韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 21집 제 1호, 2007. 2. 19-31

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 21, No. 1, Fed. 2007. 19-31

수학분야 영재 수업 프로그램 연구
-기둥이 4개인 하노이 탑의 규칙성과 일반항-

방 승 진 (아주대학교)
최 중 오 (경기과학고등학교)
임 진 아 (경기과학고등학교)
고 정 호 (경기과학고등학교)
이 정 승 (경기과학고등학교)
남 주 강 (경기과학고등학교)
전 규 민 (경기과학고등학교)

현재 초등학교, 중학교에 재학 중인 수학분야 영재학생들을 대상으로 하는 수업 프로그램은 많이 개발되어 있는 반면에 고등학교에 재학 중인 수학 분야 영재학생을 지도하기 위한 수업 프로그램은 찾아보기 어렵다.
본 논문은 초등학교와 중학교에 재학 중인 수학분야 영재학생들을 대상으로 지도했던 기둥이 3개인 하노이 탑의 규칙성과 일반항을 확장하여 기둥이 4개인 하노이 탑의 규칙성과 일반항에 대한 연구를 진행하였다. 본 연구를 토대로 아직 미해결 문제로 남아 있는 기둥이 n개인 하노이 탑의 규칙성과 일반항에 보다 가까이 접근할 수 있을 것이라 판단된다.

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성

영재교육진흥법(2000년)에 기초하여 영재학교, 영재학급 및 대학교와 시도교육청 부설 과학영재교육원에서 많은 수의 학생들이 영재교육을 받고 있으며 장기적으로 초·중·고등학교에 재학 중인 학생의 5%정도 까지 영재교육대상자를 확대할 예정이다. 또한 영재교육의 양적인 확대와 더불어 영재교육의 질을 높이기 위해 영재교육 담당교사에 대한 직무연수가 꾸준히 이루어지고 있으며, 교육개발원에서는 매년 영재교육 프로그램을 개발하여 영재교육 지도교사에게 수업자료로 활용할 수 있도록 하고 있다.

---

* ZDM분류 : D44
* MSC2000분류 : 97D50
* 주제어 : 수학영재교육 프로그램, 기둥이 4개인 하노이 탑

하지만 현재까지 개발되어진 영재교육프로그램은 초등학교나 중학교에 재학 중인 영재학생들을 대상으로 하고 있어 고등학교에 재학 중인 영재학생들을 지도할 영재교육프로그램은 매우 부족한 상황이다.

이에 2006학년도에 고등학교에 재학 중인 수학분야 영재학생들과 수업을 진행하여 얻은 결과물을 정리하여 영재교육 현장에서 학생들의 숨겨진 능력을 발현시키고자 노력하는 영재 지도교사에게 도움을 주고자 한다.

2. 연구의 목적

영재아는 자신의 관심분야에 대해 강한 지적 호기심을 보이며, 자신이 알고 있는 지식에서 출발하여 상위단계 지식으로의 확대 및 심화에 관심을 보이는 특징이 있다. 따라서 기초 개념으로부터 내용을 점진적으로 심화하여 하나의 중요 개념 혹은 정리로 확장시키는 경험, 즉 개념 또는 정리를 만든 수학자의 사고과정을 경험하게 하는 재발견 학습이 영재교육에 적합하다(2005, 방승진, 최중오, 김혁). 이와 같은 학습 방법은 수학의 개념을 위계적 구조로 구성하여 학생들에게 제시되는데, 수학 영재를 위한 프로그램에 있어서의 수업 접근방법에 대하여 NCTM(1986)은 "수학적으로 재능이 있는 학생들은 보다 높은 수준의 교육내용과 폭넓고 깊이 있는 수학적인 관점을 제시하는 프로그램에 참여하도록 해야 한다"는 의견을 제시했다. 수학은 교과목의 특성상 초·중·고등학교 수학에서 일반 교육과정에서 교수되는 기본적 개념들을 기초로 하여 연관성을 유지하면서 심화·발전시키는 위계적 구조로 학생들에게 제시될 때 영재아들의 지적 호기심을 충족시킬 수 있다(2005 방승진, 최중오).

본 연구는 기둥이 3개인 하노이 탑의 규칙성과 일반항에 대한 기초과정을 이해한 학생들을 대상으로 실시한 심화과정, 즉 기둥이 4개인 하노이 탑의 규칙성을 발견하고 이를 바탕으로 일반항을 찾아 가는 과정을 보여주어, 고등학교 현장에서 수학분야 영재학생을 지도하는 교사들에게 지도사례로 제시하는 것을 목적으로 한다.

Ⅱ. 본 론

1. 수학 개념의 위계적 구조

하노이 탑에 대한 전체적인 수업은 수학 개념의 위계적 구조에 따라 크게 기초과정과 심화과정으로 나누어 진행하였다. 먼저 기초개념은 기둥이 3개인 하노이 탑을 중심으로 하여 기초적인 수학개념에서 출발하여 조건이 변형된 하노이 탑의 규칙성과 일반항을 구하는 과정으로 구성하였다. 다음으로 심화개념은 기초개념의 이해를 바탕으로 기둥이 4개인 하노이 탑의 규칙성과 일반항을 주요 내용으로 구성하였다.

기초과정 : 기둥이 3개인 하노이 탑
(1) 등비수열의 일반항
(2) 점화식
(3) 하노이 탑의 규칙성과 일반항
(4) 변형 하노이 탑의 규칙성과 일반항

심화과정 : 기둥이 4개인 하노이 탑
(1) 군수열
(2) 규칙성 발견
(3) 기둥이 4개인 하노이 탑의 일반항

2. 수업 방법

본 수업은 '강의'+'시범'+'탐구활동' 형태로 진행되었으며 기둥이 3개인 하노이 탑의 규칙성과 일반항을 중심으로 하는 기초과정과 기둥이 4개인 하노이 탑의 규칙성과 일반항을 중심으로 하는 심화과정으로 나누어 심화 수업과정으로 구성하였다. 각 내용의 수업방법은 다음과 같다.

강의 수업
기초과정 : 등비수열의 일반항, 점화식
심화과정 : 군수열

시범 수업
기초과정 : 기둥이 3개인 하노이 탑에서 원판의 이동 규칙
심화과정 : 기둥이 4개인 하노이 탑에서 원판의 이동 규칙

탐구 활동 수업
기초과정 : 기둥이 3개인 하노이 탑의 규칙성과 일반항, 변형 하노이 탑의 일반항
심화과정 : 기둥이 4개인 하노이 탑의 규칙성과 일반항

3. 관련 단원

기초과정
고등학교 수학 I 의 '수열단원'에서 1.등차수열과 등비수열, 3.수학적귀납법의 내용에 대한 이해가

필요하며 하노이 탑의 일반항과 변형 하노이 탑의 일반항을 구하는 과정은 이 내용의 활용 부분에 속한다.

심화과정

기초과정을 포함하여 수학10-나의 함수단원, 수학Ⅰ의 수열단원에서 2.여러 가지 수열, 수학Ⅱ의 방정식과 부등식에 대한 이해가 필요하다.

4. 수업의 전개

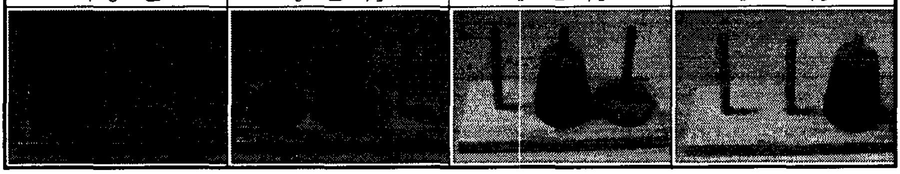
본 연구에서는 심화단계인 기둥이 4개인 하노이 탑의 규칙성과 일반항을 중심으로 하며, 기초 과정에서 얻은 기둥이 3개인 하노이 탑의 규칙성과 일반항은 정리로 활용하고자 한다. 본 연구에서 다루는 하노이 탑에서 원판의 이동규칙은 다음을 따른다.

1. 한 번에 한 개의 원판을 이동시킨다.
2. 크기가 큰 원판은 작은 원판 위에 놓일 수 없다.

[정리1] 기둥이 3개이고 n개의 원판을 가진 하노이 탑에서 n개의 원판을 다른 기둥으로 옮기는 최소 이동횟수a_n은 $a_n = 2^n - 1$이다.

<증명>

시행 전	[1단계]	[2단계]	[3단계]



n개의 원판을 옮기기 위해서는

[1단계] $n-1$개의 원판을 옮긴다. → a_{n-1} (회)

[2단계] 맨 아래 1개의 원판을 옮긴다. → 1 (회)

[3단계] 맨 아래 원판 위에 $(n-1)$개의 원판을 옮긴다. → a_{n-1} (회)

따라서, n개의 원판을 옮기는 최소이동횟수 a_n은

$a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1} = 2a_{n-1} + 1$

관계식 $a_n = 2a_{n-1} + 1$은 다음 과정을 거쳐서 a_n을 계산할 수 있다.

$(a_n + 1) = 2(a_{n-1} + 1)$

수열 $\{a_n+1\}$은 초항이 a_1+1 이고 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n+1=(a_1+1)\times 2^{n-1}=2\times 2^{n-1}=2^n$

$\therefore a_n=2^n-1$」

[정리2] 기둥이 3개인 하노이 탑에서 n개의 원판을 다른 기둥으로 옮기는 최소이동횟수 a_n의 경로는 유일하다.

<증명>

수학적 귀납법을 사용하여

a_1은 유일하다.

a_k가 유일하다고 가정하면

$a_{k+1}=2a_k+1=a_k+1+a_k$이므로 a_{k+1}도 유일하다.

따라서 a_n의 경로는 유일하다.」

다음으로 기둥이 4개인 하노이 탑의 규칙성과 일반항을 구하는 과정은 처음에 학생들이 탐구과정을 통해 원판의 개수를 1개부터 하나씩 늘려가며 최소 이동횟수를 찾도록 지도한다.

실제 학생들이 하노이 탑을 가지고 실험을 하여 다음 표와 같은 결과를 얻을 수 있다. 하지만 원판의 개수가 커지면 최소이동횟수에 오류가 발생할 확률이 커지므로, 여러 명 또는 팀의 결과를 서로 비교하여 정확한 값을 찾도록 해야 한다.

원판의 개수 n	최소이동횟수 b_n	원판의 개수 n	최소이동횟수 b_n
1	b_1=1	7	b_7=25
2	b_2=3	8	b_8=33
3	b_3=5	9	b_9=41
4	b_4=9	10	b_{10}=49
5	b_5=13	11	b_{11}=65
6	b_6=17	12	b_{12}=81

기둥이 4개인 하노이 탑에서 n개의 원판을 다른 기둥으로 옮기는 최소이동횟수b_n의 규칙성을 살펴보면 다음과 같다.

$b_2-b_1=3-1=2$, $b_3-b_2=5-3=2$, $b_4-b_3=9-5=4$

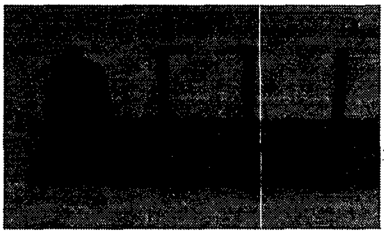
$b_5-b_4=13-9=4$, $b_6-b_5=17-13=4$, $b_7-b_6=25-17=8$

$b_8-b_7=33-25=8$, $b_9-b_8=41-33=8$, $b_{10}-b_9=49-41=8$

$b_{11}-b_{10}=65-49=16$, $b_{12}-b_{11}=81-65=16$

즉, 연속된 두 항의 차가 2 두 개, 4 세 개, 8 네 개, 다음에 16이 나오는데 앞의 수들의 규칙성을 살펴보면 16의 개수는 다섯 개가 나올 것으로 추측된다. 따라서 이 수열은 군수열의 형태를 띠며, 군수열의 개념을 이용하여 일반항을 유도할 수 있다.

[정리3] 네 개의 기둥 A,B,C,D가 있는 하노이 탑에서 기둥A에 있는 n개의 원판을 최소이동횟수 b_n으로 기둥D에 옮기려 한다. 이 때, 적당한 자연수 $k(1 \leqq k \leqq n-1)$에 대하여 $b_n = 2b_k + 2^{n-k} - 1$를 만족한다.



<증명>

n개의 원판을 다른 기둥으로 옮기는 최소이동횟수를 b_n이라 하면 크기가 작은 순으로 k개의 원판을 기둥B로 옮기는 최소이동횟수는 b_k이다.

기둥 A에 남아 있는 $n-k$개의 원판을 기둥D로 옮길 때 기둥B를 사용할 수 없으므로 최소이동횟수는 기둥이 3개인 하노이 탑을 따른다. 또 [정리1]에서 $n-k$개의 원판을 기둥D로 옮기는 최소이동 횟수는 $2^{n-k}-1$ 가지이다.

[1단계] k개의 원판을 기둥 B로 옮기는 최소이동횟수 b_k

[2단계] $n-k$개의 원판을 기둥 D로 옮기는 최소이동횟수 $2^{n-k}-1$

[3단계] k개의 원판을 기둥 D로 옮기는 최소이동횟수 b_k

따라서 적당한 자연수 k $(1 \leqq k \leqq n-1)$에 대하여

$$b_n = b_k + (2^{n-k} - 1) + b_k$$
$$= 2b_k + 2^{n-k} - 1$$

를 만족한다.」

앞에서 언급했듯이 $b_{k+1} - b_k$는 모두 2의 거듭제곱 꼴이며, $b_k - b_{k-1}$과는 같거나 2배이다. 또 기둥이 4개인 하노이 탑에서 n개의 원판을 다른 기둥으로 옮기는 최소이동횟수 b_n의 경로는 유일하지 않다.

예를 들어, $k=3,6,10,15,\cdots$ 인 경우

$a_k - a_{k-1} = 2^{n-k-2} = 2,4,8,16,\cdots$ 이므로 $n-k-2=1,2,3,4,\cdots$

$\therefore n = 6,10,15,21,\cdots$

즉, $n=\dfrac{m(m+1)}{2}$ $(m \geqq 3)$일 때만 최소경로가 한 가지이고 나머지 경우에는 최소경로가 2가지씩 존재한다.

[정리4] 기둥 A에 있던 n개의 원판을 기둥 B에 k개, 기둥 C에 $n-k-1$ 개로 이동시킬 때, 기둥 B로 이동되는 원판의 개수 k는 다음 성질을 갖는다.

(성질1) $n=\dfrac{m(m+1)}{2}$이면 최소가 되는 k는 $k=\dfrac{m(m-1)}{2}$이고

$n=\dfrac{m(m+1)}{2}+t$ $(1 \leqq t \leqq m)$이면 최소가 되는 k는 $k=\dfrac{m(m-1)}{2}+t$, $k=\dfrac{m(m-1)}{2}+t-1$이다.$(m \geqq 3)$

(성질2) $\dfrac{m(m+1)}{2} \leqq n \leqq \dfrac{m(m+1)}{2}+m$이면 $b_{n+1}-b_n = 2^m$이다.$(m \geqq 3)$

<증명>

i) $n=\dfrac{m(m+1)}{2}$일 때

(성질1)에서

(a) $k=\dfrac{m(m-1)}{2}$인 경우

$$b_{k+1}-b_k = b_{\frac{m(m-1)}{2}+1} - b_{\frac{m(m-1)}{2}} = 2^{m-1}$$

$$> 2^{n-k-2} = 2^{\frac{m(m+1)}{2}-\frac{m(m-1)}{2}-2} = 2^{m-2}$$

$\therefore b_{k+1}-b_k > 2^{n-k-2}$

마찬가지로 $b_k - b_{k-1} < 2^{n-k-1}$

(b) $k \geqq \dfrac{m(m-1)}{2}+1$인 경우

$b_{k+1}-b_k \geqq 2^{m-1} = 2^{n-k-1}$

(c) $k \leqq \dfrac{m(m-1)}{2}-1$인 경우

$b_{k+1}-b_k \leqq 2^{m-2} = 2^{n-k-2}$

따라서 최소가 되는 k의 값은 $k=\dfrac{m(m-1)}{2}$

ii) $n=\dfrac{m(m+1)}{2}+1$일 때

(성질1)에서

(a) $k=\dfrac{m(m-1)}{2}+1$인 경우

$b_{k+1}-b_k=b_{\frac{m(m-1)}{2}+2}-b_{\frac{m(m-1)}{2}+1}=2^{m-1}$이고 $2^{n-k-2}=2^{m-2}$이므로

$b_{k+1}-b_k>2^{n-k-2}$

또, $b_k-b_{k-1}=b_{\frac{m(m-1)}{2}+1}-b_{\frac{m(m-1)}{2}}=2^{m-1}$이고 $2^{n-k-1}=2^{m-1}$이므로

$b_k-b_{k-1}=2^{n-k-1}$ (성립)

(b) $k=\dfrac{m(m-1)}{2}$인 경우

$b_{k+1}-b_k=2^{m-1}$이고 $2^{n-k-2}=2^{m-1}$이므로 $b_{k+1}-b_k=2^{n-k-2}$

$b_k-b_{k-1}=a_{\frac{m(m-1)}{2}}-a_{\frac{m(m-1)}{2}-1}=2^{m-2}$이고 $2^{n-k-1}=2^m$이므로

$b_k-b_{k-1}<2^{n-k-1}$ (성립)

(c) $k\geqq\dfrac{m(m-1)}{2}+1$인 경우

$b_{k+1}-b_k\geqq 2^{m-1}$이고 $2^{n-k-2}\leqq 2^{m-2}$이므로 $b_{k+1}-b_k>2^{n-k-2}$

(d) $k\leqq\dfrac{m(m-1)}{2}-1$인 경우

$b_k-b_{k-1}\leqq 2^{m-3}$이고 $2^{n-k-1}\geqq 2^{m-1}$이므로 $b_k-b_{k-1}<2^{n-k-1}$

따라서 최소가 되는 k의 값은 $k=\dfrac{m(m-1)}{2}$와 $k=\dfrac{m(m-1)}{2}+1$이다.

iii) $n=\dfrac{m(m+1)}{2}$일 때 (성질2)에서

$$b_{n+1}-b_n=\left(2\cdot b_{\frac{m(m-1)}{2}+1}+2^{n-k}-1\right)-\left(2\cdot b_{\frac{m(m-1)}{2}}+2^{n-k}-1\right)$$

$$=2\cdot\left(b_{\frac{m(m-1)}{2}+1}-b_{\frac{m(m-1)}{2}}\right)$$

$$=2\cdot 2^{m-1}=2^m$$

ⅳ) $n=\dfrac{m(m+1)}{2}+t\ (2 \leqq t \leqq m)$일 때 (성질1)에서

(a) $k=\dfrac{m(m-1)}{2}+t$인 경우 $\dfrac{m(m-1)}{2} \leqq k \leqq \dfrac{m(m+1)}{2}$에서

$b_{k+1}-b_k \geqq 2^{m-1}$이고 $2^{n-k-2}=2^{m-2}$이므로 $b_{k+1}-b_k > 2^{n-k-2}$

$b_k-b_{k-1}=2^{m-1}$이고 $2^{n-k-1}=2^{m-1}$이므로 $b_k-b_{k-1}=2^{n-k-1}$ (성립)

(b) $k=\dfrac{m(m-1)}{2}+t-1\ (2 \leqq t \leqq m)$인 경우

$b_{k+1}-b_k=2^{m-1}$이고 $2^{n-k-2}=2^{m-2}$이므로 $b_{k+1}-b_k > 2^{n-k-2}$

$b_k-b_{k-1}=2^{m-1}$이고 $2^{n-k-1}=2^{m-1}$이므로 $b_k-b_{k-1}=2^{n-k-1}$ (성립)

(c) $k \geqq \dfrac{m(m-1)}{2}+t+1\quad (2 \leqq t \leqq m)$인 경우

$b_k-b_{k-1} \geqq 2^{m-1}$이고 $2^{n-k-1} \leqq 2^{m-2}$이므로 $b_k-b_{k-1} > 2^{n-k-1}$

(d) $k \leqq \dfrac{m(m-1)}{2}+t-2\quad (2 \leqq t \leqq m)$인 경우

$b_{k+1}-b_k \leqq 2^{m-1}$이고 $2^{n-k-2} \geqq 2^m$이므로 $b_{k+1}-b_k < 2^{n-k-2}$

따라서 b_n이 최소가 되도록 하는 k의 값은

$$k=\frac{m(m-1)}{2}+t,\ k=\frac{m(m-1)}{2}+t-1\quad (2 \leqq t \leqq m)$$

ⅴ) $n=\dfrac{m(m+1)}{2}+t$일 때 (성질2)에서

(a) $1 \leqq t \leqq m-1$ 인 경우

$$\begin{aligned} b_{k+1}-b_k &= 2 \cdot \left(b_{\frac{m(m-1)}{2}+t+1}\right)+2^m-1-\left(2 \cdot b_{\frac{m(m-1)}{2}+t}+2^m-1\right) \\ &= 2 \cdot \left\{b_{\frac{m(m-1)}{2}+t+1}-b_{\frac{m(m-1)}{2}+t}\right\} \\ &= 2 \cdot 2^{m-1}=2^m \end{aligned}$$

(b) $t=m$ 인 경우

$$\begin{aligned} b_{k+1}-b_k &= \left(2 \cdot b_{\frac{m(m+1)}{2}}+2^{\frac{(m+1)(m+2)}{2}-\frac{m(m+1)}{2}}-1\right)-\left(2 \cdot b_{\frac{m(m+1)}{2}}+2^m-1\right) \\ &= 2^{m+1}-2^m=2^m \text{ (성립)} \end{aligned}$$

ⅰ), ⅱ), ⅲ), ⅳ), ⅴ)에서 모든 자연수 m에 대하여 (성질1)과 (성질2)가 성립한다.」

$b_1 = 1$

$b_2 = 1+2$

$b_3 = 1+2+2$

$\cdots$

$b_n = 1+(2+2+2^2+2^2+2^2+\cdots)$

$\cdots$

에서 $n = \dfrac{m(m+1)}{2} + t \ (0 \leq t \leq m)$일 때,

$$b_n = 1+\{(2+2)+(2^2+2^2+2^2)+(2^3+2^3+2^3+2^3)+\cdots+(2^{m-1}+2^{m-1}+\cdots+2^{m-1}) +(2^m+2^m+\cdots+2^m)$$

즉,

$$b_n = 1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\cdots+m\cdot 2^{m-1}+t\cdot 2^m$$

와 같이 나타낼 수 있다.

[정리5] 기둥이 4개인 하노이 탑에서 n개의 원판을 다른 기둥으로 옮기는 최소이동횟수 b_n은

$$b_n = \left(n - \frac{\left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right]\left[\frac{\sqrt{8n+1}-3}{2}\right]}{2} - 1\right)\cdot 2^{\left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right]} + 1$$ 이다.

<증명>

$b_2 - b_1 = 2$

$b_3 - b_2 = 5-3 = 2$

$b_4 - b_3 = 9-5 = 4 = 2^2$

$b_5 - b_4 = 13-9 = 4 = 2^2$

$b_6 - b_5 = 17-13 = 4 = 2^2$

$b_7 - b_6 = 25-17 = 8 = 2^3$

$b_8 - b_7 = 33-25 = 8 = 2^3$

$b_9 - b_8 = 41-33 = 8 = 2^3$

$b_{10} - b_9 = 49-41 = 8 = 2^3$

$b_{11} - b_{10} = 65-49 = 16 = 2^4$

$b_{12} - b_{11} = 81-65 = 16 = 2^4$

$\vdots$

$$b_{\frac{m(m+1)}{2}} - b_{\frac{m(m+1)}{2}-1} = 2^{m-1}$$

$$b_{\frac{m(m+1)}{2}+1} - b_{\frac{m(m+1)}{2}} = 2^{m}$$

$$\vdots$$

$$b_{\frac{m(m+1)}{2}+t} - b_{\frac{m(m+1)}{2}+t-1} = 2^{m} \quad (0 \leqq t \leqq m)$$

위의 주어진 식을 변변이 더하면

$$b_{\frac{m(m+1)}{2}+t} = t \cdot 2^{m} + m \cdot 2^{m-1} + (m-1) \cdot 2^{m-2} + \cdots + 3 \cdot 2^{2} + 2 \cdot 2 + 1 \ (b_1 = 1)$$

여기서 $S = m \cdot 2^{m-1} + (m-1) \cdot 2^{m-2} + \cdots + 3 \cdot 2^{2} + 2 \cdot 2 + 1$ 라 하고 다음 두 식을 변변이 빼면

$$2S = m \cdot 2^{m} + (m-1) \cdot 2^{m-1} + \cdots + 3 \cdot 2^{3} + 2 \cdot 2^{2} + 2 \cdot 1$$

$$-)\ S = m \cdot 2^{m-1} + (m-1) \cdot 2^{m-2} + \cdots + 3 \cdot 2^{2} + 2 \cdot 2 + 1$$

$$S = m \cdot 2^{m} - (2^{m-1} + 2^{m-2} + \cdots + 2^{2} + 2 + 1)$$

$$= m \cdot 2^{m} - (2^{m} - 1)$$

$$= (m-1) \cdot 2^{m} + 1$$

따라서

$$b_{\frac{m(m+1)}{2}+t} = t \cdot 2^{m} + (m-1) \cdot 2^{m} + 1$$

$$= (m+t-1) \cdot 2^{m} + 1$$

여기서 $n = \dfrac{m(m+1)}{2} + t \ (0 \leqq t \leqq m)$이라 하면

$\dfrac{m(m+1)}{2} \leqq n < \dfrac{(m+1)(m+2)}{2}$이고 이 식을 m에 대하여 정리하면

$$\frac{\sqrt{8n-1}-3}{2} < m \leqq \frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}$$

$$\therefore\ m = \left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right]$$

$$\therefore\ b_n = \left(n - \frac{\left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right]\left[\frac{\sqrt{8n+1}-3}{2}\right]}{2} - 1\right) \cdot 2^{\left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right]} + 1$$ 』

Ⅲ. 결 론

기둥이 3개인 하노이 탑은 초등학교나 중학교에 재학 중인 수학영재학생들에게 활동수업 자료로 적합하며 특히, 조건을 다양하게 변형하여 만든 변형하노이 탑에서 규칙성과 일반항을 찾는 과정은 영재학생들이 매우 높은 흥미와 집중도를 보였다.

본 연구에서 다룬 기둥이 4개인 하노이 탑의 규칙성과 일반항은 내용상 초·중학교에 재학 중인 영재학생에게서는 결과물을 얻지 못한 반면에 과학고에 재학 중인 수학영재학생들에게 투입하였을 때는 다양한 규칙성과 함께 일반항을 이끌어 내는데 성공하였다.

이와 같은 결과를 바탕으로 현재까지 미해결 문제로 남아 있는 기둥이 n개인 하노이 탑의 규칙성과 일반항을 찾기 위한 출발점을 제시하였다는 점에서 본 연구의 의미를 찾을 수 있다고 판단된다.

참 고 문 헌

최중오 (2006). 변형 하노이 탑의 원리, 한국교육개발원, 영재수업 교수학습자료.

방승진 · 최중오 (2006). 심화발문을 통한 영재수업 모델 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **제20집 제1호 통권 25호**, pp.87-101.

방승진 · 최중오 · 김혁 (2006). 패턴인식을 이용한 수학 영재 판별에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **제20집 제4호 통권 28호**, pp.551-559.

The Study on the Educational program for the gifted students in Mathematics
-The regularity and generalization of Hanoi Tower with 4 pillars-

Bang, Seung-Jin
Dept. of Math., Ajou Univ., San 5 Woncheon-dong, Yeongtong-gu, Suwon, Gyeonggi 402-751, korea
E-mail: emath@naver.com

Choi, Jung-oh
Kyunggi Sci. High Sch., Songjuk-dong, Jangan-gu, Suwon, Gyeonggi 440-210, Korea
E-mail: setfree1@hanmail.net

Lim, Jin-A
E-mail: lojinnyve@hanmail.net

Koh, Jung-ho
E-mail: kohjungho@hanmail.net

Lee, Jung-Seung
E-mail: free_mail21@naver.com

Nam, Ju-Gang
E-mail: dyuing89@empal.com

Jeon, gyu-min
E-mail: jkm323@naver.com

Currently the mathematics gifted students educational program is plentifully being developed for the elementary and the junior high school students. But the educational program for the gifted students who comes and goes to the high school is not many.

This study look for the regularity and generalization of Hanoi Tower with 4 pillars, from the regularity and generalization of Hanoi Tower with 3 pillars. I think this study will be a clue to find the regularity and generalization of Hanoi Tower with n pillars, it's not solved still.

---

* ZDM Classification : D44
* MSC2000 Classification : 97D50
* Key Word : The program for the gifted students in mathematics, Hanoi tower with 4