

유추를 통한 코사인정리의 일반화에 대한 연구

한 인 기 (경상대학교)¹⁾

본 연구에서는 유추를 바탕으로 삼각형의 코사인정리를 n 각형으로 일반화시키고, 이를 벡터를 이용하여 증명할 것이다. 이를 통해, 수학교과와 내용을 유추를 통해 확장하는 한 예를 제시할 것이며, 수학 영재 교육에서 수학적 사고(특히 일반화, 유추)를 계발·육성하기 위한 교수-학습 자료로 활용할 수 있을 것으로 기대된다.

1. 서론

제 7차 수학과 교육과정(교육부, 1998, p. 29)에서는 수학교육의 목표를 '수학의 기본적인 지식과 기능을 습득하고, 수학적으로 사고하는 능력을 길러, 실생활의 여러 가지 문제를 합리적으로 해결할 수 있는 능력과 태도를 기른다'고 규정하고 있으며, 교육과정해설서(교육부, 2001, p. 36)에서는 이것을 '하나의 수학적 지식과 기능의 습득 및 그 응용이며, 다른 하나는 수학적 사고력의 신장과 수학적 태도의 함양'으로 구분하여 정리하고 있다. 결국, 수학적 사고력 신장은 수학교육의 중요한 목표의 하나라고 할 수 있을 것이다.

'수학적 사고'를 구체적으로 살펴보자. 심리학자인 Rubinshtein(1981, p. 72)은 '사고의 과정은 처음에는 분석하기와 분석에 의해 추출된 것의 종합하기이며, 그리고 나서 추상화하기와 일반화하기인데, 이들은 분석과 종합으로부터 파생된 것들이다. 이들 과정(분석하기, 종합하기, 추상화하기, 일반화하기)사이의 상호관계는 사고에 있어 주요한 내적인 규칙성이 된다'고 주장하였다. Rubinshtein의 주장으로부터, 분석하기, 종합하기, 추상화하기, 일반화하기 등은 사고 과정의 중요한 구성요소임을 알 수 있다.

수학적 사고는 심리학에서 연구되는 인간 사고의 일부로 생각할 수 있다. 강시중(1991)은 수학적 사고를 수학교육의 목표달성면에서 생각되는 수학적 사고, 수학의 특성이나 수학적 방법면에서 생각되는 수학적 사고, 수학의 내용면에서 생각되는 수학적 사고로 나누어 생각했으며, 특히 수학의 특성면에서 추상화, 형식화, 일반화, 특수화, 계통화, 직관성, 논리성 등의 사고 유형을 추출하였다. 한편, 강완·백석운(1988)은 수학적 사고의 유형으로 일반화, 수학적 내용의 이해, 가역적 사고, 귀납-연역-

1) 수학교육과 교수/ 과학영재교육원 교수

* ZDM분류 : E54

* MSC2000분류 : 97C90

* 주제어 : 코사인정리, 유추, 벡터, 다각형

유추, 논리적 추론 등을 추출하였다. 한편, Polya(1954)는 수학적 발명과 추론에서 일반화, 특수화, 유추의 역할을 강조했다. 살펴본 바와 같이, 일반화는 수학적 사고의 중요한 유형이라 할 수 있다.

중등학교 수학교육에 관련된 일반화의 연구들을 살펴보자. 이들 연구는 크게 두 방향으로 나눌 수 있는데, 첫 번째는 일반화의 유형 및 본질을 규명하려는 연구로, Davydov(2000)는 일반화를 경험적 일반화와 이론적 일반화로 나누어, 일반화의 본질과 특성에 대한 철학적, 교수학적 측면의 고찰을 하였고, 김남희(1997)는 Dörler의 견해를 바탕으로 일반화의 의미와 구성 과정을 연구하였으며, 강시중(1991)과 강완·백석윤(1988)도 수학교육에서 일반화의 개념을 밝히려 시도하였다. 이들 연구는 일반화의 개념을 규정하고 일반화의 유형 및 그 과정을 밝혀 중등학교 수학교육의 개선을 위한 기초를 제공하였다는 측면에서 가치를 들 수 있을 것이다.

두 번째 연구 방향은 중등학교 수학교육의 구체적인 내용에 대한 일반화를 시도하여, 수학 교수-학습 과정에서 일반화의 직접적인 활용 가능성 모색에 관련된 연구를 들 수 있다. Polya(1954)는 답음 도형의 넓이를 이용하여 피타고라스 정리를 일반화하는 방법을 제시하였으며, 한인기(2001, 2003b)는 삼각형에서 무게중심에 대한 정리를 불록n각형으로 일반화하여 답음을 이용한 논증의 방법과 지렛대의 원리를 이용한 공학적 방법으로 증명하였다. 이러한 연구들은 수학적 지식의 교수학적 변환에 관련되며, 중등학교 수학교과에서 다루는 주제에 대한 일반화의 탐구를 통해 수학교육의 질적 개선을 위한 의미로운 자료를 얻을 수 있다는 측면에서 가치를 부여할 수 있다.

본 연구에서는 삼각형의 코사인정리를 n각형으로 일반화시키고, 이를 벡터를 이용하여 증명할 것이다. 수학교과내의 내용을 유추를 통해 확장하는 한 예를 제시할 것이며, 수학 영재교육에서 수학적 사고(특히 일반화, 유추)를 계발·육성하기 위한 교수-학습 자료로 활용할 수 있을 것으로 기대된다.

2. 삼각형의 코사인정리의 일반화

Polya(1954, p. 13)에 의하면, ‘일반화는 대상들의 주어진 집합에 대한 고찰로부터 주어진 집합을 포함하는 더 큰 집합에 대한 고찰로 옮겨가는 것이다. 예를 들어, 삼각형에 대한 고찰로부터 임의의 개수의 변을 가진 다각형에 대한 고찰로 옮겨간다면, 우리는 일반화를 한 것’이라고 했다. 본 연구에서는 유추를 바탕으로 삼각형의 코사인정리를 n각형에 대해 일반화시킬 것이다.

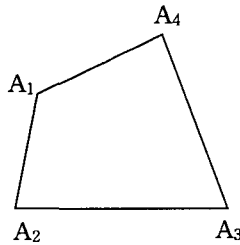
삼각형 ABC에서 코사인정리는 $\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cos B$ 와 같이 쓸 수 있다. 코사인정리를 일반화하기 위해, 이를 구성하는 요소들을 분석하자.

- \overline{CA}^2 ;
- \overline{AB}^2 , \overline{BC}^2 ;
- 합 $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$;
- 곱 $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$;

- \overline{AB} 와 \overline{BC} 의 끼인각 B;
- 곱 $2\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cos B$.

우선, 삼각형의 코사인정리를 사각형으로 유추하자. 이를 위해, <그림 1>에서와 같은 사각형 $A_1A_2A_3A_4$ 가 주어졌고, 삼각형에서 코사인정리에 상응하는 요소들을 사각형에서 추출하자. 이때, 첫째 합 $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ 는 구하는 선분 \overline{CA} 를 제외한 나머지 선분들의 제곱의 합이며, 둘째 곱 $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$ 는 합 $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ 에 포함된 선분들의 곱이며, 셋째 끼인각 B는 곱 $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$ 에 포함된 선분들 사이의 끼인각임을 명심하자. 사각형 $A_1A_2A_3A_4$ 에 대해, 다음을 분석할 수 있다.

- $\overline{A_4A_1}^2$;
- $\overline{A_1A_2}^2, \overline{A_2A_3}^2, \overline{A_3A_4}^2$;
- 합 $\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_3A_4}^2$;
- 곱 $\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_2A_3}, \overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_3A_4}, \overline{A_2A_3} \cdot \overline{A_3A_4}$;
- $\overline{A_1A_2}$ 와 $\overline{A_2A_3}$ 의 끼인각 A_2 , $\overline{A_1A_2}$ 와 $\overline{A_3A_4}$ 의 끼인각 α , $\overline{A_2A_3}$ 와 $\overline{A_3A_4}$ 의 끼인각 A_3 ;
- 곱 $2\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_2A_3} \cos A_2, 2\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_3A_4} \cos \alpha, 2\overline{A_2A_3} \cdot \overline{A_3A_4} \cos A_3$.



<그림 1>

삼각형의 코사인정리를 한인기·이상근(2000)이 제시한 다음 유추모형을 바탕으로 사각형의 코사인정리를 추측하자.

대상 A : $p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_n, x$

대상 B : $p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_n$

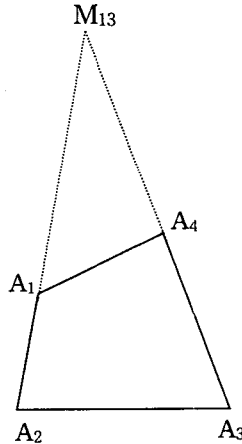
아마도 대상 B가 x 를 가질 것이다.

이때, 대상 A는 삼각형이며, 대상 B는 사각형이다. 대상 A에서 p_1 은 \overline{CA}^2 ; p_2 는 $\overline{AB}^2, \overline{BC}^2$; p_3 는 합 $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$; p_4 는 곱 $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$; p_5 는 \overline{AB} 와 \overline{BC} 의 끼인각 B; p_6 은 곱

$2\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cos B$ 라 할 수 있으며, 대상 B에서 p_1 은 $\overline{A_4A_1}^2$; p_2 는 $\overline{A_1A_2}^2$, $\overline{A_2A_3}^2$, $\overline{A_3A_4}^2$; p_3 는 합 $\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_3A_4}^2$; p_4 는 곱 $\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_2A_3}$, $\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_3A_4}$, $\overline{A_2A_3} \cdot \overline{A_3A_4}$; p_5 는 $\overline{A_1A_2}$ 와 $\overline{A_2A_3}$ 의 끼인각 A_2 , $\overline{A_1A_2}$ 와 $\overline{A_3A_4}$ 의 끼인각 α , $\overline{A_2A_3}$ 와 $\overline{A_3A_4}$ 의 끼인각 A_3 ; p_6 는 곱 $2\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_2A_3} \cos A_2$, $2\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_3A_4} \cos \alpha$, $2\overline{A_2A_3} \cdot \overline{A_3A_4} \cos A_3$ 를 추출할 수 있다. 한편, 대상 A로부터 대상 B로 유추되는 x 는 $\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cos B$ 이며, 이로부터 사각형에 대해 다음과 같은 성질을 추측할 수 있다:

$$\overline{A_4A_1}^2 = \overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_3A_4}^2 - 2\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_2A_3} \cos A_2 - 2\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_3A_4} \cos \alpha - 2\overline{A_2A_3} \cdot \overline{A_3A_4} \cos A_3.$$

이제, $\overline{A_1A_2}$ 와 $\overline{A_3A_4}$ 의 끼인각 α 에 대해 살펴보자. 다른 변들의 쌍($\overline{A_1A_2}$ 와 $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_2A_3}$ 와 $\overline{A_3A_4}$)과는 달리, 변 $\overline{A_1A_2}$ 와 $\overline{A_3A_4}$ 는 <그림 1>에서 서로 교차하지 않으므로, 이들 변사이의 끼인각으로 이들 변들의 연장선이 만나 생기는 끼인각을 생각할 수 있다(<그림 2>).



<그림 2>

이제, 변 $\overline{A_1A_2}$ 와 $\overline{A_3A_4}$ 의 연장선의 교점을 M_{13} 이라 하면(그림 2), 코사인정리를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\overline{A_4A_1}^2 = \overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_3A_4}^2 - 2\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_2A_3} \cos A_2 - 2\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_3A_4} \cos M_{13} - 2\overline{A_2A_3} \cdot \overline{A_3A_4} \cos A_3$$

이때, 각 M_{13} 은 $\angle A_1M_{13}A_3$ 를 의미한다. 물론, $\angle A_1M_{13}A_3$ 의 보각을 두 선분 $\overline{A_1A_2}$ 과

A_3A_4 의 연장선이 이루는 각으로 생각할 수도 있지만, 본 연구에서는 이들 선분의 연장선이 이루는 각들 중에서 사각형 $A_1A_2A_3A_4$ 를 포함하는 각을 선분 A_1A_2 과 A_3A_4 의 끼인각으로 한다.

언어진 추측의 타당성은 뒤에서 증명하기로 하고, n 각형에 대해 일반화된 추측을 만들자. 우선, 삼각형, 사각형에 대한 코사인정리의 표기를 통일하자. 삼각형 ABC 를 삼각형 $A_1A_2A_3$ 라 하고, 변 AB 를 a_1 , 변 BC 를 a_2 , 변 CA 를 a_3 라 하면, 코사인정리는 $a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos A_2$ 와 같이 쓸 수 있다. 마찬가지로, 사각형 $A_1A_2A_3A_4$ 에서 변 A_1A_2 를 a_1 , A_2A_3 을 a_2 , A_3A_4 를 a_3 , A_4A_1 을 a_4 라 하면, 사각형에 대한 코사인정리는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$a_4^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 2a_1a_2\cos A_2 - 2a_1a_3\cos M_{13} - 2a_2a_3\cos A_3$$

<그림 2>에서 점 M_{13} 은 변 a_1 과 a_3 의 연장선의 교점이다. 이러한 표기를 변 a_1 과 a_2 에 대해 사용하면, 변 a_1 과 a_2 의 교점을 M_{12} 라 할 수 있으며, 결국 M_{12} 는 점 A_2 와 같은 점이다. 즉, M_{ij} 에서 $j = i + 1$ 인 경우에 M_{ij} 는 점 A_j 와 일치하며, 그렇지 않은 경우에 M_{ij} 는 변 a_i 와 a_j 의 연장선의 교점이다. 그러면, $\cos A_2$ 는 $\cos M_{12}$ 로, $\cos A_3$ 는 $\cos M_{23}$ 으로 나타낼 수 있다. 한편, M_{ji} 는 M_{ij} 와 같은 점을 나타내므로, 본 연구에서는 $i < j$ 에 대해, 표기 M_{ij} 를 사용하기로 한다.

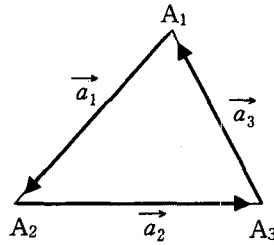
이제, 같은 표기 방법을 이용하여 n 각형 $A_1A_2\cdots A_n$ 에 대해 코사인정리를 유추하면, 다음 추측을 얻을 수 있다:

$$\begin{aligned} a_n^2 = & a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 - 2a_1a_2\cos M_{12} - \cdots - 2a_1a_{n-1}\cos M_{1(n-1)} - 2a_2a_3\cos M_{23} - \cdots \\ & - 2a_2a_{n-1}\cos M_{2(n-1)} - 2a_3a_4\cos M_{34} - \cdots - 2a_3a_{n-1}\cos M_{3(n-1)} \cdots \\ & - 2a_{n-2}a_{n-1}\cos M_{(n-2)(n-1)}. \end{aligned}$$

결국, 삼각형에서 코사인정리는 n 각형에 대해 다음과 같이 일반화될 수 있음을 추측할 수 있다. 한 변의 제곱 a_n^2 은 나머지 변들의 제곱 a_i^2 (단, $1 \leq i \leq n-1$)의 합에서 $1 \leq j < k \leq n-1$ 인 $2a_ja_k\cos M_{jk}$ 의 합을 뺀 것과 같다.

3. 삼각형의 코사인정리의 증명

삼각형의 코사인정리를 벡터를 이용하여 증명하고, 방법유추를 바탕으로 증명방법도 일반화시키자. 우선, 삼각형 $A_1A_2A_3$ 의 변들에 벡터 $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{a}_1$, $\overrightarrow{A_2A_3} = \vec{a}_2$, $\overrightarrow{A_3A_1} = \vec{a}_3$ 를 도입하자(<그림 3>).



<그림 3>

이제, $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ 에 대해, $|\vec{a}_1 + \vec{a}_2|^2$ 을 생각하면, $|\vec{a}_1 + \vec{a}_2|^2 = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = |\vec{a}_1|^2 + |\vec{a}_2|^2 + 2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$ 이 된다. $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = |\vec{a}_1||\vec{a}_2|\cos\alpha$ 인데, \vec{a}_1 과 \vec{a}_2 가 이루는 각 α 는 두 벡터의 시점을 같도록 하여 두 벡터가 이루는 각이므로, $\cos\alpha$ 는 $\cos(180^\circ - A_2)$ 가 된다. 그러므로, $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = -|\vec{a}_1||\vec{a}_2|\cos A_2$ 이고, $|\vec{a}_1 + \vec{a}_2|^2 = |\vec{a}_1|^2 + |\vec{a}_2|^2 - 2|\vec{a}_1||\vec{a}_2|\cos A_2$ 가 성립한다.

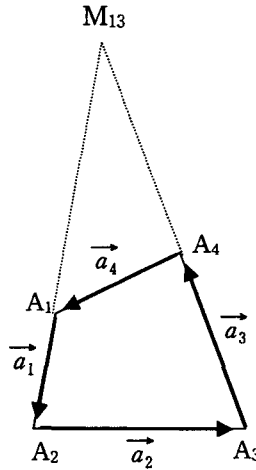
한편, $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a}_3$ 이므로, $|\vec{a}_3|^2 = |\vec{a}_1 + \vec{a}_2|^2 = |\vec{a}_1|^2 + |\vec{a}_2|^2 - 2|\vec{a}_1||\vec{a}_2|\cos A_2$ 이다. 이로부터, 삼각형 $A_1A_2A_3$ 에 대한 코사인정리가 증명된다.

4. 볼록다각형에서 코사인정리

한인기(2003a)는 평행사변형의 성질과 삼각형의 코사인정리를 이용하여 볼록사각형의 코사인정리에 대한 증명을 제시하였다. 본 연구에서는 이를 볼록사각형 뿐만 아니라 볼록n각형에 대해서도 벡터를 이용하여 증명할 것이다.

가. 볼록사각형

볼록사각형 $A_1A_2A_3A_4$ 에 대한 코사인정리를 살펴보도록 하자. <그림 2>에 <그림 3>과 같은 방법으로 벡터를 도입하자(<그림 4>).



<그림 4>

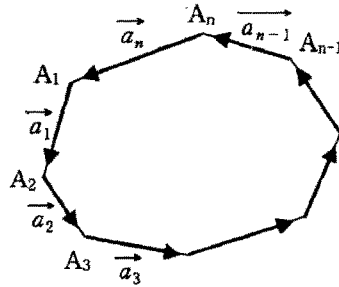
$\vec{a}_4 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$ 이므로, $|\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3|^2 = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3) \cdot (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3) = |\vec{a}_1|^2 + |\vec{a}_2|^2 + |\vec{a}_3|^2 + 2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 + 2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3 + 2\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3$ 가 된다. 이제, $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$ 에 대해 살펴보자. 삼각형에서 살펴본 바와 같이, $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = -|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \cos A_2$ 가 된다. 이제, $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3$ 에 대해 생각하자. <그림 4>에서 변 A_1A_2 , A_3A_4 의 연장선 M_{13} 은 각 $A_1M_{13}A_3$ 이다. 그러므로, $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3 = |\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_3| \cos(180^\circ - M_{13}) = -|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_3| \cos M_{13}$ 가 성립한다. 같은 방법으로, $\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 = -|\vec{a}_2| \cdot |\vec{a}_3| \cos A_3$ 임을 알 수 있다. 그러므로, 다음이 성립한다.

$$|\vec{a}_4|^2 = |\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3|^2 = |\vec{a}_1|^2 + |\vec{a}_2|^2 + |\vec{a}_3|^2 - 2[|\vec{a}_1||\vec{a}_2| \cos A_2 + |\vec{a}_1||\vec{a}_3| \cos M_{13} + \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 \cos A_3]$$

이로부터, 블록사각형에 대한 코사인정리가 증명된다. 한편, 평행사변형과 같이 \vec{a}_1 과 \vec{a}_3 가 평행한 경우에는 변 A_1A_2 와 A_3A_4 의 연장선이 이루는 각의 값을 0° 로 하면, 위의 식이 성립한다. 결국, 블록사각형에 대한 코사인정리가 증명된다.

나. 블록n각형에서 코사인정리

블록n각형 $A_1A_2 \cdots A_n$ 에 <그림 4>와 같은 방법으로 벡터를 도입하면(그림 5), $\vec{a}_n = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \cdots + \vec{a}_{n-1}$ 을 얻을 수 있고, 이제 $|\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \cdots + \vec{a}_{n-1}|^2$ 을 생각하자.



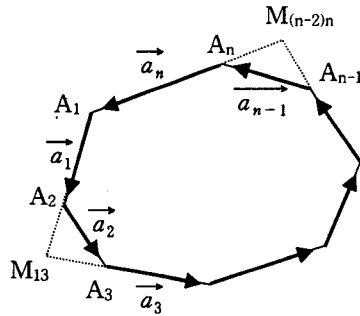
<그림 5>

$$\begin{aligned}
 (\vec{a}_1 + \cdots + \vec{a}_{n-1}) \cdot (\vec{a}_1 + \cdots + \vec{a}_{n-1}) &= \\
 &= |\vec{a}_1|^2 + |\vec{a}_2|^2 + \cdots + |\vec{a}_{n-1}|^2 + 2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 + 2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3 + \cdots + 2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_{n-1} \\
 &\quad + 2\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 + 2\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_4 + \cdots + 2\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_{n-1} + \cdots + 2\vec{a}_{n-2} \cdot \vec{a}_{n-1}.
 \end{aligned}$$

여기서, $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$ 는 사각형의 경우에서와 마찬가지로, $-|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \cos A_2$ 이며, $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3$ 을 살펴보자. 이를 위해, 변 A_1A_2 와 A_3A_4 의 연장선을 그어 교점을 M_{13} 이라 하자(그림 6). 그러면, 사각형에서와 마찬가지로 $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3$ 는 $-2|\vec{a}_1||\vec{a}_3| \cos M_{13}$ 와 같다. 같은 방법으로, $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_4 = -2|\vec{a}_1||\vec{a}_4| \cos M_{14}$ 을 얻을 수 있다. 이와 같이, $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_5, \dots, \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_{n-2} \cdot \vec{a}_{n-1}$ 을 계산하고, $\cos A_2 = \cos M_{12}, \cos A_3 = \cos M_{34}, \dots, \cos A_{n-1} = \cos M_{(n-2)(n-1)}$ 임을 감안하면, 볼록n각형에 대한 다음과 같은 코사인정리를 얻을 수 있다:

$$\begin{aligned}
 a_n^2 &= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 - 2a_1a_2 \cos M_{12} - \cdots - 2a_1a_{n-1} \cos M_{1(n-1)} - 2a_2a_3 \cos M_{23} - \cdots \\
 &\quad - 2a_2a_{n-1} \cos M_{2(n-1)} - 2a_3a_4 \cos M_{34} - \cdots - 2a_3a_{n-1} \cos M_{3(n-1)} \cdots \\
 &\quad - 2a_{n-2}a_{n-1} \cos M_{(n-2)(n-1)}.
 \end{aligned}$$

이로부터, 볼록n각형에 대한 코사인정리가 증명되며, 삼각형의 코사인정리가 볼록n각형에 대해 일관됨을 알 수 있다.



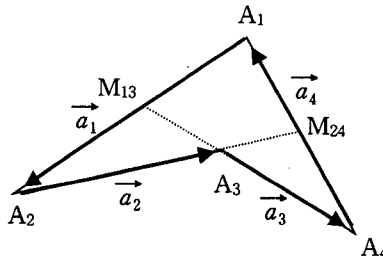
<그림 6>

5. 오목다각형에서 코사인정리

오목다각형에서 제이코사인정리의 증명은 볼록다각형에서의와 마찬가지로, 오목사각형에 대해 증명하고 나서 오목n각형인 경우를 고찰할 것이다.

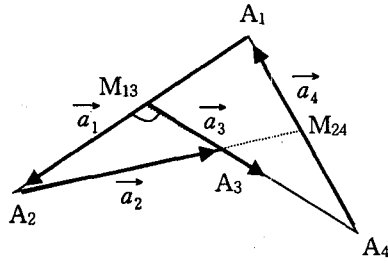
가. 오목사각형에서 코사인정리

오목사각형 $A_1A_2A_3A_4$ 에 벡터를 도입하자(그림 7).



<그림 7>

$|\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3|^2$ 을 전개하여 계산하면, $|\vec{a}_1|^2 + |\vec{a}_2|^2 + |\vec{a}_3|^2 + 2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 + 2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3 + 2\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3$ 인데, 이때 $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3$, $\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3$ 에 주목해야 한다. 우선, $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3$ 을 살펴보자. 변 A_3A_4 의 연장선과 변 A_1A_2 의 교점을 M_{13} 이라 하면, 두 각 $A_1M_{13}A_3$ 와 $A_2M_{13}A_3$ 이 생긴다. 이때, \vec{a}_3 을 <그림 8>과 같이 이동시켜, \vec{a}_1 과 \vec{a}_3 가 이루는 각의 보각 $A_1M_{13}A_3$ 을 변 A_1A_2 과 A_3A_4 의 끼인각 M_{13} 으로 잡는다.

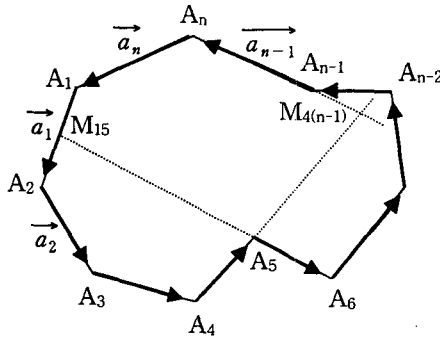


<그림 8>

$$\begin{aligned} \text{그러면, } \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3 &= |\vec{a}_1| |\vec{a}_3| \cos \angle A_2 M_{13} A_3 = |\vec{a}_1| |\vec{a}_3| \cos (180^\circ - \angle A_1 M_{13} A_3) \\ &= -|\vec{a}_1| |\vec{a}_3| \cos \angle A_1 M_{13} A_3 = -|\vec{a}_1| |\vec{a}_3| \cos M_{13} \end{aligned}$$

가 성립한다. 한편, $\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3$ 은 $|\vec{a}_2| |\vec{a}_3| \cos \angle A_4 A_3 M_{24}$ 인데, 각 $A_4 A_3 M_{24}$ 를 꼭지점 A_3 에서 둔 각인 내각을 이용해 나타내자. 그러면, $\angle A_4 A_3 M_{24} = -180^\circ + \angle A_3$ 이고, $\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3$ 은 $-|\vec{a}_2| |\vec{a}_3| \cos A_3$ 가 된다. 얻어진 결과들을 종합하면, $|\vec{a}_4|^2 = |\vec{a}_1|^2 + |\vec{a}_2|^2 + |\vec{a}_3|^2 - 2[|\vec{a}_1| |\vec{a}_2| \cos A_2 + |\vec{a}_1| |\vec{a}_3| \cos M_{13} + \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 \cos A_3]$ 가 성립한다. 이로부터, 오목사각형에 대한 코사인정리가 증명된다.

이제, 오목n각형 $A_1 A_2 \cdots A_n$ 에 대해 살펴보자. 오목n각형에 <그림 6>와 같은 벡터와 표기를 도입하자(<그림 9>).



<그림 9>

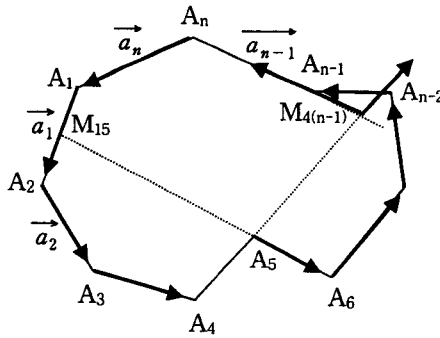
그러면, $\vec{a}_n = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \cdots + \vec{a}_{n-1}$ 이고, $|\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \cdots + \vec{a}_{n-1}|^2$ 을 생각하자. 볼록n각형에 살펴본 바와 같이, $|\vec{a}_n|^2$ 은 다음과 같이 구할 수 있다:

$$(\vec{a}_1 + \cdots + \vec{a}_{n-1}) \cdot (\vec{a}_1 + \cdots + \vec{a}_{n-1}) = |\vec{a}_1|^2 + |\vec{a}_2|^2 + \cdots + |\vec{a}_{n-1}|^2$$

$$\begin{aligned}
 &+ 2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 + 2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3 + \dots + 2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_{n-1} \\
 &\qquad\qquad\qquad + 2\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 + 2\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_4 + \dots + 2\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_{n-1} \dots \\
 &+ 2\vec{a}_{n-2} \cdot \vec{a}_{n-1}.
 \end{aligned}$$

식에 포함된 벡터들의 내적을 두 가지 경우로 나누어 살펴보자. 첫째, 변 A_1A_2 , A_3A_4 의 연장선으로 만들어진 각에 오목n각형이 포함되는 경우(예를 들어, $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3$, $\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_6$ 의 계산). 이러한 경우에는 볼록n각형에서와 같은 방법으로 변 A_1A_2 와 A_3A_4 의 끼인각을 정의하면 된다. 그러면, 변 A_1A_2 , A_3A_4 의 끼인각은 각 $A_1M_{13}A_3$ 이 된다(그림 11).

둘째, 변 A_5A_6 , A_1A_2 의 연장선으로 만들어진 각에 오목n각형이 포함되지 않는 경우. 이러한 경우에는 오목사각형에서와 같은 방법으로 접근할 수 있다. $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_5$ 을 살펴보자. 변 A_5A_6 의 연장선과 변 A_1A_2 의 끼인각을 오목사각형에서와 마찬가지로 $A_1M_{15}A_5$ 로 잡는다. 즉, $\cos M_{15} = \cos \angle A_1M_{15}A_5$ 이고, $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_5 = -|\vec{a}_1||\vec{a}_5|\cos M_{15}$ 를 얻게 된다. 한편, $\vec{a}_4 \cdot \vec{a}_{n-1}$ 의 경우도 $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_5$ 와 마찬가지로 생각할 수 있다.

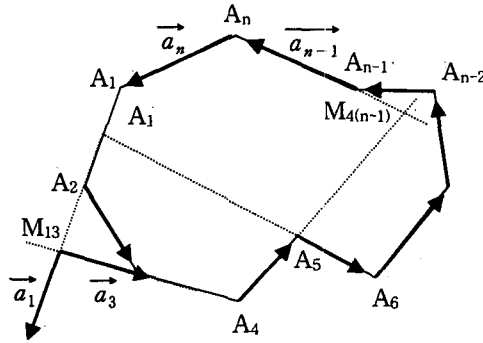


<그림 10>

<그림 10>과 같이 \vec{a}_4 , \vec{a}_{n-1} 을 이동시켜, 이들이 이루는 각의 보각인 $A_4M_{4(n-1)}A_{n-1}$ 을 변 A_4A_5 , $A_{n-1}A_n$ 의 끼인각으로 잡으면 된다. 그러면, $\vec{a}_4 \cdot \vec{a}_{n-1} = -|\vec{a}_4||\vec{a}_{n-1}|\cos M_{4(n-1)}$ 을 얻게 된다.

이와 같은 방법으로, 나머지 벡터들의 내적을 구하면, 오목n각형에 대한 코사인정리가 증명된다. 한 가지 주목할 것은 오목n각형에 대한 증명 과정에서 두 가지 경우로 나누어 내적을 구했는데, 첫 번째 경우의 방법은 두 번째 경우의 방법에 포함되는 부분적인 경우라 할 수 있다는 것이다. 실제로, <그림 9>에서 \vec{a}_1 , \vec{a}_3 을 연장선을 따라 <그림 11>과 같이 이동시키자. 이제, 두 번째 방법으로 변

A_1A_2 , A_3A_4 의 끼인각을 구하면, 각 $A_1M_{13}A_3$ 이 끼인각이 된다. 이것은 앞에서 구했던 각과 일치한다.



<그림 11>

이제, 얻어진 벡터들의 내적을 이용하여, $|\vec{a}_n|^2$ 을 다음과 같이 구할 수 있다:

$$\begin{aligned}
 |\vec{a}_n|^2 &= |\vec{a}_1|^2 + |\vec{a}_2|^2 + \dots + |\vec{a}_{n-1}|^2 - 2|\vec{a}_1||\vec{a}_2|\cos A_2 - 2|\vec{a}_1||\vec{a}_3|\cos M_{13} - \dots \\
 &\quad - 2|\vec{a}_1||\vec{a}_{n-1}|\cos M_{1(n-1)} - 2|\vec{a}_2||\vec{a}_3|\cos A_3 - 2|\vec{a}_2||\vec{a}_4|\cos M_{24} - \dots \\
 &\quad - 2|\vec{a}_2||\vec{a}_{n-1}|\cos M_{2(n-1)} \dots - 2|\vec{a}_{n-2}||\vec{a}_{n-1}|\cos A_{n-1}.
 \end{aligned}$$

이제, $\cos A_2 = \cos M_{12}$, $\cos A_3 = \cos M_{23}$, ..., $\cos A_{n-1} = \cos M_{(n-2)(n-1)}$ 임을 감안하면, 볼록n각형에서와 같은 식을 얻게 된다. 결국, n각형에 대한 코사인정리를 유도하였고, 벡터를 이용하여 이를 증명하였다.

6. 결 론

본 연구에서는 삼각형의 코사인정리를 n각형으로 일반화시키고, 이를 벡터를 이용하여 증명하였다. 삼각형에서의 코사인정리를 n각형으로 일반화하기 위해, 삼각형의 코사인정리의 구성 요소들을 분석하고, 사각형에서 상응하는 요소들을 추출하여 유추모형을 이용하였다. 사각형 $A_1A_2A_3A_4$ 에서 변 A_1A_2 와 A_3A_4 의 연장선의 교점을 M_{13} , 변 A_1A_2 를 a_1 , A_2A_3 을 a_2 , A_3A_4 를 a_3 , A_4A_1 을 a_4 라 하면, 사각형에서 코사인정리는 $a_4^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 2a_1a_2\cos A_2 - 2a_1a_3\cos M_{13} - 2a_2a_3\cos A_3$ (단, $\cos M_{13} = \cos \angle A_1M_{13}A_3$)와 같이 쓸 수 있다. 그리고, n각형에서 변 a_i 와 a_j 의 교점을 M_{ij} 라 하면, 코사인정리는 다음과 같이 일반화될 수 있다: 한 변의 제곱 a_n^2 은 나머지 변들의 제곱 a_i^2 (단, $1 \leq i \leq n-1$)의 합에서 $1 \leq j < k \leq n-1$ 인 $2a_ja_k\cos M_{jk}$ 의 합을 뺀 것

과 같다.

본 연구에서는 n 각형에 대한 코사인정리를 증명하기 위해, 벡터를 이용하여 삼각형에 대한 코사인정리를 증명하였으며, 이를 바탕으로 사각형, ..., n 각형에 대한 코사인정리를 증명하였다. 특히, 본 연구에서는 n 각형을 블록다각형과 오목다각형으로 나누어 이들 각각에 적합한 벡터를 이용한 증명 방법을 제시하였으며, 오목다각형의 증명에 사용했던 방법을 블록다각형에 대해서도 사용할 수 있음을 보였다.

본 연구의 결과는 수학교과와 교육과정의 내용을 유추를 통해 확장하는 한 예시가 될 것이며, 수학 영재교육에서 수학적 사고(특히 일반화, 유추)를 제발·육성하기 위한 교수-학습 자료로 활용할 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

- 강시중 (1991). 수학교육론, 서울: 교육출판사.
- 강완·백석윤 (1998). 초등수학교육론, 서울: 동명사.
- 교육부 (1998). 수학과 교육과정, 서울: 대한교과서주식회사.
- 교육부 (2001). 고등학교 교육과정 해설, 서울: 대한교과서주식회사.
- 김남희 (1997). 일반화의 의미와 구성에 대한 연구, 대한수학교육학회논문집 7(1), pp.445-458.
- 한인기 (2001). 유추를 활용한 무계중심 탐구에 관한 연구, 중등교육연구 13, pp.205-217.
- 한인기 (2003a). 교사를 위한 수학과, 서울: 교우사.
- 한인기 (2003b). 수학 문제해결에서 아르키메데스의 공학적 방법에 관한 연구, 수학교육논문집 17, pp. 115-126.
- 한인기·이상근 (2000). 유추를 활용한 기하 심화학습 자료 개발, 수학교육학술지 5, pp.165-174.
- Dovydov (2000). *Vidy obobsheniya v obuchenii*, Moskva: Pedagogicheskoe Obshestvo Rossii.
- Polya (1954). *Induction and analogy in mathematics*, New Jersey: Princeton University Press.
- Rubinshtein (1981). O prirode myshleniya i ego sostave. In Gippenreiter & Petuhova(Eds.), *Hrestomatiya po obshei psihologii*, pp. 78-86. Moskva: Izdatelstvo Moskovskoro Universiteta.

A Study on a Generalization of the Law of Cosine Using Vector²⁾

Inki Han

Dept of mathematics Education, Gyeongsang National University, 660-701, Korea

In this study we generalize the law of cosine(in any triangle the square of one side is equal to the sum of the squares of the other sides minus twice their product times the cosine of their included angle). We find the following generalized law of cosine: in any polygon the square of one side is equal to the sum of the squares of the other sides minus twice their products times the cosines of their included angles, and prove it using vector.

* ZDM Classification : E54

* MSC2000 Classification : 97C90

* Key Word : law of cosine, vector, analogy, polygon