韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 21집 제 1호, 2007. 2. 65-79

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 21, No. 1, Feb. 2007. 65-79

'카탈란수의 탐구'에 관련된 창의적 산출물 중심의 수학영재 교수-학습 자료의 개발

이 상 근 (경상대학교)
정 기 영 (경남과학고등학교)

본 연구는 창의적 산출물을 지향하는 수학 영재교육을 위한 교수-학습 자료 개발 연구로, 카탈란수의 성질 및 다양한 표현방법을 탐구하여, 창의적인 산출물의 발명으로 이어질 수 있는 수학 영재를 위한 교수-학습 자료를 중학교 수준에서 개발하여 제시하였다.

1. 서 론

한국교육개발원(2000)에 의하면, 영재교육에서는 탐구 과정과 활동을 강조하며, 창의적 산출물의 생산을 격려해야 한다. 즉, 영재교육에서는 기성의 산물로서의 수학적 지식, 능력, 기능을 수동적으로 축적하는 것이 아니라, 학생의 자기주도적인 사고활동을 통한 탐구 중심, 수학적 발명 중심의 교육이 이루어져야 하며, 이러한 과정의 결과로 창의적 산출물을 생산할 수 있는 교육이어야 한다.

수학 영재교육에서 창의적인 산출물은 여러 가지를 생각할 수 있다. 예를 들어, 학생들에 의해 발명되어진 수학적 원리, 문제, 문제해결의 새로운 접근 방법, 수학적 지식의 다양한 표현 등을 들 수 있다. 특히, 우정호(2004, p.205)는 '여러 가지로 표현될 수 있는 지식은 유연성이 크고 문제해결 능력을 높여주므로, 학습내용을 여러 가지로 바꾸어 표현하는 능력을 길러주어야 할 것이다'라고 강조하면서, 수학적 지식의 다양한 표현이 중요함을 강조하였다.

창의적 산출물에 관련된 국내의 연구들을 분석하면, 크게 두 방향으로 나눌 수 있다. 첫 번째 방향은 수학 영재교육에서 창의적 산출물의 중요성 및 역할에 관련된 연구들로, 유윤재(2006, 2005), 김진호(2004), 한인기(2006), 한국교육개발원(1996, 2000) 등이 있으며, 두 번째 방향은 수학 영재교육에서 창의적 산출물의 예시에 관련된 연구들로, 조열제 · 류수정 · 유익승 · 김태호(2006), 유익승 · 한인기 · 신현용(2006), 김남균(2004), 한인기 · 이지은(2004) 등을 들 수 있다.

이들 연구를 통해, 수학 영재교육에서 창의적 산출물의 중요성이 강조되었으며, 창의적 산출물을 지향하는 수학 영재를 위한 교수-학습의 바탕이 마련되고 있다는 것은 주목할 만하다. 그러나 창의적 산출물을 지향하는 수학 영재교육의 교수-학습에서 실제로 사용될 수 있는 자료들은 아직도 부족

* ZDM분류 : U33
* MSC2000분류 : 97U30
* 주제어 : 창의적 산출물, 카탈란수, 정구조, 평면이항나무, Dyck 경로, 이항계수

한 실정이다.

본 연구는 창의적 산출물을 지향하는 수학 영재교육을 위한 교수-학습 자료 개발 연구로, 카탈란수의 성질 및 다양한 표현방법을 탐구하여, 창의적인 산출물의 발명으로 이어질 수 있는 수학 영재를 위한 교수-학습 자료를 중학교 수준에서 개발하여 제시할 것이다. 특히, 본 연구에서는 창의적 산출물 중심의 수학 영재 교수-학습에서 곧바로 활용될 수 있을 정도로 구체화된 내용을 제시할 것이다. 이를 통해, 창의적 산출물 중심의 수학 영재의 교수-학습을 풍부하게 하며, 창의적 산출물 중심의 수학 영재교육 연구의 한 사례가 될 것으로 기대된다.

2. '카탈란수의 탐구'의 교수-학습 주제들

중학교 수준의 영재교육에서 활용될 수 있는 카탈란수에 대한 국내의 연구는 거의 없는 실정이다. 최근에, Prasolov(2004), 정기영(2006)의 연구를 중심으로 수학 영재교육에서 카탈란수의 성질에 대한 몇몇 탐구의 예를 찾아볼 수 있다. 본 연구에서는 중학교 수준에서 카탈란수에 대한 창의적 산출물 중심의 탐구 가능성을 모색하며, 이를 위해 볼록다각형의 분할, 알파벳에 괄호넣기, 정구조의 개수, Dyck 경로 구하기, 평면이항나무 그리기, 이항계수와 카탈란수 등의 주제에 대한 교수-학습 자료 및 탐구 자료를 개발할 것이다. 이를 좀더 자세히 살펴보면, 다음과 같다.

- 카탈란수란 무엇인가?
- 볼록다각형을 교차하지 않는 대각선들로 삼각형으로 분할한다.
- 볼록다각형의 분할에 대응하는 알파벳을 적고 괄호를 표시한다.
- 알파벳 괄호넣기를 바탕으로 정구조의 개수를 구한다.
- 정구조에 대한 탐구를 바탕으로 Dyck 경로를 그린다.
- 평면이항나무를 그린다.
- 이항계수에서 카탈란수를 찾는다.

본 연구에서는 이들 주제들에 대한 구체적인 교수-학습 자료들을 한인기(2006)에 제시된 교수-학습 자료의 학술성의 원리, 체계성과 순차성의 원리, 도달가능성의 원리, 직관성의 원리 등을 고려하여 개발하였다.

3. 카탈란수에 대한 교수-학습 자료

카탈란수는 조합론에서 자주 만날 수 있는 수열의 하나로 오일러가 $n+2$각형을 n개의 삼각형으로 나누는 경우의 수를 세는 문제를 제안하면서 사람들이 관심으로 가지게 되었다. 카탈란(Catalan)이라는 이름은 벨기에의 수학자 Eugene Charles Catalan (1814~1894)의 이름으로부터 유래한다.

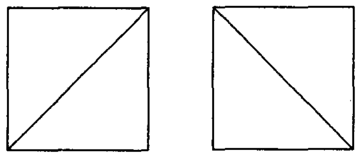
카탈란수는 c_n은 $c_n = c_0c_{n-1} + c_1c_{n-2} + \cdots\cdots + c_{n-2}c_1 + c_{n-1}c_0$이며, $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$

과 같이 나타낼 수 있다. 카탈란수를 위의 점화식을 이용하여 계산하면, 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, ⋯ 등과 같다. 이제, 카탈란수의 다양한 표현 방법을 살펴보자.

(1) 볼록다각형의 분할

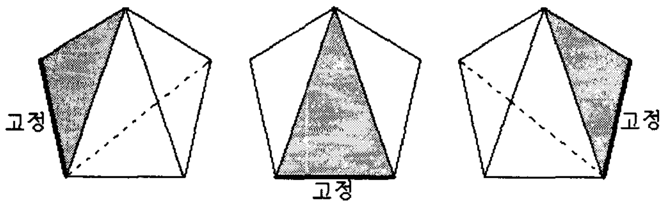
오일러는 교차하지 않는 대각선들에 의해 볼록n각형을 삼각형들로 분할하는 서로 다른 방법의 개수는 c_{n-2}임을 알아냈다. 이 방법을 구체적으로 살펴보자. 이를 위해, $c_{n-2}=d_n$이 하자.

삼각형인 경우에는 $d_3=c_1=1$가 된다. 볼록사각형인 경우는 <그림 1>과 같이 삼각형들로 분할할 수 있으며, 이때 $d_4=c_2=2$가 된다.



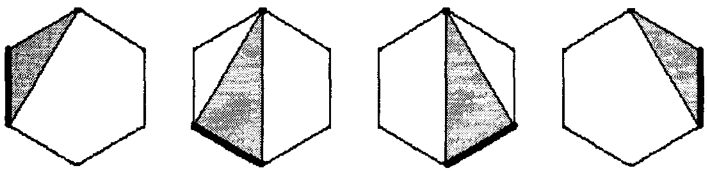
<그림 1>

볼록오각형인 경우의 분할을 조사하기 위해, 한 변을 고정시켜 놓고 생각하자. 그러면, <그림 2>와 같은 분할이 얻어지며, $d_5=d_4+d_3d_3+d_4=d_2d_4+d_3d_3+d_4d_2$이고, $c_{n-2}=d_n$이므로 $c_3=c_0c_2+c_1c_1+c_2c_0=2+1+2=5$가 된다.



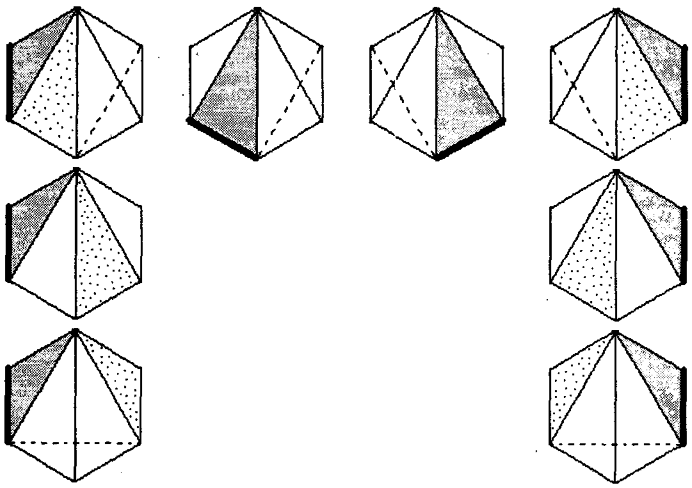
<그림 2>

이제, 볼록육각형의 경우를 살펴보자. 볼록오각형의 경우와 마찬가지로, 한 변을 고정시켜 분할을 조사하자. 볼록육각형의 경우에는 <그림 3>과 같이 변을 고정시킬 수 있다(그림에서 진한 선으로 표시된 변이 고정된 변임). 그러면, $d_6=d_5+d_3d_4+d_4d_3+d_5=d_2d_5+d_3d_4+d_4d_3+d_5d_2$이며, $c_{n-2}=d_n$이므로, $c_4=c_0c_3+c_1c_2+c_2c_1+c_3c_0=5+2+2+5=14$가 된다.



<그림 3>

위에서 구한 14가지 경우를 구체적으로 살펴보면, <그림 4>와 같다. <그림 4>에서 점선은 다른 경우의 분할을 나타낸다. 결국, <그림 4>의 각 경우에서 점선이 있는 경우는 한 그림에 두 가지 방법의 분할이 표현된 것이다.



<그림 4>

한편, 볼록칠각형의 경우에는 $d_7 = d_2d_6 + d_3d_5 + d_4d_4 + d_5d_3 + d_6d_2$ 이므로, c_5를 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$c_5 = c_0c_4 + c_1c_3 + c_2c_2 + c_3c_1 + c_4c_0 = (1)(14) + (1)(5) + (2)(2) + (5)(1) + (14)(1) = 42$$

볼록팔각형의 경우에는 $d_8 = d_2d_7 + d_3d_6 + d_4d_5 + d_5d_4 + d_6d_3 + d_7d_2$ 이고, $c_6 = 132$가 되며, 볼록n각형의 경우에는 $d_n = d_2d_{n-1} + d_3d_{n-2} + \cdots\cdots + d_{n-2}d_3 + d_{n-1}d_2$ 이고, $c_{n-2} = d_n$ 이므로 $c_{n-2} = c_0c_{n-3} + c_1c_{n-4} + \cdots\cdots + c_{n-4}c_1 + c_{n-3}c_0$ 가 된다.

결국, n개의 변을 갖는 볼록n각형을 교차하지 않는 대각선들에 의해 삼각형들로 분할하는 방법의 수는 1,2,5,14,42,132,429,…… 이 된다.

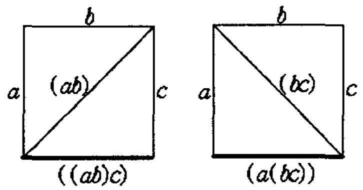
(2) 알파벳에 괄호넣기

$n+1$ 개의 알파벳이 한 줄에 적혀있다. 이들 알파벳에 n 쌍의 괄호를 넣어, 각각의 괄호에는 인접한 두 알파벳이 놓이거나 또는 한 알파벳과 괄호로 묶인 인접한 식이 놓이거나 또는 괄호로 묶인 두 인접한 식이 놓이도록 해야 한다. 카탈란은 이와 같이 괄호를 배열하는 서로 다른 방법의 수가 c_n 임을 밝혔다.

각각의 괄호에는 인접한 두 알파벳이 놓이는 경우는 $((ab)c)$, $(a(bc))$ 이고, 한 알파벳과 괄호로 묶인 인접한 식이 놓이는 경우는 $(((ab)c)d)$ 이고, 괄호로 묶인 두 인접한 식이 놓이는 경우는

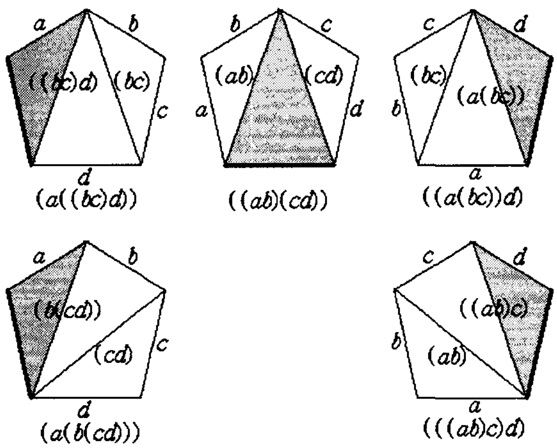
$((a((bc)d))(ef))$ 이다.

이때, $n+1$ 개의 알파벳에 괄호를 넣는 것과 $n+2$ 각형을 교차하지 않는 대각선들로 삼각형을 분할하는 것 사이에 일대일대응을 만들 수 있다. 이를 구체적으로 살펴보면, $n+1$ 개의 알파벳을 $n+2$ 각형에 순서대로 시계방향으로 적는다. 이때 한 변은 고정시킨다. 만약 $n+2$ 각형의 교차하지 않는 대각선에 대해, 각 대각선에는 그 대각선에 놓인 삼각형의 변들에 적힌 알파벳을 묶은 괄호의 쌍을 대응시킨다. 그러면 각 대각선에는 괄호로 묶인 알파벳들이 적히게 되며, 결국 고정된 변에는 구하는 괄호의 배열이 적히게 된다. 예를 들어, 3개의 알파벳에 2개의 괄호를 넣는 방법은 <그림 5>와 같이, $c_2 = c_0c_1 + c_1c_0 = 2$ 가지 $(a(bc))$, $((ab)c)$ 이다.



<그림 5>

한편, 4개의 알파벳에 3개의 괄호를 넣는 방법은 $c_3 = c_0c_2 + c_1c_1 + c_2c_0 = 5$ 가지이며, <그림 6>과 같이 나타낼 수 있다.



<그림 6>

결국, 다음과 같은 표현을 얻을 수 있다: $(a((bc)d))$, $((ab)(cd))$, $((a(bc))d)$, $(a(b(cd)))$, $(((ab)c)d)$.

한편, 5개의 알파벳에 4개의 괄호를 넣는 방법, 6개의 알파벳에 5개의 괄호를 넣는 방법을 볼록다각형을 교차하지 않는 대각선들에 의해 삼각형들로 분할하는 것과 대응시켜 모든 경우를 찾는 것은 학생들에게 과제로 제시하여, 창의적 산출물의 일부가 되도록 할 수 있다.

(3) 정구조의 개수

앞에서 살펴본 '알파벳에 괄호넣기'에서 찾은 괄호 배열에서 알파벳들을 지우고, 양끝에 있는 괄호를 지워서 얻어지는 괄호의 배열을 괄호의 정구조라고 한다(Prasolov, 2004). 이때, n쌍의 괄호로 만들어진 괄호의 정구조의 개수는 c_n 이 된다.

2개의 알파벳에 1개의 괄호를 넣는 방법은 $c_1 = c_0 c_0 = 1$ 가지이며, (ab) 인 경우에는 정구조가 존재하지 않는다. 3개의 알파벳에 2개의 괄호를 넣는 방법은 $c_2 = c_0 c_1 + c_1 c_0 = 2$ 가지이며, 정구조는 다음과 같이 하나를 얻을 수 있다.

$$(a(bc)) \to (()) \to () \text{ 정구조}$$
$$((ab)c) \to (()) \to () \text{ 정구조}$$

한편, 4개의 알파벳에 3개의 괄호를 넣는 방법은 $c_3 = c_0 c_2 + c_1 c_1 + c_2 c_0 = 5$ 가지이며, 다음과 같은 두 개의 정구조를 얻을 수 있다.

$$(a((bc)d)) \to ((())) \to (()) \text{ 정구조}$$
$$(a(b(cd))) \to ((())) \to (()) \text{ 정구조}$$
$$((ab)(cd)) \to (()()) \to ()() \text{ 정구조}$$
$$((a(bc))d) \to ((())) \to (()) \text{ 정구조}$$
$$(((ab)c)d) \to ((())) \to (()) \text{ 정구조}$$

즉, 2쌍의 괄호로 만들어진 괄호의 정구조의 개수는 $c_2 = 2$ 가지, 즉 $(()),()()$ 이다. 한편, 5개의 알파벳에 4개의 괄호를 넣는 방법에 대한 정구조, 6개의 알파벳에 5개의 괄호를 넣는 방법에 대한 정구조에 대해서는 학생들에게 과제로 제시하여, 창의적 산출물의 일부가 되도록 할 수 있다.

(4) Dyck 경로 구하기

(0, 0)에서 $(1,\pm 1)$ 로 가는 화살표들을 생각하자. 좌표가 $(0,0)$, $(2n,0)$ 인 점을 연결하며, $y \geq 0$ 인 반평면에 속하는 평면상의 꺾인선을 $2n$ 개의 변으로 된 Dyck 경로라 부른다. $2n$ 개의 변들로 된 서로 다른 Dyck 경로의 개수는 c_n 과 같게 된다.

우선, (0, 0)에서 (1, 1)로 가는 화살표를 왼쪽 괄호에 대응시키고 (0, 0)에서 (1, -1)로 가는 화살표를 오른쪽 괄호에 대응시키면, 앞에서 살펴본 정구조와 Dyck 경로 사이의 일대일대응을 만들 수 있다. 이를 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

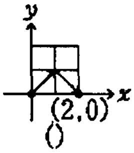
$(2,0)$ $n=1$ $c_1 = 1$ $()$

$(4,0)$ $n=2$ $c_2 = 2$ $(())$ $()()$

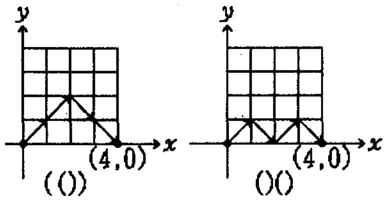
$(6,0)$ $n=3$ $c_2 = 5$ $()(())$ $(()())$ $(())()$ $((()))$ $()()()$

<그림 7>에서는 정구조가 한 개, Dyck 경로가 하나인 경우를 나타내며, <그림 8>은 정구조가 두 개, Dyck 경로가 두 개인 경우를 나타낸다. 한편, <그림 9>는 정구조가 다섯 개, Dyck 경로가 다섯

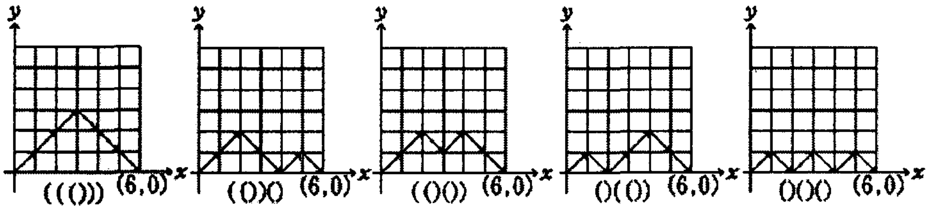
개인 경우를 나타낸다.



<그림 7>



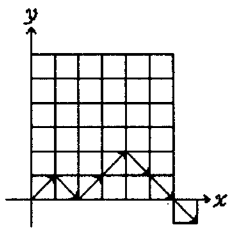
<그림 8>



<그림 9>

한편, 정구조가 14개인 경우에 대해 Dyck 경로를 그려보는 것은 학생들에게 과제로 제시하여, 창의적 산출물의 일부가 되도록 할 수 있다.

Dyck 경로에 대해 좀더 자세히 살펴보자. <그림 10>에서 (0, 0)에서 (1, -1)로 가는 화살표 하나를 Dyck 경로 끝에 추가하자.



<그림 10>

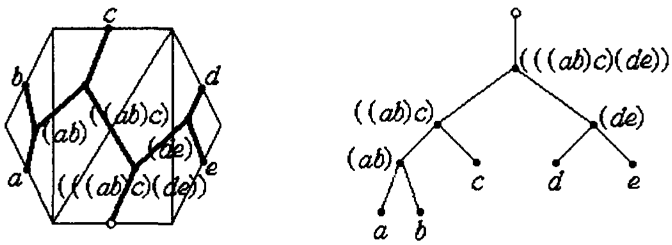
얻어진 경로에서 $n+1$ 개의 변들 중에서 한 화살표 $(1,-1)$ 을 고정시키고, 이것에 점 $(1,-1)$ 로부터 $(2n+1,-1)$ 으로 가는 경로를 얻을 수 있다. 이 경로를 따라 처음의 Dyck 경로의 재생할 수 있다. 경로의 아래쪽에 있는 모든 점을 생각하여, 이들 중에서 가장 오른쪽에 있는 점을 잡자. 이 점은 경로를 두 부분으로 분할한다. 결국, 마지막 변을 버리고 Dyck 경로를 얻을 수 있다. 이것은 얻어진 경로의 첫 번째 부분에 대해서는 자명하고, 두 번째 부분에 대해서도 쉽게 확인할 수 있다. 만약, 경로의 아래쪽에 있는 다른 점을 잡고, 똑같은 방법을 사용한다면, 얻어진 경로의 첫 번째 부분

에 대해서는 요구된 성질이 성립하지만, 두 번째 부분에 대해서는 그렇지 못하다. 점 $(1,-1)$에서 $(2n+1,-1)$로 가는 모든 경로의 $\binom{2n}{n}$이다. 실제로, $2n$개의 변들로부터 n개의 변 $(1,1)$을 택해야 한다. 각각의 Dyck 경로에 정확히 $n+1$개의 그러한 경로가 대응되므로 Dyck 경로의 개수는 $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$이다. Dyck 경로는 $(0,0)$부터 (n,n)까지 계단을 올라가는 방법이다. 그것은 정확히 대각선 $y=x$ 아래에 놓인다. 이로부터, 카탈란수의 일반항 $c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$이 얻어질 수 있다.

(5) 평면이항나무 그리기

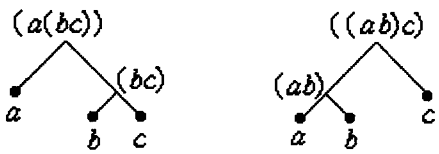
평면에서 순환경로가 없으며, 각 꼭지점에 세 개 또는 하나의 모서리가 모이는 그래프를 평면이항나무라 부른다. 한 꼭지점을 고정시키고, 이 꼭지점으로부터 한 모서리를 그어, 이 모서리를 꼭지점의 뿌리라 하자. 이제, 모든 나머지 꼭지점들로부터 정확히 하나의 모서리를 그어, 이들 모서리를 잎이라 부르자. 이때, Cayley에 의하면, 한 개의 뿌리와 n개의 잎을 가지는 서로 다른 평면이항나무의 개수는 c_{n-1}이다.

<그림 11>은 하나의 뿌리와 5개의 잎을 가지는 평면이항나무에 육각형을 삼각형들로 분할하는 것을 대응시키는 방법을 보여주고 있다.



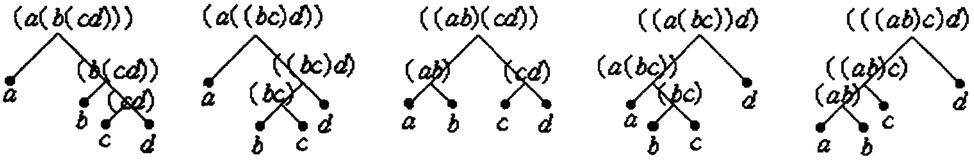
<그림 11>

이제, 3개의 잎을 가지는 평면이항나무를 모두 생각하면, <그림 12>와 같다.



<그림 12>

한편, 4개의 잎을 가지는 평면이항나무는 <그림 13>과 같다.



<그림 13>

한편, 5개 또는 6개의 잎을 가지는 평면이항나무를 모두 찾아보는 것은 학생들에게 과제로 제시하여, 창의적 산출물의 일부가 되도록 할 수 있다.

(6) 이항계수와 카탈란수

<표 1>의 이항계수에서 몇 가지 방법으로 카탈란수를 찾을 수 있다. 첫 번째 방법은 이항계수에서 중앙에 있는 수들 1, 2, 6, 20, 70, 252, …는 $1=1\times1$, $2=2\times1$, $6=3\times2$, $20=4\times5$, $70=5\times14$ $252=6\times42$, …… 와 같이 나타낼 수 있는데, 여기서 두 번째 인수 1,1,2,5,14,42,…… 가 카탈란수가 된다.

<표 1> 이항계수표

										1										
									1		1									
								1		2		1								
							1		3		3		1							
						1		4		6		4		1						
					1		5		10		10		5		1					
				1		6		15		20		15		6		1				
			1		7		21		35		35		21		7		1			
		1		8		28		56		70		56		28		8		1		
	1		9		36		84		126		126		84		36		9		1	
1		10		45		120		210		252		210		120		45		10		1

두 번째 방법은 <표 1>에서 굵은 칸으로 표시된 두 열의 수들의 차를 생각하면, 카탈란수를 얻을 수 있다. 즉, $1-0=1$, $2-1=1$, $6-4=2$, $20-15=5$, $70-56=14$, $252-210=42$, … 등을 얻을 수 있다.

세 번째 방법은, <표 2>에서 굵은 칸으로 표시된 두 열의 차를 생각하면, 카탈란수를 얻을 수 있다.

<표 2>

										1										
									1		1									
								1		2		1								
							1		3		3		1							
						1		4		6		4		1						
					1		5		10		10		5		1					
				1		6		15		20		15		6		1				
			1		7		21		35		35		21		7		1			
		1		8		28		56		70		56		28		8		1		
	1		9		36		84		126		126		84		36		9		1	
1		10		45		120		210		252		210		120		45		10		1

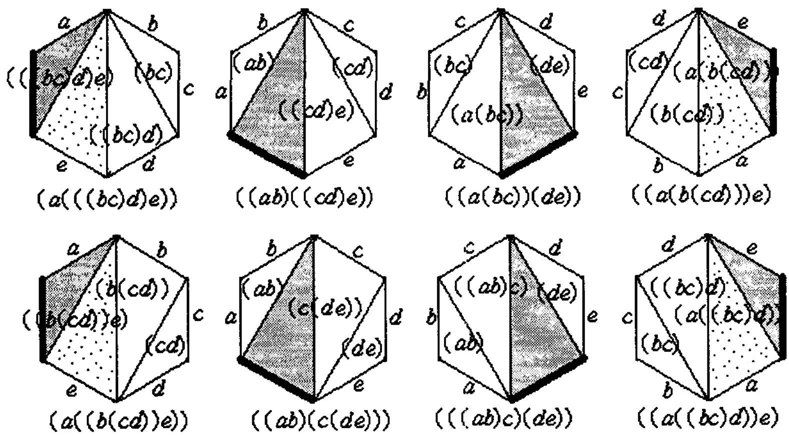
이항계수표에서 카탈란수를 찾는 또다른 방법은 학생들에게 과제로 제시하여, 창의적 산출물의 일부가 되도록 할 수 있다.

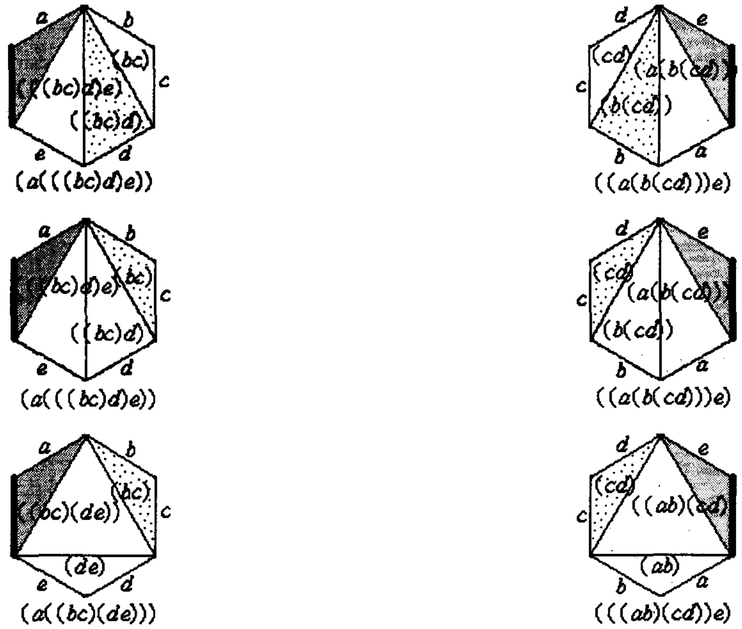
4. 카탈란수에 대한 탐구 활동의 예시

앞에서 카탈란수에 대한 몇몇 표현들에 대한 교수-학습 자료들을 제시하였으며, 학생들의 창의적 산출물의 일부로 포함될 수 있는 탐구과제를 제시하였다. 이들 과제에 대한 탐구활동의 예시를 살펴보자.

(1) 알파벳에 괄호넣기

육각형을 교차하지 않는 대각선들에 의해 삼각형을 분할하는 것과 이에 상응하는 알파벳 괄호넣기를 살펴보자. 육각형의 한 변을 고정시켜 분할을 생각하면, <그림 14>와 같다.





<그림 14>

이에 상응하는 5개의 알파벳에 4개의 괄호를 넣는 방법은 다음과 같다:

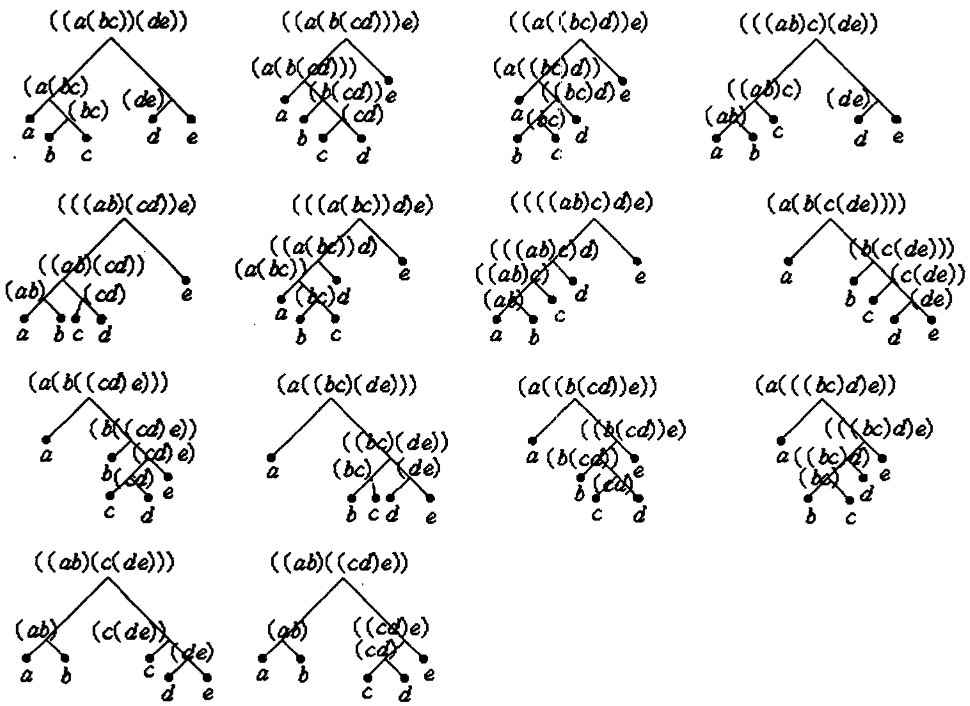
$(a(b(c(de))))$, $((ab)(c(de)))$, $(((ab)c)(de))$, $((((ab)c)d)e)$, $(a(b((cd)e)))$,
$((ab)((cd)e))$, $((a(bc))(de))$, $(((a(bc))d)e)$, $(a(((bc)d)e))$, $((a(b(cd)))e)$,
$(a((b(cd))e))$, $((a((bc)d))e)$, $(a((bc)(de)))$, $(((ab)(cd))e)$.

한편, 6개의 알파벳에 5개의 괄호를 넣는 방법은 $c_5 = c_0c_4 + c_1c_3 + c_2c_2 + c_3c_1 + c_4c_0 = 42$ 가지로 다음과 같다.

$(a(b(c(d(ef)))))$, $(a(b(c((de)f))))$, $(a(b((cd)(ef))))$, $(a(b((c(de))f)))$
$(a(b((cd)(ef))))$, $(a(b((c(de))f)))$, $(a((bc)((de)f)))$, $(a((b((cd))(ef)))$
$(a((b(c((de)))f))$, $(a((b((cd)e))f))$, $(a(((bc)d)(ef)))$, $(a(((bc)(de))f))$
$(a(((b(cd))e)f))$, $(a((((bc)d)e)f))$, $((ab)(c(d(ef))))$, $((ab)(c((de)f)))$
$((ab)((cd)(ef)))$, $((ab)((c(de))f))$, $((ab)(((cd)e)f))$, $((a(bc))(d(ef)))$
$((a(bc))((de)f))$, $((a(b(cd)))(ef))$, $((a(b(c(de))))f)$, $((a(b((cd)e)))f)$
$((a((bc)d))(ef))$, $((a((bc)(de)))f)$, $((a((b(cd))e))f)$, $((a(((bc)d)e))f)$
$(((ab)c)(d(ef)))$, $(((ab)c)((de)f))$, $(((ab)(cd))(ef))$, $(((ab)(c(de)))f)$
$(((ab)((cd)e))f)$, $(((a(bc))d)(ef))$, $(((a(bc))(de))f)$, $(((a(b(cd)))e)f)$
$(((a((bc)d))e)f)$, $((((ab)c)d)(ef))$, $((((ab)c)(de))f)$, $((((ab)(cd))e)f)$
$((((a(bc))d)e)f)$, $(((((ab)c)d)e)f)$

(2) 평면이항나무 그리기

5개의 잎을 가지는 평면이항나무를 모두 찾으면, 다음 <그림 15>와 같다.



<그림 15>

(3) 이항계수와 카탈란수

<표 3>의 이항계수표에서 카탈란수를 찾는 방법을 살펴보자. 1열의 2에서 2열의 1을 빼면 1이 얻어지고, 1열의 6에서 2열의 3, 3열의 1을 빼면 2가 얻어지고, 1열의 20에서 2열의 10, 3열의 4, 4열의 1을 빼면, 5가 얻어진다. 이와 같은 방법으로 <표 3>에서 굵은 선으로 표시된 수들을 계산하면, 카탈란수 1, 1, 2, 5, 14, 42, … 등을 얻을 수 있다. 한편, 2열의 3에서 3열의 1을 빼고, 2열의 10에서 3열의 4, 4열의 1을 빼면, 다시금 카탈란수들을 얻을 수 있다.

<표 3>

										1열	2열	3열	4열	5열	6열					
										1										
									1		1									
								1		2		1								
							1		3		3		1							
						1		4		6		4		1						
					1		5		10		10		5		1					
				1		6		15		20		15		6		1				
			1		7		21		35		35		21		7		1			
		1		8		28		56		70		56		28		8		1		
	1		9		36		84		126		126		84		36		9		1	
1		10		45		120		210		252		210		120		45		10		1

5. 결 론

본 연구는 창의적 산출물을 지향하는 수학 영재교육을 위한 교수-학습 자료 개발 연구로, 카탈란수의 성질 및 다양한 표현방법을 탐구하여, 창의적인 산출물의 발명으로 이어질 수 있는 수학 영재를 위한 교수-학습 자료를 중학교 수준에서 개발하여 제시하였다.

카탈란수는 조합론에서 자주 만날 수 있는 수열의 하나로 오일러가 $n+2$각형을 n개의 삼각형으로 나누는 경우의 수를 세는 문제를 제안하면서 사람들이 관심으로 가지게 되었다. 카탈란수에 대한 창의적 산출물 중심의 탐구는 중학교 수준의 학생들을 위해 개발되었으며, 교수-학습에서는 볼록다각형의 분할, 알파벳에 괄호넣기, 정구조의 개수, Dyck 경로 구하기, 평면이항나무 그리기, 이항계수와 카탈란수 등의 주제에 대한 교사 설명 및 학생 탐구가 이루어진다.

한편, 본 연구에서는 학생들의 창의적 산출물 과제로, 다음과 같은 탐구문제를 제시하였다.

· 5개의 알파벳에 4개의 괄호를 넣는 방법, 6개의 알파벳에 5개의 괄호를 넣는 방법을 볼록다각형을 교차하지 않는 대각선들에 의해 삼각형들로 분할하는 것과 대응시켜 모든 경우를 찾아라.

· 5개의 알파벳에 4개의 괄호를 넣는 방법에 대한 정구조, 6개의 알파벳에 5개의 괄호를 넣는 방법에 대한 정구조를 찾아라.

· 정구조가 14개인 경우에 대해 Dyck 경로를 그려라.

· 5개 또는 6개의 잎을 가지는 평면이항나무를 모두 찾아라.

· 이항계수표에서 카탈란수를 구하는 다른 방법을 찾아라.

본 연구의 결과는 각 시도 교육청의 영재교육원 또는 대학부설의 영재교육원에서 창의적 산출물 중심의 영재교육 자료로 활용될 수 있으며, 창의적 산출물 중심의 수학 영재의 교수-학습을 풍부하게 할 것이며, 창의적 산출물 중심의 수학 영재교육 연구의 한 사례가 될 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

김남균 (2004). 패턴블록과 조노돔을 활용한 테셀레이션 지도방안 탐색, 수학교육논문집 **18(2)**, pp.497-504

김진호 (2004). 수학적 창의성에 대한 일 논의 : 창의적인 사람, 창의적인 산물, 창의적인 과정이란 관점으로부터, 수학교육논문집 **18(3)**, pp.45-56

우정호 (2004). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울: 서울대출판부.

유윤재 (2005). 산출물 중심의 수학 영재 프로그램의 연구, 수학교육논문집 **19(3)**, pp.557-569

유윤재 (2006). 창작물 중심 영재교육의 중요성, 수학교육논문집 **20(1)**, pp.1-8.

유익승 · 한인기 · 신현용(2006). 삼각형의 높이와 방접원의 개념유추에 대한 연구, 수학교육논문집 20(1), pp.9-18

정기영 (2006). 조합적 활동을 통한 수들의 성질 및 증명탐구, 한국교육개발원 영재교육 자료 개발 수탁연구.

조열제 · 류수정 · 유익승 · 김태호(2006). 라카토스의 보조정리 합체법을 적용한 교수-학습 자료 개발, 수학교육논문집 **20(3)**, pp.361-372

한국교육개발원 (1996). 영재교육의 이론과 실제, 서울: 양동사.

한국교육개발원 (2000). 영재교육과정 개발 연구[II], 서울: 장서원.

한인기 (2006). 수학교육학의 기초와 실제, 경남: 경상대출판부.

한인기 (2006). 한국과학영재학교의 R&E 운영 및 지도에 대한 연구 : 2005년 수학 No.7 과제를 중심으로, 수학교육논문집 **20(1)**, pp.19-32

한인기 · 이지은 (2004). 직사각형의 분할과 키르히호프의 법칙에 관한 연구, 수학교육논문집 **18(2)**, pp.277-288

Prasolov V. V. (2004)/ 한인기 역(2006). 대수 · 기초해석 · 조합의 탐구문제들(상), 서울: 교우사.

Developing Teaching and Learning Materials for the Gifted Students Based upon a Creative Output Related to Catalan Number

Lee, Sang Keun
Dept. of Mathematics Education, Gyeongsang National University, 660-701, Korea
E-mail : sklee@gsnu.ac.kr

Chung, Ki Young
Gyeongnam Science high school, 660-851, Korea
E-mail : zungkiyoung@hanmail.net

In this paper we study various aspects of Catalan number with its focus on creative output. As a result we we develop teaching and learning materials for the gifted students which can lead to creative output at the middle school level.

* ZDM Classification : U33
* MSC2000 Classification : 97U30
* Key Word : Catalan number, creativity, gifted student, teaching and learning material