞는지 확인하였다. 이렇게 진희는 문제 해결 과정에서 분수가 나타나는 상황을 회피하고 있었으며, 비례 상황에 맞는 적절한 방법을 탐색하는 것이 아니라 자연수 내에서의 약수 및 배수 관계 등을 방법이 타당한 것과는 무관하게 이용하고 있었다. 진희는 비례식을 정확하게 세웠지만 이것을 비례 상황과 연결시키지 못했다.

에피소드 8 (진희의 4차 면담에서)

[그림 Ⅳ-9]은 문제Ⅳ-1을 해결하는 동안 진희가 활동지에 기록한 내용이다. 진희는 처음에 흰색의 양에는 전혀 주목하지 않고 검정색의 양만을 생각하여 진수의 것이 더 어둡다고 대답하였다. 흰색을 고려하도록 유도하였지만([02]) 민수와 같이 검정색과 흰색의 양의 차이에 주목하여 민철이의 것이 더 어둡다고 생각하였다([03-05]).



[그림 Ⅳ-9] 문제Ⅳ-1에 대한 진희의 활동지 내용

01 진희: 당연히 진수께 더 어둡지 않나요? 검은색이 더 많이 들어가서
02 연구자: 검은색이 더 많이 들어가서? (그럼) 흰색은?
03 진희: 그럼...그럼 민철이요.
04 연구자: 어떻게?
05 진희: 진수는 흰색이 3개 더 많은데 민철이는 흰색이 2개 더 많아요.

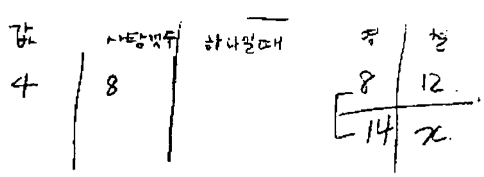
그러나 진희는 수학의 분수 학습과 과학의 용액의 농도 학습에서 익숙한 문제Ⅳ-5와 문제Ⅳ-3에서 곱셈적 사고를 통해 정확하게 문제를 해결하였다. 즉, 진희의 비례적 사고에 영향을 준 것은 민수와 마찬가지로 4개의 값이 모두 주어진 문제 형태가 아니라 친숙하지 않은 내포적 성질을 이용한 문제 상황임을 알 수 있다.

다. 진희의 비례적 사고에 대한 분석

진희는 4차면담의 1명당 먹는 피자의 양을 구하는 문제(문제Ⅳ-5)와 용액의 진하기를 묻는 문제(문제Ⅳ-3)에서 단위인수 방법을 이용하여 문제를 해결하였다. 이를 통하여 진희가 비례 추론 능력의 3수준에서 요구하는 사고 특성을 지니고 있음을 확인할 수 있었다. 그러나 진희는 문제를 해결하는데 비례식을 사용할 수 있었음에도 불구하고 $s_1:s_2=t_1:t_2$ 형태의 비례식은 올바른 식으로 인정하고 $s_1:t_1=s_2:t_2$ 형태의 비례식은 잘못된 식이라고 생각하는 등 4수준에서 해당되는 사고 특성은 관찰되지 않았다. 이는 비례식을 구성하고 있는 전항과 후항, 외항과 내항 등의 개념이 비, 비례 개념과 의미 있게 연결되지 못했기 때문이었다.

3차면담의 도형 문제에서 진희는 3개의 값과 하나의 미지의 값이 주어진 문제 구조를 이용하여 비례식을 만들 수 있었지만 이를 비례 상황과 연결시키지 못했으며, 4차면담에서 수학 학습과 과학 학습에서 경험한 친숙한 상황의 문제Ⅳ-3과 문제Ⅳ-5문제는 해결하였으나 색의 밝기를 이용한 문제에서 비례 상황을 인식하지 못하였다. 즉, 상황의 친숙함 여부가 진희의 비례적 사고의 발현에 영향을 주었다.

이 외에도 진희의 비례 추론 능력에 영향을 미치는 것은 부족한 수감각이었다. 예를 들면, 진희는 문제Ⅰ-2와 문제Ⅱ-4를 해결하는 과정에서 [그림 Ⅳ-10]에서처럼 문제에 주어진 정보를 기록하고 문제를 해결하려고 시도하였다. 그러나 약수와 배수, 공약수와 공배수, 곱셈과 나눗셈 등의 수들 사이의 관계와 연산에 대한 부담으로 비형식적 접근을 이내 포기하고 비례식을 세워 문제를 해결하였다. 비례식은 진희에게 수들 사이의 관계와 연산에 대해 사고해야 하는 부담을 덜어주는 도구가 되면서, 동시에 비례 추론을 회피할 수 있도록 하고 있었다.



[그림 Ⅳ-10] 문제Ⅰ-2(좌)와 문제Ⅱ-4(우)에 대한 진희의 활동지 내용

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구는 두 명의 초등학교 6학년 학생을 대상으로 이들의 비례 추론 능력은 어떠한지,

다양한 상황에서 비례적 사고의 발현은 어떠한지, 그리고 이들의 비례적 사고, 즉 비례 추론 능력과 비례적 사고의 발현에 영향을 미치는 요소는 무엇인지 알아보았다.

연구결과 두 학생 모두 수학의 분수 학습과 과학의 용액의 농도 학습을 통하여 경험한 익숙한 상황의 문제에서 3수준에서 요구하는 비례 추론 능력을 보였으나(민수의 경우 문제Ⅳ-5에서, 진희의 경우 문제Ⅳ-3과 문제Ⅳ-5에서), 도형 문제에서 이는 불안정했으며 다른 내포적 성질을 이용한 문제에서는 전혀 비례 상황을 인식하지 못했다. 그리고 대부분의 문제를 비례식을 능숙하게 세워 문제를 해결하였으나 비례식을 구성하고 있는 전항과 후항, 내항과 외항, 그리고 비, 비율, 비교하는 양, 기준량 등의 개념들에 대한 외형적인 이해만을 하고 있어, 이들을 유의미하게 연결시키지 못하고 비례식을 단순한 알고리즘으로 사용하고 있었다. 즉, 비례식을 능숙하게 사용하고 있었지만 비례 추론 능력의 4수준에는 미치지 못했다. 학생들은 기존에 학습한 수학적 지식들, 특히 약수와 배수, 분수, 분수의 연산 등과 비례 상황을 통합할 때 문제 해결 능력이 뛰어났으며, 부족한 수감각이나 연산감각 등은 비례적 사고를 어렵게 하였다. 그리고 수학이나 다른 교과목에서 경험한 친숙한 문제 상황에서 비례적 사고를 어렵지 않게 할 수 있었으나, 익숙하지 않은 상황에서는 전혀 비례 상황을 인식하지 못하였다. 비례 추론의 1수준에서는 비례에 대한 개념화와 덧셈에 대한 지식만을 필요로 하며, 2수준에서는 곱셈에 대한 지식 또는 분수에 대한 지식을 필요로 한다. 학생들에게 좀더 일찍 덧셈, 곱셈, 분수 등의 지식을 이용하여 비례 추론을 경험할 수 있도록 하는 것이 필요할 것이다.

선행연구(이종욱, 2006; Freudenthal, 1978; Singh, 2000)에 따르면 비례적 사고를 위해 비의 개념이 먼저 형성되어야 하고, 비의 개념이 형성된 후 학생들은 비례 문제를 해결하면서 학생 스스로 다양한 전략을 구성하고 기존에 습득한 사칙연산, 분수, 분수의 연산, 약수와 배수 등의 개념들과 상호관련성을 맺으며 비와 비례 개념을 서로 의존적으로 발달시킨다. 1수준의 학생들은 덧셈과 비례적 사고를 통합해야 하고, 2수준의 학생들은 곱셈과 나눗셈, 약수와 배수를 비례적 사고와 통합할 수 있어야 하며, 3수준의 학생들은 분수와 분수의 연산을, 4수준의 학생들은 분수 연산의 성질을 비례적 사고와 통합할 수 있어야 한다. 이렇게 함으로써 비례 추론에서의 곱셈적 사고에 대한 통찰을 이루고 자신의 방법을 스스로 스키마화할 수 있으며, 문제를 해결하기 위해 수행한 절차나 추론에 수학적 의미를 부여하고 이를 내면화할 수 있게 되어 다른 상황의 비례 문제에서 이를 일반화할 수 있게 된다. 따라서 학생들에게 이러한 과정을 경험할 수 있는 충분한 기회를 제공해야 한다. 그러나 선행연구(Behr et al., 1992; Nabors, 2003; Singh, 2000)에서 지적했듯이 도구적 이해(Skemp, 1987)를 통해 습득한 알고리즘으로써의 비례식은 문제의 답을 구하는데 유용한 도구일지 몰라도 학생들의 비와 비례 개념 형성과 비례 추론 능력 향상을 위한 풍부한 학습 기회를 제공하지는 못한다. 본 연구에서 두 학생 모두 3개의 값이 주어지고 하나의 미지의 값을 구하는 문제에서 비례식을 이용함으로써 높은 수행정도를 보인다. 이들은 주어진 값들의 대칭성을 이용하여 정확하게 $s_1 : s_2 = t_1 : t_2$ 또는 $s_1 : t_1 = s_2 : t_2$ 형태의 비례식을 세우고 외항의 곱과 내항의 곱이 같다는 비례식의 성질을 이용하여 계산도 정확하게 해낸다. 그러나 비례식에 대한 외형적인 이해만을 하고 있어 비례식을 단순한 알고리즘으로 사용하고 있었다. 그

리고 복잡한 수들 사이의 관계를 파악하거나 계산에 대한 부담을 해결할 수 있는 도구로 비례식을 사용하고 있어 이미 학습한 분수, 분수의 연산, 약수와 배수 등의 개념과 비와 비례를 통합할 수 있는 기회를 갖지 못하고 있었다.

비례식은 비례 문제, 특히 3개의 값이 주어지고 하나의 미지의 값을 구하는 비례 문제를 해결하는데 있어 학생들에게 막강한 도구이다. 그러나 비례식을 구성하고 있는 비와 비율 등에 대한 깊이 있는 이해가 결여되었을 때 이는 그 힘을 발휘하지 못함을 두 학생의 사례를 통하여 알 수 있었다. 비와 비율에 대한 이해가 결여된 상태에서 비례식의 사용은 오히려 비와 비율의 깊이 있는 이해를 방해하고 비례적 추론 능력을 발달시키는데 장애가 됨을 알 수 있었으며(정은실, 2003b), 이는 이후의 정비례와 반비례 학습에도 영향을 미칠 것으로 판단된다. 따라서 비례식이 학생들에게 의미 있고 유용한 도구가 될 수 있도록 하기 위해서 학생들이 비와 비율 개념을 충분히 내면화 한 이후 비례식이 소개되거나, 비와 비율 개념을 비례식과 적절히 통합할 수 있는 방법을 모색할 필요가 있다. 영국의 SMP 교과서(The School Mathematics Project, 2003a, 2003b, 2003c, 2003d, 2003e, 2003f)에서는 7단계에 비와 비율 개념이 처음으로 소개되어 9단계까지 계속적으로 비와 비율이 명시적으로 다루어지고 있으며, 미국의 MiC 교과서(Abels, & Gravemeijer, 1998; Keijzer, & Abels, 1998; Keijzer, van Galen, & Gravemeijer, 1998; Streefland, 1998; van den Heuvel-Panhuizen, & Streefland, 1998)의 경우에도 5단계에서 비와 비율이 처음으로 소개되어 7단계까지 비와 비율이 명시적으로 다루어지고 있다. 그리고 두 교과서 모두 비례식은 명시적으로 소개하고 있지 않다. 이러한 사실은 분수나 소수 개념처럼 비와 비례 개념이 학생들에게 오랜 시간에 걸쳐 서서히 습득된다는 연구결과와 6-가 단계의 6단원에서 비와 비율이 처음으로 소개되고 바로 이어서 7단원에서 비례식이 다루어지고 있는 우리나라의 교육과정을 생각할 때 다시 한 번 그 의미를 생각해봐야 할 사항일 것이다.

또한 이종욱(2006)과 Singh(2000)의 연구를 통하여 알 수 있듯이 유사한 비례 문제를 사용하지만 두 연구에서 학생들이 비례 문제를 해결하기 위해 사용하는 지식과 전략이 달랐으며 기존의 지식과 비와 비례 개념을 통합해 나가는 과정 또한 달랐다. 이것은 기존의 학습 내용과 방법, 환경 등이 이후에 새로운 개념을 습득하고 통합하는데 영향을 미치는 것으로 (Ben-Chaim et al., 1998), 단순히 다른 나라의 교육과정과의 비교뿐만 아니라 우리나라의 전체적인 교육과정 틀 안에서 비와 비율, 비례식 학습과 관련하여 도입 시기, 명시적으로 다루는 기간, 다른 내용 요소와의 통합, 다양한 비례 문제 상황과 비례 문제 유형 등이 학생들의 비례적 사고에 어떠한 영향을 미치는지에 대한 포괄적인 연구가 이루어져야 할 것이다. 특히 이 연구에 참여한 두 학생과 같이 일관되게 서로 다른 전략을 발달시켜서 사용하게 된 원인에 대한 심층 연구가 필요하다.

참고문헌

김성준(2004). **대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

장혜원(2003). 수학 학습을 위한 상황문제의 활용. **학교수학, 4**(3), 483-494.

정은실(2003a). 비 개념에 대한 교육적 분석. **수학교육학연구, 13**(3), 247-265.

______(2003b). 비 개념에 대한 역사적, 수학적, 심리적 분석. **학교수학, 5**(4), 421-440.

이종욱(2006). 4학년 아동의 비와 비례 개념 분석. **수학교육학연구, 16**(2), 157-177.

Abels, M., & Gravemeijer, K., (1998). Cereal numbers. In National Center for Research in Mathematical Sciences Ecucation & Freudenthal Institute (Eds.), *Mathematics in context: A connected curriculum for grades 5-8.* Chicago: Encyclopedia Britannica Educational Corporation.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In: D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematical teaching and learning* (pp. 296-333). New York: Macmilan Pulishing Company.

Ben-Chaim, D., Fey, J. T., Fttzgerald, W. M., Benedetto, C. & Miller, J. (1998). Proportional reasoning among 7th grade students with different curricular experiences. *Educational Studies in Mathematics, 36*, 247-273.

Cai, J., & Sun, W. (2002). Developing students' proportional reasoning: A Chinese perspective. In: B. Litwiller, & G. Bright(eds), *Making sense of fractions, ratios, and proportions 2002 yearbook* (pp. 195-205). Reston, Va:NCTM.

Clark, M. R., Berenson, S. B., & Cavey, L. O. (2003). A comparison of ratios and fractions and their roles as tools in proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 297-317.

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and sowing.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

______________(1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Ginsburg, H. (1997). *Entering the child's mind: the clinical interview in psychological research and practice.* Cambridge university press.

Greeno, J. G. (1978). *Constructions in geometry problem solving.* University of Pittsburgh.

Keijzer, R., & Abels, M., (1998). Ratios and rates. In National Center for Research in Mathematical Sciences Ecucation & Freudenthal Institute (Eds.), *Mathematics in context: A connected curriculum for grades 5-8.* Chicago: Encyclopedia Britannica Educational Corporation.

Keijzer, R., van Galen, F., & Gravemeijer, K., (1998). Fractions times. In National Center for Research in Mathematical Sciences Ecucation & Freudenthal Institute (Eds.), *Mathematics in context: A connected curriculum for grades 5-8.* Chicago: Encyclopedia Britannica Educational Corporation.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional resoning. In: M. Behr, & J. Hilbert (Eds.), *Number concepts & operations for the middle grades* (pp. 93-118). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Misailidou, C., & Williams, J. (2003). Diagnostic assessment of children's proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior, 22,* 335-368.

Nabors, W. K. (2003). From fractions to

proportional reasoning: a cognitive schemes of operation approach. *Journal of Mathematical Behavior, 22,* 133-179.

Singh, P. (2000). Understanding the concepts of proportion and ratio constructed by two grade six students. *Educational Studies in Mathematics, 43,* 271-292.

Skemp, R. R. (1987). **수학학습 심리학**. (황우형 역). 서울: 사이언스북스. (영어 원작은 1971년 출판)

Streefland, L., (1998). Grasping sizes. In National Center for Research in Mathematical Sciences Ecucation & Freudenthal Institute (Eds.), *Mathematics in context: A connected curriculum for grades 5-8.* Chicago: Encyclopedia Britannica Educational Corporation.

The School Mathematics Project(2003a). *SMP Interact Book 7C.* Cambridge university press.

________________(2003b). *SMP Interact Book 7S.* Cambridge university press.

________________(2003c). *SMP Interact Book 8C.* Cambridge university press.

________________(2003d). *SMP Interact Book 8S.* Cambridge university press.

________________(2003e). *SMP Interact Book 9C.* Cambridge university press.

________________(2003f). *SMP Interact Book 9S.* Cambridge university press.

Thompson, D. R., Austin, R. A., & Beckmann, C. E. (2002). Using literature as a vehicle to explore proportional reasoning. In: B. Litwiller, & G. Bright(eds), *Making sense of fractions, ratios, and proportions 2002 yearbook* (pp. 130-137). Reston, Va:NCTM.

van den Heuvel-Panhuizen, M., & Streefland, L., (1998). Per sense. In National Center for Research in Mathematical Sciences Ecucation & Freudenthal Institute (Eds.), *Mathematics in context: A connected curriculum for grades 5-8.* Chicago: Encyclopedia Britannica Educational Corporation.

Watson, J. M. (2006). *Statistical literacy at school.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Weinberg, S. L. (2002). Proportional reasoning: one problem, many solutions!. In: B. Litwiller, & G. Bright(eds), *Making sense of fractions, ratios, and proportions 2002 yearbook* (pp. 130-137). Reston, Va:NCTM.

Analysis on Elementary Students' Proportional Thinking : A Case Study with Two 6-graders

Ko, Eun Sung (Korea National University of Education, Graduate School)
Lee, Kyung Hwa (Korea National University of Education)

This study was conducted with two 6-graders to identify how were their proportional reasoning abilities, whether they evolved proportional thinking in a various context, and what had influence on their proportional thinking. The findings, as previous researches noted, suggested that the proportional expression obtaining by instrumental understanding could not provide rich opportunities for students to improve understanding about ratio and proportion and proportional reasoning abilities, while being useful for determining the answers. The students were able to solve proportional problems with incorporating their knowledge of divisor, multiples, and fraction into proportional situations, but not the lack of number sense. The students easily solved proportional problems experienced in math and other subjects but they did not notice proposition in problems with unfamiliar contexts.

* **Key words** : 6th graders (6학년 학생), proportional reasoning abilities (비례 추론 능력), proportional expressions (비례식)

논문접수: 2007. 9. 30
심사완료: 2007. 11. 7

부록 . 면담에 사용한 과제

A. 1차면담에서 사용한 과제

문제 I-1. 영희는 밀가루 6컵으로 빵 14개를 만들었다. 철수가 밀가루 12컵을 가지고 있다면 몇 개의 빵을 만들 수 있겠는가?

문제 I-2. 진수는 4원으로 사탕 8개를 샀다. 민철이가 10원을 가지고 있다면 사탕 몇 개를 살 수 있겠는가?

문제 I-3. 희영이는 4원으로 사탕 6개를 샀다. 수진이가 10원을 가지고 있다면 사탕 몇 개를 살 수 있는가?

문제 I-4. 영희가 밀가루 8컵으로 빵 14개를 만들었다. 철수가 밀가루 12컵을 가지고 있다면 빵 몇 개를 만들 수 있는가?

문제 I-5. 진경이는 빵 21개를 만들기 위해 밀가루 12컵을 사용하였다. 빵 14개를 만들기 위해서는 몇 컵의 밀가루가 필요하겠는가?

문제 I-6. 12초에 37m를 달리는 동물이 있다. 37초 동안에는 몇 m를 달릴 수 있겠는가?

B. 2차면담에서 사용한 과제

문제II-1. 영희와 철수는 각각 밀가루를 6컵, 12컵 가지고 있다. 영희가 빵을 14개 만들었다면, 철수는 몇 개의 빵을 만들 수 있겠는가?

문제II-2. 진수와 민철이가 각각 돈을 4원, 10원씩 가지고 있다. 진수가 구슬을 8개 샀다면 민철이는 몇 개의 구슬을 살 수 있겠는가?

문제II-3. 희영이와 수진이가 각각 돈을 4원, 10원씩 가지고 있다. 희영이가 사탕을 6개 샀다면 수진이는 몇 개의 사탕을 살 수 있는가?

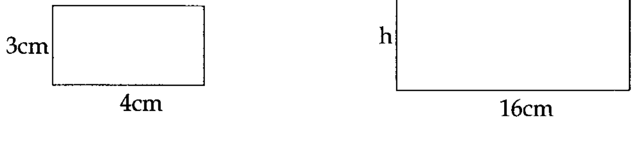
문제II-4. 영희와 철수는 각각 밀가루를 8컵, 12컵 가지고 있다. 영희가 빵을 14개 만들었다면, 철수는 몇 개의 빵을 만들 수 있는가?

문제II-5. 진경이와 민철이는 빵이 각각 21개 14개 필요하다. 진경이가 21개의 빵을 만들기 위해 밀가루를 12컵 사용했다면 민철이는 밀가루가 얼마나 필요하겠는가?

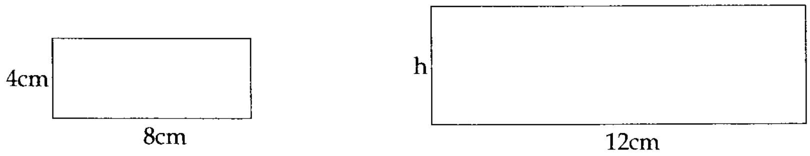
문제II-6. 수진이는 어제와 오늘 각각 같은 빠르기로 12분, 37분씩 걸었다. 어제 237m를 걸었다면 오늘은 몇 m를 걸었겠는가?

C. 3차면담에서 사용한 과제

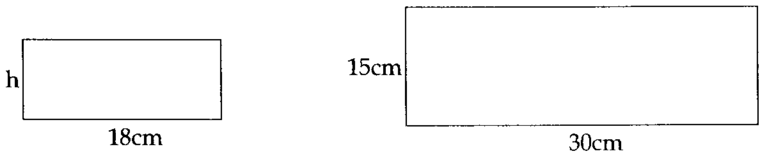
문제III-1. 두 직사각형은 모양이 같다. 높이 h는 몇 cm인가?



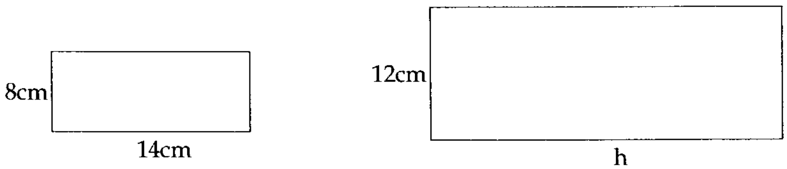
문제Ⅲ-2. 두 직사각형은 모양이 같다. 높이 h는 몇 cm인가?



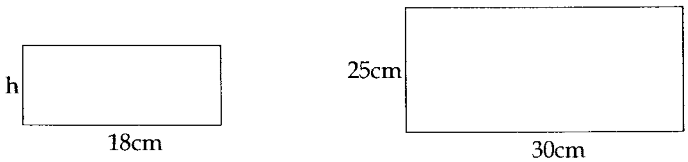
문제Ⅲ-3. 두 직사각형은 모양이 같다. 높이 h는 몇 cm인가?



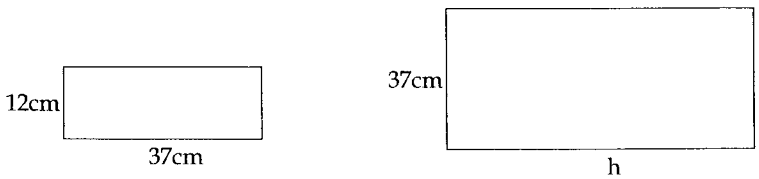
문제Ⅲ-4. 두 직사각형은 모양이 같다. 높이 h는 몇 cm인가?



문제Ⅲ-5. 두 직사각형은 모양이 같다. 높이 h는 몇 cm인가?



문제Ⅲ-6. 두 직사각형은 모양이 같다. h는 몇 cm인가?



D. 4차면담에서 사용한 과제

문제Ⅳ-1. 진수는 검정색 물감 5통과 흰색 물감 8통을 섞고, 민철이는 검정색 물감 3통과 흰색 물감 5통을 섞었다. 누구의 것이 더 어둡겠는가?

문제Ⅳ-2. 진수는 검정색 물감 3통과 흰색 물감 4통을 섞고, 민철이는 검정색 물감 5통과 흰색 물감 8통을 섞었다. 누구의 것이 더 어둡겠는가?

문제Ⅳ-3. 수진이는 네스틱 4스푼에 물을 100ml 넣었고, 진경이는 네스틱 8스푼에 물을 190ml 넣었다. 누구의 것이 더 진한 맛을 내겠는가?

문제Ⅳ-4. 진수는 흰색 물감 8통과 검정색 물감 5통을, 민철이는 흰색 물감 5통과 검정색 물감 3통을, 희수는 흰색 물감 6통과 검정색 물감 4통을 섞었다. 누구의 것이 가장 밝은 색을 내겠는가?

문제Ⅳ-5. 경수네 반은 피자 5판을 8명이 나누어 먹고, 철수네 반은 피자 3판을 5명이 나누어 먹는다. 어느 반의 학생이 더 많은 피자를 먹겠는가?

문제Ⅳ-6. 진수는 검정색 물감 5통과 흰색 물감 8통을 섞었다. 민철이가 검정색 물감 3통과 흰색 물감 몇 통을 섞어야 진수와 같은 밝기의 물감을 만들 수 있겠는가?