대한수학교육학회지 <학교수학> 제 9 권 제 4 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.9, No.4, 447-466. Dec. 2007

초등학생의 비례적 추론 지도에 관한 연구

김 경 선* · 박 영 희**

본 연구에서는 학생들이 비례적 추론 문제에서 어떠한 어려움을 겪고 있는지, 어떠한 문제해결전략을 사용하는지를 구체적으로 살펴보고, 현행 교과서의 문제점은 무엇인지 등을 조사하여 이를 바탕으로 6-가 단계 '비례식' 단원에 관한 지도 프로그램을 개발하여 학생들의 비례적 추론에 대한 개념변화를 알아보고자 하였다. 먼저 학생들 대상의 검사지를 분석해 본 결과, 학생들은 비례적 상황 문제에서 취약함을 보였다. 이에 따라 연구자가 제작한 프로그램을 초등학교 6학년 학생들에게 적용해 보고 상중하 수준에 따른 학생들의 변화를 알아보았다. 또한 실험반과 비교반의 학생들의 상중하 수준에 따른 비례추론의 특성을 비교하였다.

I. 서 론

학교교육에 있어서 수학교육의 중요성은 수학이 모든 학문을 위한 기초과목이면서, 다양한 방면에서 응용되고 있다는 점이다. 따라서 학생들에게 수학의 중요성을 이해시키고, 일상생활에서 접하게 되는 다양한 문제를 합리적으로 해결할 수 있는 능력을 키워 실세계의 상황에 언제나 적용될 수 있어야 한다.

비와 비례는 일상생활에서 자주 사용되는 것은 물론 문제해결, 일반적인 사고유형에서도 매우 중요하다. 비례를 생각할 수 있는 능력은 형식적인 사고를 하는데 매우 중요한 요소 중의 하나이다. 비례에 대한 개념형성에 실패하게 되면 대수, 기하는 물론 과학의 일부분을 포함하여 양적인 사고와 이해를 필요로 하는 학습을 할 수 없게 된다(강지형 외, 1999). 비례적 추론이 일상생활에서 자주 사용되고 있음에도 불구하고 학생들은 비례적 추론을 어렵게만 느낀다고 한다.

2005년에 충주시 J초등학교의 6학년 한 학급 학생에게 1학기의 수업을 모두 마친 후 수학 6-가 단계, 9개의 단원에서 가장 어렵다고 생각한 부분이 무엇인지 조사해 보았다. 그 결과, 총 28명의 학생 중 18명(64.28%)의 학생이 '비례식' 단원이 가장 어려웠다고 하였다.

따라서 본 연구에서는 학생들에게 비례적 추론 문제를 제시했을 때 그들이 어떠한 어려움을 겪고 있는지, 어떠한 문제해결전략을 사용하는지, 현행 교과서의 문제점은 무엇인지를 조사하고 이를 바탕으로 6학년 가 단계 '비례식' 단원에 관한 지도 프로그램을 개발하여 학생들의 비례적 추론에 대한 개념변화를 알아보고자 한다.

* 포천태봉초등학교(coolseon97@hanmail.net)
** 청주교육대학교(yhpark@cje.ac.kr)

II. 이론적 배경

1. 비례적 추론

비례적 추론은 수학적 추론 중의 한 형태이며 NCTM(2000)에서 학생들이 이용 가능한 추론 형태가 '대수적 추론, 기하 추론, 비례 추론, 확률 추론, 통계 추론 등'으로 확장되어야 함을 주장하였다. 또한 NCTM(1989)에서는 비례적 추론을 다음과 같이 말하고 있다. "학생들의 비례적 추론 능력은 5~8학년을 통하여 발달해 나간다. 시간과 노력이 비례적 추론 능력 발달을 조장한다는 것이 중요하다. 학생들은 모델화하고 그리고 나서 비례적 추론을 통하여 해결할 수 있다. 많은 문제 상황을 이해해야만 한다."

특별히 비례적 추론이 대수 학습에서 중요한 이유를 Post, Behr, & Lesh(1988)는 세 가지로 제시하고 있다. 첫째 비례성은 수학적 함수의 강력한 예이고 일차방정식으로 표현할 수 있는데 이것은 대수적 형태에서 표현될 수 있는 가장 추상적인 관계와 수적인 경험과 패턴 사이의 편리한 교량 역할을 한다. 둘째, 비례는 비율 문제의 다양한 타입(속도, 혼합, 농도, 크기, 변환, 가격, 비교의 다른 형태의 예들)과 같은 다양한 상황에서 유용하다. 셋째, 대수적 사고와 이해는 다른 표현 방식을 가지고 있다. 즉 표, 그래프, 그림, 다이어그램 등은 대수적 개념들을 표현할 수 있는 중요한 방법들이며, 이들 방법들 내에서 전이를 일반화하고 이해하는 능력을 설명할 수 있는 전달수단이 비례적 추론이다.

2. 비례적 추론의 발달 수준 및 문제해결 전략

가. 비례적 추론의 발달 수준

비례적 추론의 발달 수준은 학자마다 조금씩 다르지만 크게 4가지로 분류해볼 수 있다. 첫째는 비례적 관계로 이루어진 두 양 사이의 관계를 인식하지 못하는 단계이다. 둘째는 이 두 양 사이의 관계를 질적으로 추론하는 단계이다. 셋째는 두 양 사이의 관계를 덧셈으로 인식하며 문제의 의미를 추론하는 단계이고 넷째는 덧셈이 아닌 곱셈의 관계로 인식하여 추론하는 단계이다.

Baxter와 Junker(2001)는 비례적 추론 발달 단계를 5단계로 구분하고 있다. 첫째, 질적 추론 단계로 학생들은 정확한 수치로 비교하지 못하지만 양에 대해여 더 많다, 더 적다, 같다로 비교하는 수준이고, 둘째, 양의 초기 시도 단계로 학생들은 얼마나 많고, 얼마나 더 많은지에 대해 곱셈적 관계보다 덧셈적 차이점을 사용하여 비교하는 수준이며 셋째, 곱셈적 관계를 인식하는 단계로 학생들은 변하는 두 수 사이의 관계를 비로 표현하기 시작하며 곱셈적 추론을 해야 할 때 전부 세거나, building-up전략을 사용한다. 넷째, 공변과 불변의 조화 단계로 학생은 양이 변화하는 동안에 양 사이의 불변하는 양이 존재한다는 것을 인식하게 되고, 곱셈적 추론을 발전시키는 수준이며, 다섯째, 함수와 스칼라의 연산 관계를 이해하는 수준이다. Karen과 Lesh(2003)도 비례적 추론 발달 단계를 5단계로 구분하고 있다. 1단계는 문제를 이해하는 단계이고 2단계는 문제 상황으로부터 단지 질적 관계를 파악하는 단계로 수를 사용하지 않으며 3단계는 덧셈 관계를 추론하는 단계이고 4단계는 패턴을 인식하고 반복을 통해 추론하는 단계이고 5단계는 둘 이상의 양 사이 관계를 인식하는 단계로 복잡한 비례 추론을 개념화 한다(홍수영, 2006, pp 10~23에서 재인용).

나. 비례적 추론의 문제해결전략

아동들은 비례와 관련해서 문제에 접했을 때 전통적인 기호적 표현 지식이 없을 때는 그들

이 가지고 있는 자연수 연산을 통하여 세는 것, 매칭, 모델링 방법을 이용해서 성공적으로 해결할 수 있으며(Lamon, 1993) 더 나아가 수학적 관점으로부터 비 사고를 할 수 있는 두 가지 방법이 있다. 하나는 두 집합간의 수를 비교하는 방법으로서 between전략이라고 하고 다른 하나는 한 집합내에서 수를 비교하는 방법으로 within전략이라고 한다(Hart, 1988; Karplus et al., 1983; Lamon, 1993). 비례 문제를 해결하기 위한 전통적인 대수적 cross-multiply와 나누기 방법은 교과서에서 사용되는 주된 전략임에도 불구하고 학생들 대부분은 의미 있게 사용하지 못한다(Karplus et al., 1983). 그렇기 때문에 이러한 비형식적인 지식은 더욱 복잡한 비례 문제 해결에 포괄적으로 응용되고 확장시켜 학생들이 먼저 이해를 한 후에 기호사용을 해야 한다(Lamon, 1993).

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

연구 대상은 크게 2부류로 나뉜다. 첫째 대상은 2006년 2월 현재 초등학교 6학년 학생 A반 5명, B반 27명으로 총 32명이다. 연구자는 이 학생들을 통해서 비례적 추론 지도 프로그램을 개발하기 위해 원천이 되는 비례적 추론에 대한 이해 정도를 파악하게 된다. 이들은 충북 충주시에 있는 J초등학교 6학년 학생들로써 27명 중 17명(63%)이 방과 후에 학습을 보충하기 위해 학원이나 가정에서 수학과 관련된 학습지 등을 공부하고 있었다. 이들이 학교에서 배운 6-가 비례식 단원은 2005년 1학기 때 학습을 마친 상태였다.

둘째 대상은 2006년 3월 현재 초등학교 6학년 학생들이다. 이들은 경기도 포천시에 위치한 T초등학교 학생들로 실험반과 비교반으로 나뉘어 각각 32명의 학생들로 구성되어 있다. 각 반의 32명 학생들은 좀 더 세부적으로 수학점수 정도에 따라 상위권 10명, 중위권 14명, 하위권 8명으로 분류하였다. 실험반 학생들은 연구자의 프로그램에 의해서 6-가 비례식 단원의 수업을 대체하였으며 비교반은 교과서대로 수업을 받았다. 실험반의 68%와 비교반의 70% 학생들이 방과 후에 학원이나 가정에서 수학과 관련된 공부를 하고 있었다.

2. 연구 방법 및 절차

첫째, '비례적 추론 지도 프로그램'을 개발하기 위해 이미 6-가 단계 '비례식' 단원을 학습한 2006년 2월 현재 6학년 학생 5명에게 비례적 추론과 관련된 '이해도 예비 검사지'를 제작하여 투입한다. 이 자료를 분석하여 미비한 점을 보강한 후 2006년 2월 현재 6학년 학생 27명에게 '비례적 추론에 대한 이해도 검사지'를 투입하여 학생들이 가지고 있는 비례적 추론에 대한 이해 정도를 조사 · 분석한다.

둘째, 우리나라 제7차 교육과정 수학과 6-가 단계 비례식 단원의 교과서 내용을 분석한다.

셋째, 비례식 단원의 수업 설계에 대한 기본 방향을 설정한다.

넷째, 각 차시별로 비례식 단원의 수업 프로그램을 개발한다.

연구자는 실험반 학생들의 '비례식' 단원 수업에서 참여적 관찰자(토론자, 조언자)의 역할을 하며, 학생들의 개념 형성 과정 및 그 수준에 관한 자료를 수집 · 분석 하였다. 그래서 실험반과 비교반에 사전 검사지를 투입하여 학생들의 비례적 추론에 관한 이해 정도를 조사하고, 실험반에게 연구자가 설계한 수업 프로그램을 정규교과시간에 적용하여 비례적 추론과

관련된 개념 변화와 반응을 분석한다. 마지막으로 실험반과 비교반에 사후 검사지를 투입하여 비례적 추론에 대해 나타난 차이점을 분석한다.

3. 예비 검사

프로그램 개발에 앞서 초등학교 6학년 학생들의 비례적 추론에 대한 이해도를 조사하기 위해 권성룡 외(2005) 등을 참고하여 연구자가 검사지를 제작하였으며, 현행 초등학교 6학년 교과서의 '비례식' 단원에 맞는 학습목표와 연구자가 분석틀로 사용할 문제해결전략을 기준으로 구성하였다. '비례적 추론에 대한 이해도 예비검사'를 실시하여 검사 문항과 질문 형태를 보완하였다. 그리고 예비검사를 실시한 3일 후에 본 검사를 실시하였다.

4. 본 검사

본 검사는 2가지로 나뉜다. 하나는 학생들의 비례적 추론에 대해 어떻게 이해하고 있는지를 검사하는 것과 다른 하나는 비례적 추론 프로그램을 개발하여 적용한 결과를 분석하는 것이다. 예비검사를 바탕으로 제작된 본 검사지는 2006년 2월 충주시 J초등학교 A반 27명의 학생에게 투입되었다.

5. 6학년 학생들의 비례적 추론에 관한 이해도 조사와 분석 결과

'비례적 추론에 대한 이해도 예비검사지'를 바탕으로 연구자가 작성한 '비례적 추론에 관한 이해도 검사지'의 내용은 <표 III-1>과 같다.

이를 학생들에게 적용시켜 나타난 결과인

<표 III-1> 비례적 추론에 대한 이해도 검사지의 문항별 특징과 문제해결전략

문항 번호	문항의 특징	문제해결전략
1	비의 전항과 후항을 알고 있다.	·
2	비례식의 외항과 내항을 알고 있다.	·
3	비의 전항과 후항에 0이 아닌 수를 곱하여도 비의 값이 같음을 알고 있다.	·
4	비의 전항과 후항에 0이 아닌 수로 나누어도 비의 값이 같음을 알고 있다.	·
5	비의 성질을 이용하여 주어진 비를 가장 간단한 자연수의 비로 나타낼 수 있다. (5-1) 자연수 : 자연수 (5-2) 소수 : 소수 (5-3) 분수 : 분수	비례식 알고리즘 전략 비례 전략
6	비례식에서 외항의 곱과 내항의 곱이 같음을 알고 있다.	·
7	미지항이 있는 비례식에서 비례식의 성질을 이용하여 미지항의 값을 구할 수 있다. (7-1) 답이 자연수 (7-2), 답이 분수 또는 소수	비례식 알고리즘 전략 비례 전략
8	가법적 상황인 문제	가법적 전략
9	가법적 상황임에도 불구하고 비례적 문제해결전략을 사용할 만한 문제	
10	한 개의 값이 정수(자연수)로 나타내어지는 문제	덧셈 전략 building up 전략 한 단위 전략 비례식 알고리즘 전략 비례 전략
11	한 개의 값이 정수가 아니며 소수로 떨어지는 문제	
12	한 개의 값이 정수가 아니며 소수로 떨어지지 않는 문제	
13	정비례적 관계(맥락)가 아닌 형태에서 학생들의 비례적 사고를 이끌어 낼 수 있는 문제	

'비례적 추론에 대한 이해도 검사지'의 오답률은 <표 III-2>와 같다.

문항별 오류를 분석해 본 결과 첫째, 학생들은 비례적 관계로 주어진 문제에서 한 개의 값이 자연수가 아닌 소수나 분수인 상황에서는 취약함을 보였다. 둘째, 비례적 상황과 그렇지 않은 상황을 구별하지 못하고 있었다. 셋째, 11, 12번 문제에서는 다양한 오류가 나왔는데 두 문제 모두에서 비례식 알고리즘 전략을 사용할 때 비례식의 순서를 잘못 적는 오류를 보였다. 넷째, 정비례 관계가 아닌 문제에 대하여 그 의미를 제대로 파악하지 못하거나 비례식 알고리즘 전략이나 비례 전략으로만 문제를 해결하려고 하였다. 다섯째, 상위권에 있는 학생 2명이 13번을 제외한 서술형 문제에서 모두 비례식 알고리즘 전략을 사용했다. 이들은 문제의 맥락보다는 비례식 알고리즘에 주어진 숫자를 끼워 넣으려고 한 것으로 판단된다.

6. 비례적 추론 지도 프로그램 구성

가. 비례식 단원 교과서 분석

첫째, 교과서에서 생활과 관련된 내용이 부족하다. 둘째, [그림 III-1]과 [그림 III-2]는 제7차 교육과정 6-가 단계 교과서에 나와 있는 내용으로써 비례식의 성질을 알아보기 위한 설명 없이 곧바로 외항과 내항의 곱을 단순 비교하여 알고리즘화 하고 있다.

Freudenthal이 지적한 바와 같이 비례식 성질을 알고리즘화 하기 이전에 학생들에게 통찰의 기회를 주어 무의식적이었던 것이 점진적으로 의식화되고 언어화 되지 않았던 것이 점차 명확한 언어화를 지향해야 함(우정호. 2000)에도 불구하고 교과서 에서는 단순히 외항의 곱과 내항의 곱이 얼마이며 이 값을 비교하도록 하고 있다.

둘째, 학생들은 비례 관계에서 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$와 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$이 동치이며 둘 중에서 자유롭게 선택할 수 있음을 알아야 한다(권성룡 외 역, 2005). 하지만 [그림 III-3]과 [그림 III-4]처럼 교과서에서는 내적비는 전혀 없고 외적비만을 다루고 있다.

[그림 III-3]의 내용은 서술형으로 쓰여진 그대로를 비례식 구조에 끼워 넣도록 숫자가 순서대로 외적비를 이루고 있으며 [그림 III-4]의 내용은 서술형 문제 자체에 5:1이라는 외적비가 쓰여져 있다.

<표 III-2> 이해도 검사지에 대한 각 문항별 오답률

문제	1	2	3	4	5-1	5-2	5-3	6	7-1	7-2	7-3	8	9	10	11	12	13
오답률(%)	11	22	15	22	7	30	48	0	15	48	63	56	67	11	48	63	30

1 2 : 3=4 : 6에서 비례식의 성질을 알아보시오.

- 외항의 곱은 얼마입니까?
- 내항의 곱은 얼마입니까?
- 외항의 곱과 내항의 곱을 비교하여 보시오.

[그림 III-1] 교과서의 알고리즘화 I

1 비례식 3 : 4=9 : □에서 □를 구하여 보시오.

- 외항의 곱을 곱셈식으로 나타내어 보시오.
- 내항의 곱을 곱셈식으로 나타내어 보시오.
- 외항의 곱과 내항의 곱을 등식으로 나타낼 수 있습니까?
- 외항의 곱과 내항의 곱을 등식으로 나타내고, □를 구하여 보시오.

[그림 III-2] 교과서의 알고리즘화 II

나. 비례적 추론 지도 프로그램 구성

비례적 추론 지도 프로그램은 '비례식을 이해하고, 비의 전항과 후항, 비례식의 외항과 내항을 알 수 있다.'(1 · 2차시), '비의 성질을 알고 이를 이용할 수 있다.'(3 · 4차시), '비례식의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있다.'(5 · 6차시), '비례적 상황과 그렇지 않은 상황을 구별할 수 있다.'(7차시)의 총 7차시 활동으로 구성하였다.

각 차시의 내용은 학습 목표, 활동, 약속하기의 형식으로 이루어져 있다. 활동의 내용은 주로 일상생활이나 신문에서 접하게 되는 내용을 중심으로 이루어졌으며 학생과 교사간의 자유로운 의사소통을 위하여 매 문항마다 질문의 형식으로 구성하였다. 약속하기 부분에서는 학생들이 공부한 내용을 복습하는 내용으로 이미 앞에서 학생들 스스로 파악한 내용을 정교한 글로 다듬어 학생들에게 제공하고자 하였다.

비례적 추론의 이해도 검사 및 교과서 분석에서 나타난 오류들과, 이를 보완하기 위한 지도 프로그램 내용을 <표 III-3>에 요약하였다. <표 III-4>는 연구자가 설정한 비례적 추론 지도 프로그램의 기본 방향과 그에 따른 차시별

생활에서 알아보기

빵 2개를 만드는 데에 달걀이 3개 필요합니다. 빵 4개를 만드는 데에는 달걀이 몇 개 필요한지 알아보시오.

[그림 III-3] 교과서의 외적비 I

생활에서 알아보기

병주네 집에서는 쌀과 보리쌀을 5 : 1의 비로 섞어서 밥을 짓는다고 합니다. 쌀을 400 g 넣으면, 보리쌀은 몇 g을 넣어야 하는지 알아보시오.

[그림 III-4] 교과서의 외적비 II

<표 III-3> 비례적 추론의 이해도 검사와 교과서 분석을 토대로 한 지도 프로그램 내용

구분	비례적 추론의 이해도 검사에서 나타난 오류	지도 프로그램 내용	관련된 차시별 활동
이해도 검사지	한 개의 값이 소수나 분수인 상황 취약	'가장 간단한 자연수로 만들기' 활동 제시	3~4차시 중 활동 2
	비례적 상황과 그렇지 않은 상황 구별 못함	'비례적 상황과 그렇지 않은 상황 구별하기' 활동 제시	7차시
	비례식 순서 잘못 세움	'비례식에 이름 붙이기' 활동 제시	5~6차시 중 활동 2
	정비례가 아닌 문제의 의미 파악 못함	'비례적 상황과 그렇지 않은 상황 구별하기' 활동 제시	7차시
	상위권에서 비례식 알고리즘 전략만을 사용	다양한 비례 전략 유도	매 차시
구분	교과서 분석 결과	지도 프로그램 내용	관련된 차시별 활동
교과서	혼란스런 시각화	'비가 같은 것끼리 선으로 연결하기', '그림 속에서 비례의 의미 이해하기'와 '빈 칸 채우기' 활동 제시	1~2차시 중 활동 3, 4와 3~4차시 중 활동 1
	단순한 알고리즘만을 제시	'비례식 성질 알기' 활동 제시	5~6차시 중 활동 1
	내적비 · 외적비의 선택 기회 없음	'비례식에 이름 붙이기' 활동 제시	5~6차시 중 활동 2

활동을 요약해 놓은 것이다.

1) '가장 간단한 자연수로 만들기' 활동

학생들의 이해를 쉽게 돕기 위해 먼저 1~2차시 활동 2 '신문 속에서 비례의 의미 이해하기' 부분에서 소수점으로 주어진 상황을 자연수로 나타내도록 유도하였다.

즉, '각 학년의 남학생이 1000명이라면 각각의 여학생은 몇 명입니까?'라는 형식의 질문을 통해 학생들은 별다른 계산과정 없이 소수점을 자연수로 바꿀 수 있다. 또한 '2학년과 3학년의 남학생 중 어느 학년이 여학생과 짝을 이루지 못하겠습니까?'와 '2~6학년 중 여학생과 짝을 이루지 못하는 남학생이 제일 많은 학년은 몇 학년입니까?'라는 질문에 답함으로써 본문의 내용에서 소수점이 의미하는 것을 자세히 알 수 있다.

1~2차시 활동4 '그림 속에서 비례의 의미 이해하기' 부분은 모눈종이에 그려진 그림을 축소시켜 소수의 비를 직관적으로 이해할 수 있도록 하는 부분인데, 자연수와 소수의 관계를 시각적으로 이해할 수 있도록 사각형의 세로 칸을 3칸에서 1.5칸으로 축소시키도록 유도하였다. 본 프로그램의 1~2차시 내용은 3~4차시 활동 2를 위한 선수학습인 셈이다.

3~4차시 활동2는 이렇게 학습한 선수학습을 수식화 하는 단계이다. 먼저 '무슨 수라고 하나요?'라는 질문을 통해 학생들이 자연수의 의미를 파악하도록 했고, 가장 간단한 자연수를 만들기 위해 보다 더 큰 자연수를 도입하여 공약수나 최대공약수로 나누어 간단한 자연수를 만들었다. 그 후에 가분수나 대분수인 상황을 도입하여 공배수나 최소공배수의 쓰임을 학생들이 찾아내도록 유도하였다.

2) '비례적 상황과 그렇지 않은 상황 구별하기' 활동

'다음 중에서 공평하게 양을 비교할 수 있는 문장을 찾아 O표 합시다.'라는 내용으로 다양한 문제를 가지고 비례 추론을 연습하도록 하였다. 이중 ④번은 가법적인 상황으로 '같은 속도'라는 것에 착안하여 가법적인 규칙성을 나타내는 문장이다. ⑦번 또한 정비례 관계가 아닌 상황으로 가법과 승법 둘 다의 규칙성을 찾아야 하는 내용이다. 이를 통해 학생들은 비례적 상황인 공평한 것의 특수성 즉 승법적인 내용과 그렇지 않은 것을 구별하게 된다.

3) '비례식에 이름 붙이기 놀이' 활동

권성룡 외(2005)는 비례식 각 항에 이름을 붙이게 되면 부분-부분 관계 또는 전체-부분 관계를 확인하는데 도움이 된다고 주장한다. 이를 참고하여 프로그램에서는 비 형태로 이름을 붙이고자 한다. 학생들이 비의 값보다는 비 형태를 학습해야 비를 비의 값으로 고치는 단계로 나갈 수 있어 이들 사이의 연결을 자연스럽게 터득할 수 있기 때문이다. 이것을 연구자는

<표 III-4> 비례적 추론 지도 프로그램의 기본 방향과 차시별 활동

비례적 추론 지도 프로그램의 기본 방향		차시별 활동
개념 단계	질적 추론	1~2 차시 중 활동1
	비형식적 전략 유도	1~2 차시 중 활동3
연결 단계	기호로 연결 : 그림이나 표 등의 시각화	1~2 차시 중 활동4, 3~4 차시 중 활동1
	두 수 사이의 규칙성	매 차시
기호 단계	비례식의 형식 논의	5~6 차시 중 활동1
	이름 붙이기	5~6 차시 중 활동2

'이름 붙이기 놀이'라고 정의한다. 비례식으로 쓰인 4 가지 다른 방법 중 올바른 방법이 무엇인지를 이름 붙이기 놀이로 확인하도록 하였다. 이런 놀이를 통해 학생들은 비례식의 형식이 어떠한 관계로 이루어져야 하는지 명확하게 파악할 수 있게 된다.

4) '다양한 비례 전략 유도' 활동

비례적 추론의 이해도 검사를 통해서 상위권 학생들이 비례식 알고리즘 전략만을 사용하는 경향이 있기 때문에 만든 내용이다. '다른 방법은 없습니까?'라는 연구자의 질문을 통해 학생들에게 기존의 고정된 풀이법 이외에 다른 해결방법을 찾아보도록 독려하였다.

5) 일상생활과 관련된 내용 제시

본 연구 프로그램 매 차시에 도입되는 내용이다. 교과서에서 생활과 관련된 내용이 부족하여 만들었다. 프로그램의 각각 활동마다 제시되는 본문이 모두 우리의 일상생활이나 신문, 요리책 등의 내용을 토대로 발췌하거나 연구자가 제작한 것이다.

6) '비가 같은 것끼리 선으로 연결하기', '그림 속에서 비례의 의미 이해하기', '빈 칸 채우기' 활동

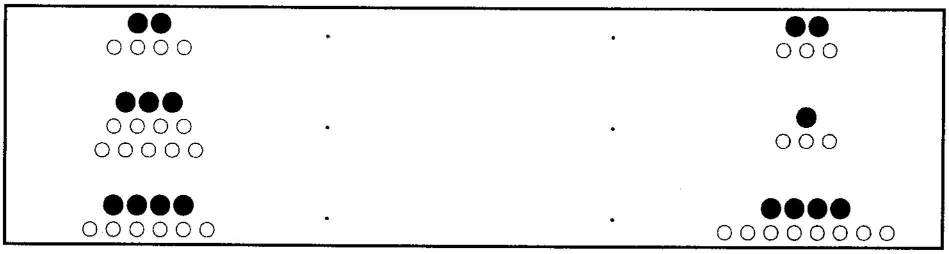
[그림 III-5]에 제시된 1~2차시 활동 3은 그림에서 흰 공에 대한 검은 공의 비가 같은 것끼리 선으로 연결하여 비의 값이 같음을 이해하고 이를 통해 비례식의 형태로 나아가는 내용이다.

1~2차시 활동4는 삼각형과 사각형으로 이루어진 도형을 축소시켜 그려봄으로써 같은 비율로 축소시키면 비의 값이 같다는 것을 깨달아 비례식으로 확장해 가는 내용이다.

3~4차시 활동1은 빈 칸 채우기 활동을 통해 A, B, C의 관계와 A′, B′, C′의 관계를 파

◎ 1~2차시 활동3 : 비례식을 이해하고, 비의 전항과 후항 · 비례식의 외항과 내항 알기

다음 그림에서 흰 공에 대한 검은 공의 비가 같은 것끼리 선으로 연결하시오.



①비가 같은 것이 모두 몇 개 입니까?⇒
②선으로 연결한 것을 비로 나타내 봅시다.⇒
③선으로 연결한 것을 비의 값으로 나타내 봅시다.⇒
④선으로 연결한 비의 값이 모두 어떻습니까?⇒
⑤이러한 비를 어떻게 나타내면 좋을까요?⇒
⑥다른 방법은 없습니까?⇒
⑦비의 값이 같은 두 비를 등식으로 나타낸 식을 무엇이라고 하면 좋을까요?⇒
⑧비 2:3에서 2와 3을 항이라고 합니다. 그럼 2와 3을 각각 무슨 항이라 하면 좋을까요?⇒
⑨2:3=4:6이라고 쓴 것을 비례식이라 합니다. 그럼 2, 6을 무슨 항이라 하면 좋을까요?⇒
⑩3, 4를 무슨 항이라 하면 좋을까요?⇒

[그림 III-5] 비례식 의미 이해하기

악하여 비의 값을 비교해 비의 성질을 알아내는 내용이다.

교과서 내용에서 같은 숫자만큼 차례로 증가하는 것이 비례적 추론과 가법적 추론의 혼동을 가져올 수 있다고 보았다. 그래서 3~4차시 활동에서 '②위의 그림을 보고 아래 1, 2번 표의 빈 칸을 채우시오.'를 통하여 숫자의 변동은 있으되 차례대로 증가하는 것이 아니라 규칙적으로 증가하였다가 감소하였다가를 반복할 때에 학생들이 비의 값을 비교해 보도록 유도하였다.

7) '비례식 성질 알기'활동

[그림 III-6]의 마지막 질문을 통해 학생들에게 교과서에 쓰여 있는 비례식의 성질 즉 $a:b=c:d$의 형태로 쓰여 있을 때 '내항의 곱은 외항의 곱과 같다'라는 것 이외에 다른 다양한 방법들을 찾아내도록 유도하였다. 이것은 비례식의 또 다른 형식을 찾도록 하는 내용이기도 하다.

8) 질적 추론

이 활동은 일상생활에서 비례의 의미를 이해하는 것으로써 [그림 III-7]처럼 '비교적 ~보다 더 ~한'의 질적 추론 개념에서 시작하여 비율의 양이 똑같이 증가하는 것이 비례의 의미임을 학생들이 알아내도록 고안하였다.

◎ 5~6차시 활동1 : 비례식 성질 알기

미란이는 집 배관을 고치기 위해 PVC 파이프 7m를 1200원 주고 샀습니다. 하지만 배관을 고치기 위해서는 PVC파이프가 더 필요하다는 것을 깨달았습니다.

①35m가 더 필요하다면 얼마의 돈이 더 들겠습니까? 1200원 보다 더 많이 들까요?⇒
②어떻게 풀었습니까?⇒
③다른 풀이법은 없을까요?⇒
④여러분이 푼 관계를 비례식으로 써 봅시다. 그 속에 숨겨진 비밀을 찾아봅시다.⇒

[그림 III-6] 비례식 성질 알기

◎ 1~2차시 활동1 : 일상생활에서 비례의 의미 이해하기

주연이는 마트에서 165g짜리 A사 제품 장조림 3캔을 1,800원 주고 샀습니다.
태권이는 마트에서 330g짜리 B사 제품 장조림 1캔을 1,000원 주고 샀습니다.
민영이는 마트에서 165g짜리 C사 제품 장조림 9캔을 7,200원 주고 샀습니다.
가은이는 마트에서 165g짜리 D사 제품 장조림 30캔을 18,000원 주고 샀습니다.

①주연이는 민영이 보다 장조림을 더 비싸게 샀습니까? 싸게 샀습니까? ⇒
②왜 그렇습니까? ⇒
③주연이와 태권이 중에 누가 더 비싸게 샀습니까? ⇒
④왜 그렇습니까? ⇒
⑤주연이와 가은이 중에 누가 더 비싸게 샀습니까? ⇒

[그림 III-7] 일상생활에서 비례의 의미 이해하기

Ⅳ. 결과 분석

1. 비례적 추론 지도 프로그램 적용 결과 분석

프로그램 투입 중에 나타났던 학생들의 특징은 다음과 같이 3가지로 나타낼 수 있다. 첫째, 학생들에게 그들만의 비형식적 전략을 고안하도록 유도하고 비례식의 알고리즘 형식을 나름대로 조직해 보도록 요구하였으나 학생들은 틀에 박힌 사고 이외에 새로운 것을 만들어 내지 못했으며 수업시간에 아직 학습한 내용이 아닌데도 비례식이나 그 성질에 대해서 알고 있었다. 이것은 이미 실험반 68%의 학생들이 비례식을 학원 등에서 예습해 왔기 때문에 파생된 결과라 판단된다.

둘째, 하위권 학생은 본 프로그램의 1・2차시 지도안 중 '활동 1 : 일상생활에서 비례의 의미 이해하기' 부분은 잘 해결하며 '비교적 ~보다 더 ~한'의 개념은 잘 이해하나 이것을 비례식으로 옮기는데 어려움을 겪고 있으며 최하위권 학생들은 약수나 배수, 최소공배수, 최대공약수, 분수의 곱셈・나눗셈 등의 선수학습이 이루어져 있지 않아 나머지 학습이 제대로 진행되지 않았다.

반면 이보다 나은 <사례 IV-1>의 하위권 학생인 하1은 비례의 개념을 점점 깨달아 가고 있었다.

<사례 Ⅳ-1> 하위권 학생의 비례 의미 이해

교사 : 지금 4사람이 피자 6개를 먹었으면 두 사람이 각각 몇 개를 먹어야 하지?

하1 : 1.5개

교사 : 2사람이 모두 몇 개를 먹는 거지?

하1 : 3개

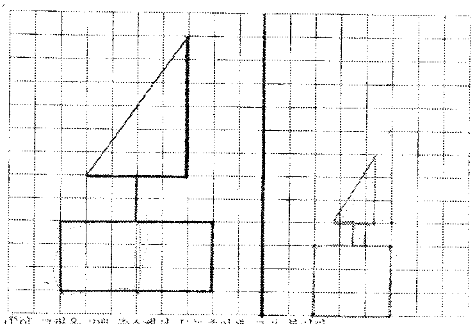
교사 : 그럼 8명이 있으면?

하1 : 피자조각은 그대로 있는 거죠? 8명이 있으면 피자도 2배로 늘리는 거예요?

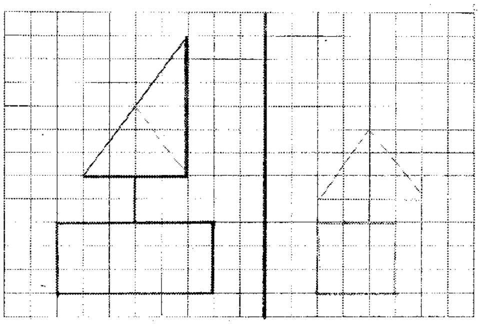
교사 : 그렇지.

<사례 Ⅳ-4>에서 하위권 학생인 하1은 '~배'라는 승법적 사고를 했다. 이 학생은 사전・사후 검사지에서 가법적 상황의 문제는 잘 해결하였으나, 사후 검사의 비례적 상황 문제에서 비례식 성질을 자기의 편의에 맞게 사용하였다.

셋째, 본 프로그램의 1・2차시 지도안 중 '활동 4: 그림 속에서 비례의 의미 이해하기' 부분에서 상・중・하위권 학생들의 대부분이 오류를 나타냈다. 다음 [그림 Ⅳ-1]과 [그림 Ⅳ-2]는 이 학생들이 학습지에 그린 그림이다.



[그림 Ⅳ-1] 상위권 학생의 오류



[그림 Ⅳ-2] 중위권 학생의 오류

상위권 학생들은 [그림 Ⅳ-1]과 같이 삼각형을 2배로 잘 축소했으나 사각형은 2배로 축소하지 못하고 반으로 잘라 표현했으며, 중위권

학생들은 [그림 Ⅳ-2]처럼 삼각형도 한 점을 잡아 반으로 나타냈다. 하위권의 학생들은 그림으로 표현하는데 어려움을 겪었다. 전반적으로 '삼각형과 사각형을 2배로 축소하기'에는 어려움을 겪고 있었으나, 이를 수량화나 형식화로는 별 무리 없이 나타내었다. 즉, 모눈종이에 그린 그림을 보고 이를 비로 나타내어 서로 비의 값을 비교하는 부분은 최하위권 학생을 제외하고 모두 잘 해결하였다.

2. 사전·사후 검사 분석

비례적 추론에 대한 사전·사후 검사는 연구자가 계획한 자료 분석 유형을 바탕으로 분석하였으며 유의미한 분석 결과가 나왔을 경우 학생들에게 개별적으로 인터뷰를 하였다. 비례적 추론에 대한 사전·사후 검사지의 문제 유형과 관련된 문제 해결 전략은 <표 Ⅳ-1>과 같다.

이 사전, 사후 검사는 Baroody & Coslick (1998)의 비례 추론 관련 문제를 참고하고 본 연구자간의 협의를 거쳐서 문제 유형에 적합한 문항을 개발한 것이다. 그리고 이를 28명의 6학년 학생들에게 검사를 실시하여 문항의 내적 신뢰도를 알아보았다. 그래서 사전 검사 및 사후 검사에 대한 Cronbach alpha가 각각 0.556과 0.786으로 나타났고 따라서 어느 정도 내적 신뢰성을 가진 것으로 판단하였다.

실험반과 비교반의 전체 및 상·중·하위권별 사전과 사후 검사의 정답율을 살펴보면 <표 Ⅳ-2>~<표 Ⅳ-7>과 같다.

<표 Ⅳ-1> 비례적 추론에 대한 사전·사후 검사지의 문제 유형

번호	문제 유형	문제해결전략
1	1) 수치적인 비례식 문제(한 개의 값이 자연수) 2) 수치적인 비례식 문제 (한 개의 값이 소수나 분수) 3) 수치적인 비례식 문제 (한 개의 값이 소수나 분수)	단순한 알고리즘 비례 전략
2	가법적 상황 문제Ⅰ	가법적 전략
3	가법적 상황 문제Ⅱ	가법적 전략
4	한 개의 값이 정수(자연수)로 나타내어지는 문제Ⅰ	덧셈 전략 building up 전략 한 단위 전략 비례식 알고리즘 전략 비례 전략
5	한 개의 값이 정수(자연수)로 나타내어지는 문제Ⅱ	
6	한 개의 값이 정수가 아니며 소수로 떨어지는 문제Ⅰ	
7	한 개의 값이 정수가 아니며 소수로 떨어지는 문제Ⅱ	
8	한 개의 값이 소수로 떨어지지 않는 문제Ⅰ	
9	한 개의 값이 소수로 떨어지지 않는 문제Ⅱ	
10	정비례 관계가 아닌 문제	

<표 IV-2> 실험반의 사전, 사후검사 정답률(전체) (단위: %)

반	1-1	1-2	1-3	2	3	4	5	6	**7**	8	9	10
사전	50	22	31	50	50	91	22	22	**63**	41	41	53
사후	81	59	100	81	88	100	63	84	**28**	63	88	59

<표 IV-3> 비교반의 사전, 사후검사 정답률(전체) (단위: %)

반	1-1	1-2	1-3	**2**	**3**	4	5	6	7	8	9	**10**
사전	88	28	63	**50**	**41**	88	25	6	47	41	59	**44**
사후	84	81	97	**22**	**16**	81	56	78	34	59	72	**19**

<표 IV-4> 실험반의 사전, 사후검사 정답률(상위권)(단위: %)

반	1-1	1-2	1-3	2	3	4	5	6	7	8	9	10
사전	58	33	33	33	8	75	42	33	42	58	50	67
사후	83	75	83	83	83	83	67	83	58	83	83	83

<표 IV-5> 비교반의 사전, 사후검사 정답률(상위권)(단위: %)

반	1-1	1-2	1-3	2	3	4	5	6	7	8	9	10
사전	83	42	58	25	25	83	50	8	50	50	50	42
사후	83	83	83	17	17	75	67	83	42	67	58	33

<표 IV-6> 실험반의 사전, 사후검사 정답률(중위권)(단위: %)

반	1-1	1-2	1-3	2	3	4	5	6	7	8	9	10
사전	50	14	21	79	79	100	7	21	79	29	43	50
사후	93	50	100	71	93	100	57	79	7	50	79	43

<표 IV-7> 비교반의 사전, 사후검사 정답률(중위권)(단위: %)

반	1-1	1-2	1-3	2	3	4	5	6	7	8	9	10
사전	79	29	64	57	50	86	14	7	50	50	64	50
사후	79	79	100	29	7	93	50	79	29	57	64	14

<표 IV-8> 실험반의 사전, 사후검사 정답률(하위권)(단위: %)

반	1-1	1-2	1-3	2	3	4	5	6	7	8	9	10
사전	25	13	38	25	50	75	13	0	50	25	13	25
사후	88	0	50	63	38	75	0	0	25	0	50	25

<표 IV-9> 비교반의 사전, 사후검사 정답률(하위권)(단위: %)

반	1-1	1-2	1-3	2	3	4	5	6	7	8	9	10
사전	88	0	50	63	38	75	0	0	25	0	50	25
사후	75	63	88	13	25	50	38	50	25	38	88	0

<표 Ⅳ-2>~<표 Ⅳ-9>를 보면 실험반에서는 사후 검사의 정답률이 사전 검사보다 대체로 크지만 7번에서 작았다. 비교반에서는 몇 개의 문제에서 사전 검사와 상당한 차이를 보였으며 특히 2, 3, 10번에서 정답률이 많이 작아졌다. 그 차이점을 '비례적 추론에 대한 이해도 검사지'에서 나타난 오류 유형과 관련지어 다음과 같이 6가지로 분석해 볼 수 있다.

첫째, 한 개의 값이 소수나 분수인 비례적 상황 문제에서는 사후 검사 결과 사전 검사와 마찬가지로 실험반과 비교반의 실력이 비슷했다. 하지만 전체적인 문항별 정답률로 봤을 때 실험반과 비교반 모두 7번 문제에서 사전검사보다 사후 검사에서더 낮은 성취를 보이고 있다. 이는 학생들이 인치(inch)와 센티미터(㎝)의 단위가 아직 생소하며 문제에 제시된 숫자의 관계 파악에 서툴렀기 때문으로 판단된다. 그리고 소수나 분수인 상황 자체가 학생들의 문제 해결에 어려움을 줌을 알 수 있다.

둘째, 사전 검사지에서 실험반과 비교반의 중위권 학생을 제외하고 모두 비례적 상황과 그렇지 않은 상황을 비슷한 정답률로 구별하고 있었으나 사후 검사지에서는 현격한 차이를 보이고 있다. 즉, 사전 검사지에서는 실험반이나 비교반 학생들이 가법적 상황의 문제인 2, 3번을 다른 비례적 상황의 문제와 구별하여 올바로 해결한 비율이 비슷하나 사후 검사지에서는 실험반의 학생들은 성적이 향상된 데 반하여 비교반의 학생들은 사전 검사지에서 정답을 보인 학생들마저도 사후 검사지에서 잘못된 방법으로 문제를 해결했다.

비교반의 학생들에게 사전 검사지의 2, 3번 문제는 올바르게 풀었으나 사후 검사지의 2, 3번 문제를 틀린 까닭을 인터뷰한 결과, 이들은 단지 습관적으로 비례식으로 생각할 수 있는 숫자만을 선택해서 비례식 알고리즘을 만들고 있었다. 즉, <사례 Ⅳ-2>와 같이 숫자와 이름(순서)에만 집중하는 모습을 보였다.

<사례 Ⅳ-2> 숫자와 이름(순서)에 집중하는 모습

교사 : 이 문제를 왜 비례식으로 해결했니?

비교반 상위권 S1 : 명수가 8번째 순길이가 5번째이고, 순길이가 14번째니까 비례식을 세워야 해요.

비교반 중위권 S1 : 1번 문제가 비례식 문제라서 이것도 비례식으로 풀었는데요.

비교반 하위권 S1 : 8과 5이고 14번째니까요.

또한 실험반 학생들이 비교반 학생보다 2, 3번에서 비교적 높은 성취를 이루었는데 그 까닭을 알아보기 위하여 면담을 실시하여, 실험반의 학생들이 가법적 상황 문제의 핵심인 '같은 속도'에 중점을 두어 더하기나 빼기의 방법으로 문제를 해결하였음을 알았다.

또한 가법적 상황인 3번 문제에서 비교반의 상·중·하위권 학생들의 정답률을 살펴보면 사전 검사지에서는 중위권의 정답률이 가장 높으나 사후 검사지에서는 가장 낮았다. 즉, 비례식 단원을 수업시간에 학습하기 전에는 비교반의 중위권 학생들이 비교적 유연한 사고를 하고 있었으나 학습한 후에는 다소 경직된 비율이 높아졌음을 알 수 있다.

셋째, 비례식 알고리즘 전략에서 비례식 순서를 잘 못 세우는 경우는 사후 검사 결과 실험반과 비교반이 각각 4명씩 모두 비슷하게 나타났다. 다만 실험반은 상위권과 하위권에서 이런 오류를 보인 반면 비교반은 상·중·하위권에서 고루 오류를 보였다.

넷째, 정비례적 관계가 아닌 10번 문제의 의미파악 정도는 사전 검사에서 실험반과 비교반의 정답률이 비슷하여 두 반 모두 유사했으나 사후 검사에서는 비교반 학생들이 낮은 성취를 보이고 있다. 이들은 대부분 기본요금에 대한 고려 없이 비례 전략이나 비례식 알고리즘 전

략으로 이 문제를 해결했다. 사전 검사에서 이 문제를 올바로 해결한 비교반 학생 S3도 사후 검사에서는 오류를 보였다. 다음 [그림 Ⅳ-3]과 <사례 Ⅳ-3>은 각각 비교반 학생 S3의 활동지와 면담 내용이다.

<사례 Ⅳ-3> 정비례적 관계가 아닌 문제에서 비교반 학생의 응답

교사: 왜 이렇게 풀었니?

비교반 상위권 S3: 15㎞를 가면 4,800원이니까 30㎞면 2배니까 곱하기 2를 하면 9,600원 나와서요.

교사: 그럼 이 문제(사전 검사지 10번)와 이 문제(사후 검사지 10번)의 차이점은 무엇이니?

비교반 상위권 S3: ……

이 학생은 검사지의 모든 문제가 비례식 문제일꺼라고 미리 짐작하여 문제 내용을 자세히 읽어보지 않고 풀었다고 하였다. 비례식 알고리즘 전략만을 학습한 후에는 학생들의 사고가 확장되고 유연해지기보다 오히려 좁혀졌다고 판단된다.

다섯째, 사후 검사 결과 실험반과 비교반의 상위권 학생들이 비례식 알고리즘 전략을 가장 많이 사용하려는 경향이 강했다. <표 IV-10>은 사전과 사후 검사지의 비례적 전략들에 대한

10. 민수는 택시를 탔습니다. 택시의 기본 요금은 1,500원이고 기본 요금으로 갈 수 있는 거리는 4㎞입니다. 그 후에는 1㎞당 300원이 추가 된다고 합니다. 민수는 15㎞를 가는데 4,800원을 지불했다고 합니다. 30㎞를 가려면 택시요금이 얼마 나오겠습니까?

9600원

왜 그렇게 생각했습니까?

15 : 4800 = 30 : □는 쉽게 계산할 수 있는데, 15는 30÷2를 한 것이기 때문에 4800의 두배가 된다. 그래서 4800×2=9600원이 나온 것이다.

300
1,800

[그림 Ⅳ-3] 정비례적 관계가 아닌 문제에서 비례식 알고리즘 전략 사용

<표 Ⅳ-10> 비례적 전략들의 빈도율

실험반

검사지 \ 전략	A(%)	B(%)	C(%)	D(%)	E(%)	기타(%)	계(%)
사전	7	**32**	28	2	2	29	100
사후	**50**	32	7	2	0	9	100

비교반

검사지 \ 전략	A(%)	B(%)	C(%)	D(%)	E(%)	기타(%)	계(%)
사전	13	**38**	22	0	2	25	100
사후	**73**	22	0	0	0	5	100

A : 비례식 알고리즘 전략
B : 한 단위 전략
C : 비례 전략
D : 덧셈 전략
E : Building Up 전략

학생들의 빈도율을 나타낸 것이다. 여기서는 문제해결전략을 살펴보는 것이 주요한 목적이기 때문에 정답자와 비정답자를 가리는 것은 의미가 맞지 않다고 판단되어 비정답자도 포함해서 분석하였다.

<표 Ⅳ-10>을 보면 사전 검사에서는 실험반이나 비교반 모두 한 단위 전략, 비례 전략, 비례식 알고리즘 전략 순으로 문제를 해결하고 있다. 또한 사후 검사에서는 두 반 모두 비례식 알고리즘 전략을 가장 많이 사용하고 있다. 하지만 실험반의 비례식 알고리즘 전략 사용자가 50%이고 비교반은 73%로 비교반의 학생들이 이 전략을 훨씬 더 선호했고 비례식 알고리즘 전략과 한 단위 전략이외에 별다른 전략을 사용하고 있지 않는 것으로 보아 비례식 학습 후에 상당히 경직된 모습을 보이고 있다. 실험반과 비교반의 사전 검사지에서 기타에 해당하는 비율이 높은 것은 비례식 단원을 학습하기 전이라 못 풀거나 잘못된 나누기나 곱하기 같은 연산만을 사용한 학생들이 많기 때문이다. 이 외에도 실험반의 학생들이 같은 전략이라도 좀 더 다양하게 표현하고 있었다. 실험반의 한 학생은 반으로 줄이면서 한 단위 전략을 사용하고 있는데 이 한 단위를 구하기 위해서 24인치의 반인 12인치에 해당하는 ㎝, 또 그것의 반인 6인치에 해당하는 ㎝를 구하고 있다.

Ⅴ. 논의 및 결론

본 연구에서는 초등학교 6학년 학생들이 비례적 추론에 대해 어떻게 이해하고 있는지를 알아보고 교과서 분석을 통해 비례적 추론 지도 프로그램을 개발·적용하여 학생들의 비례적 추론의 개념 변화를 알아보았다. 지금까지 얻은 결과를 바탕으로 선행 연구와 6학년 가-단계의 비례식 단원 교수·학습과 관련지어 논의하고자 한다.

첫째, '비례적 추론의 이해도 검사지'에서 취약점으로 나타났던, 한 개의 값이 소수나 분수로 표현되는 비례적 상황의 문제에서 사후 검사 결과 여전히 학생들의 실력이 미흡했다. 즉, 사전 검사와 사후 검사에서 이 부분의 실험반과 비교반의 실력은 서로 비슷했으나 다른 문제의 정답률과 비교해 봤을 때 두 반 모두 낮은 성취를 보이고 있었다.

이것은 비의 유형에 따라, 즉 비가 $1:K$ 또는 $K:1$로 간단하게 되지 않을 때 비-단위 구성전략[1]을 더 좋아함(이종욱, 2006)과 유사한 결론이다. 반대로 말하면 Quintero가 주장한 정수비 단계에서 학생들은 한 집합 안에 있는 요소들 사이의 관계가 정수비이거나 서로 다른 집합 안에 있는 동일한 요소들 사이의 관계가 정수비일 때 문제를 잘 해결한다(신준식, 1996)는 의미와도 일치한 결론이다.

학생들이 한 개의 값이 소수나 분수인 상황에 약할 뿐만 아니라, 실험반의 중위권 학생들이 비교반보다 낮은 성취를 보인 것으로 보아 본 프로그램 자체에서도 이 부분에 대한 계산을 소홀히 다룬 측면이 있다. 계산력 향상보다는 상대적으로 개념 이해에 중점을 두었기 때문이다. 실험반의 중위권 학생들은 이 문제를 해결할 때 비가 $1:A$나 $A:1$로 간단하게 되지 않기 때문에 자신이 푼 방법이 올바른지에 대

1) 비-단위 구성전략(ratio-unit/build-up method)은 "100원짜리 동전 3개로 7개의 사탕을 살 수 있다. 그래서 15개의 동전으로는 5, (곱하기) 7, 35여서 35개의 사탕을 살 수 있다."와 같이 표현한 것처럼 아동들은 300원을 새로운 단위로 설정한다. 구성전략에서 1개의 구슬이 자연수의 단위였다면 "300원당"은 또 다른 단위를 형성하여 사용될 수 있기 때문에 여기서 연구자는 '비-단위'라는 용어를 사용한다(이종욱, 2006)

해 의심을 품게 되어 결국에는 문제 해결을 포기하고 만다.

개념 이해가 되었으면 계산력을 향상시킬 수 있도록 여러 문제를 제시할 필요가 있다. 이것은 기계적인 반복을 통하여 알고리즘을 익히는 것이 아니라 이해를 바탕으로 학습된 알고리즘을 문제에 적용시켜 학생들의 의구심을 떨쳐버림과 동시에 자신감을 심어주기 위한 것이다.

둘째, 사전 검사에서 두 반은 비례적 상황과 그렇지 않은 상황을 구별하는 능력이 비슷하였으나 사후 검사 결과 실험반은 현격한 차이로 향상된 결과를 얻은 반면 비교반은 비례적 상황이 아닌 문제 즉, 가법적 상황이나 정비례적 관계가 아닌 상황의 문제를 대부분 비례식 알고리즘 전략을 사용하여 해결하는 오류를 범했다. 즉, 비교반의 학생들이 일부 문항의 사전 검사보다 사후 검사에서 정답률이 낮은 이유는 알고리즘에 치우쳐 학습한 후에 사고의 경직성이 길러진 때문으로 판단된다.

Cramer와 Post는 비례적 상황에 내재해 있는 수학적 관계를 이해하는 것으로 다양한 문제 영역을 해결할 수 있는 능력, 비례적이지 않은 상황과 비례적인 상황을 식별하는 능력을 포함하여 비례적 추론 능력이라고 정의하고 있다(홍수영, 2006, pp 10~23에서 재인용).

따라서 단원의 제목이 '비례식'이라도 사고의 유연성과 다양성을 길러주고 비례적 추론 능력을 신장시키기 위해서는 '비례식'을 해결하는데 중점을 두되 이것과 유사하지만 '비례식'이 아닌 프로그램을 투입할 필요가 있다고 판단된다.

셋째, 비례식 알고리즘 전략에서 비례식 순서를 잘 못 세우는 경우는 사후 검사 결과 실험반과 비교반이 비슷하게 나타났다. 하지만 본 연구자의 프로그램을 학생들에게 적용시켰을 때 학생들이 '비례식 이름 붙이기 놀이'로 비례식 순서에 대한 확신을 갖고 문제를 해결한 모습으로 보아 이 부분은 비례적 추론 능력 향상에 도움을 줄 수 있는 부분이라 판단된다.

넷째, 사후 검사 결과 실험반과 비교반의 상위권 학생들이 비례식 알고리즘 전략을 가장 많이 사용하고 있었다. 사전 검사에서는 한 단위 전략이나 비례 전략을 선호한 데 비하여 사후 검사에서는 비례식 알고리즘 전략을 압도적인 비율로 사용했고 실험반 보다는 비교반의 비율이 높았다. 이에 반해 상위권 보다는 중위권 학생들이 또한 비교반 보다는 실험반 학생들이 비례적 상황과 그렇지 않은 상황을 잘 구분했으며 좀 더 다양한 문제해결전략을 사용했다. 이것으로 보아 비교반 보다는 실험반이, 상위권 보다는 중위권 학생들이 유연한 사고를 하고 있는 것으로 판단된다. 비례적 상황의 문제를 모두 비례식 알고리즘 전략을 사용하여 해결했다고 해서 상위권 학생들이 사고의 경직성을 보였다고는 할 수 없다. 하지만 이 학생들이 사전 검사에서는 올바로 해결했던 가법적 상황의 문제와 정비례적 관계가 아닌 문제를 사후 검사에서는 편향된 비례식 알고리즘 전략만을 사용하여 제대로 풀지 못하고 있었다. 따라서 상위권 학생들에게는 비례추론을 더 명확하고 정교하게 할 수 있는 기회를 많이 주어야 한다고 판단된다.

다섯째, 교과서와 본 프로그램의 공통점은 학생들에게 외적비의 형태만을 보여줄 뿐 내적비는 빈약하다는 것이다. Vergnaud는 학생들이 비례 추론을 할 때 내비교[2] 전략과 간비교[3] 전략

---

2) 한 집합 안에 있는 두 양 사이의 곱셈적 관계를 다른 집합에 적용하는 것(Heinz, 2000; 홍수영, 2006)
3) 두 집합의 동일한 부분 요소 중 하나의 부분 요소 간에 존재하는 곱셈적 관계를 다른 부분 요소 간에 적용하는 것(Heinz, 2000; 홍수영, 2006)

중 어느 전략에 영향을 더 많이 받는지, 내비교 전략과 간비교 전략 중 어느 전략을 더 선호하는지에 대한 연구를 하였으며 학생들이 내비교 전략을 더 선호하는 경향을 발견하였다(Heinz, 2000에서 재인용). 그러나 Lamon(1989)은 하나의 전략이 다른 전략보다 더 자연스럽고, 더 유용하다는 것을 믿을만한 것이 아님을 언급하였다(홍수영, 2006에서 재인용). 중요한 것은 내적비와 외적비를 학생들에게 지도해 학생들이 하나의 상황이 여러 가지 비로 표현될 수 있다는 것을 인식하고 자신의 선택에 따라 다양한 문제해결 풀이법을 찾도록 하여 사고의 유연성을 길러줘야 한다는 것이다. 이를 위한 한 가지 방법으로 문제를 제시할 때에 'A병은 B병보다 3배 크다. A병에 물 4리터가 들어간다면, B병에 물이 얼마나 들어가는가?'라는 상황으로 제시하면 자연스럽게 외적비를 이용하게 될 것이다. 이에 더해서 외적비의 이용이 문제 해결에 더 유리한 많은 문제 상황을 개발해야 할 것이다.

학생들에게 투입한 '비례적 추론에 대한 이해도 검사지'를 분석해 본 결과, 학생들은 첫째, 한 개의 값이 자연수가 아닌 소수나 분수로 나타내져야 하는 비례적 상황 문제에서 취약함을 보였다. 둘째, 비례적 상황과 그렇지 않은 상황을 구별하지 못하고 있었다. 셋째, 비례식 알고리즘 전략을 사용할 때 비례식의 순서를 잘 못 세우고 있었다. 넷째, 정비례적 관계가 아닌 문제에서는 그 의미를 제대로 파악하지 못하거나 비례식 알고리즘 전략이나 비례 전략으로 문제를 해결하는 오류를 범하고 있었다. 다섯째, 상위권에 있는 학생은 대부분의 서술형 문제에서 모두 비례식 알고리즘 전략을 사용했다.

7차 교육과정의 수학과 6-가 단계 '비례식' 단원을 분석하여 만든 프로그램을 초등학교 6학년 학생들에게 적용해 본 결과, 상위권 학생들이 비례적 추론에 대한 다양한 해결책을 제시했으며, '비례식 이름 붙이기 놀이'로 비례식 순서에 대한 확신을 갖고 문제를 해결했고, 학생들에게 비형식적 전략을 고안하도록 유도하는 데에 한계가 있었으며, 하위권 학생들은 비례식 성질을 자기의 편의에 맞게 사용하려는 경향이 강했고, 비례적 추론을 이용하여 시각화로 나타내는 문제에서는 어려움을 겪고 있었다.

본 프로그램의 적용 여부에 따른 실험반과 비교반의 특성과 각각의 특성에 대한 연구자의 결론은 다음과 같다. 첫째, 비례적 관계로 주어진 문제에서 한 개의 값이 소수나 분수인 상황에서는 사후 검사 결과 사전 검사와 마찬가지로 실험반과 비교반의 실력이 비슷하나 여전히 다른 문제의 정답률과 비교해 봤을 때 이 부분이 취약했다. 따라서 개념 이해가 되었으면 계산력을 향상시킬 수 있도록 여러 문제를 제시할 필요가 있다.

둘째, 사전 검사에서 두 반은 비례적 상황과 그렇지 않은 상황을 구별하는 능력이 비슷하였으나 사후 검사 결과 실험반은 현격한 차이로 향상된 결과를 얻은 반면 비교반은 비례적 상황이 아닌 문제를 대부분 비례식 알고리즘 전략을 사용하여 해결하는 오류를 범했다. 따라서 단원의 제목이 '비례식'이라도 사고의 유연성과 다양성을 길러주기 위해서는 '비례식'을 해결하는데 중점을 두되 이것과 유사하지만 '비례식'이 아닌 프로그램을 투입할 필요가 있다고 판단된다.

셋째, 비례식 알고리즘 전략에서 비례식 순서를 잘 못 세우는 경우는 사후 검사 결과 실험반과 비교반이 비슷하게 나타났다. 하지만 본 연구자의 프로그램을 학생들에게 적용시켰을 때 학생들이 '비례식 이름 붙이기 놀이'로 비례식 순서에 대한 확신을 갖고 문제를 해결

한 모습으로 보아 이 부분은 비례적 추론 능력 향상에 도움을 줄 수 있는 부분이라 판단된다.

넷째, 정비례적 관계가 아닌 문제에서 사후 검사 결과 비교반의 학생들이 낮은 성취를 보이고 있다. 이들은 기본요금에 대한 고려 없이 비례 전략이나 비례식 알고리즘 전략을 사용하여 이 문제를 해결하고 있었다. 이 또한 위의 둘째 내용과 유사한 것으로 정비례적 관계가 아닌 프로그램이 투입될 필요가 있다. 이와 관련하여 2006년에 수정 보완되어 고시된 다음 교육과정에 따르면 초등학교 6학년에서 '정비례와 반비례'를 다룰 예정이다. 하지만 $y=ax$ 또는 $y=\frac{a}{x}$만이 아니라 본 연구의 사후 검사 10번 문항처럼 $y=ax+b$와 같은 구조를 가진 문제도 다루어서, 학생들이 정비례, 반비례적 상황과 구별할 수 있도록 해야 한다.

다섯째, 사후 검사 결과 실험반과 비교반의 상위권 학생들이 비례식 알고리즘 전략을 가장 많이 사용하고 있었다. 비례적 상황의 문제를 모두 비례식 알고리즘 전략을 사용하여 해결했다고 해서 상위권 학생들이 사고의 경직성을 보였다고는 할 수 없다. 하지만 이 학생들이 편향된 비례식 알고리즘 전략만을 사용하여 가법적 상황의 문제와 정비례적 관계가 아닌 문제를 제대로 풀지 못하고 있었다. 따라서 상위권 학생들에게는 자신의 문제해결력이 더 명확하고 정교해 질 수 있는 기회를 주어야 한다고 판단된다.

이 연구와 관련하여 다음과 같이 제언한다. 첫째, 본 프로그램을 투입했어도 비례적 관계로 주어진 문제에서 한 개의 값이 소수나 분수인 상황은 여전히 취약했으며 상위권 학생들에게 사고의 다양성을 향상시켜 줄 수 없었다. 따라서 이를 발전시킬 수 있는 프로그램을 개발해야 한다. 둘째, 비례적 추론을 시각화할 수 있는 프로그램을 개발해야 한다. 셋째, 내적비를 다루는 비례적 추론의 프로그램도 개발되어야 한다.

참고문헌

강지형 외(1999). **7차 교육과정에 의한 초등수학교육.** 서울: 동명사.

교육부(2001). **초등학교 교사용 지도서 수학 6-가.** 서울: 대한 교과서 주식 회사.

______(2002). **수학 6-가.** 서울: 대한 교과서 주식 회사.

신준식(1996). **실제적 접근 방법에 의한 분수 교수-학습에 대한 연구.** 한국교원대학교 박사학위논문.

우정호(2000). **수학 학습-지도 원리와 방법.** 서울: 서울대학교출판부. 231.

이종욱(2006). 4학년 아동의 비와 비례 개념 분석. **수학교육학연구, 16**(2), 157-177.

홍수영(2006). **초등학교 5학년 학생의 비례 추론 이해.** 한국교원대학교 석사학위논문.

Baroody, J. A. & Coslick, T. R. (1998). Fostering children's mathematical power: An investigative approach to K-8 mathematics instruction. LEA. Inc. 권성룡 외 11인 공역(2005). 수학의 힘을 길러주자. 왜? 어떻게? 서울: 경문사.

Baxter, G. & Junker, G. (2001). *Designing developments: a case study in proportional reasoning.* Paper presented in the annual meeting of the national council of measurement in education. Seattle, WA.

Hart, K. (1988). Ratio and proportion. In J. Hiebert and M. Behr(Eds.), *Number concepts and operations in the meddle grades.* Reston, VA: The National Council of Teacher of Mathematics, Inc.

Heinz, K. R. (2000). *Conceptions of ratio in class of preservice and practicing teachers.* Unpublished Doctoral Dissertation, The Pennsylvania State University.

Karen, K. C. & Lesh, R. (2003). Whodunit? Exploring proportional reasoning through the footprint problem. *School Science and Mathematics, 103*(2), 92-99.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. K. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. In R. Lesh & M. Landau(Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes.* Orlando: Academic Press, Inc.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: Children's cognitive and metacognitive processes. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg(Eds.), *Rational number : An integration of research.* Lawrence Erlbaum Associates.

NCTM. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reaton, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc. 구광조, 오병승, 류희찬(공역)(1992). **수학교육과정과 평가의 새로운 방향.** 서울: 경문사.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reaton, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc. 류희찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙(공역)(2007). **학교수학을 위한 원리와 규준.** 서울: 경문사.

Post, T. R., Behr, M. J., & Lesh, R. (1988). Proportionality and the development of prealgebra understandings. In A. F. Coxford & A. P. Shulte(Eds.), *The ideas of algebra, K-12*(1988, Yearbook). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics. Inc.

A Study on the Proportional Reasoning Instruction for Elementary School Children

Kim, Kyoung Seon (Pocheon Taebong Elementary School)
Park, Young Hee (Cheongju National University of Education)

Math education in schools have to enable students to understand the importance of math and nurture the capacity to resolve various problems in daily life with reasoning, which is therefore, always applicable to the actual world. Proportional reasoning capacity is being often used in daily life, and some kind of unit is not fixed. So students are considering it very difficult.

This study looks into the difficulties that students have in proportional reasoning, what kind of problem solving strategy is being used, what the problems are in current textbooks, etc. Based on this, it tried to check the concept changes in students' proportional reasoning by developing the instruction program for 'proportional expression' unit in the 6th grade.

Based on the results, this study analyzes the features of proportional reasoning instruction programs and the instruction results. Also it analyzes in-advance & after examination papers of the experimental class and comparison class to contribute to the instruction method and instruction contents improvement of 'proportional expression' unit.

* key words : proportional reasoning(비례 추론), instruction program(지도 자료), proportional expression(비례식)

논문접수 : 2007. 8. 15
심사완료 : 2007. 9. 7