

< 논문 >

## 미분변환법에 의한 진동 해석시 급수중심이 해의 수렴에 미치는 영향

신영재<sup>†</sup> · 윤종학\* · 유영찬\*\*

(2006년 8월 14일 접수, 2007년 1월 2일 심사완료)

### The Effect of Series Center on the Convergence of the Solution in Vibration Analysis by Differential Transformation Method(DTM)

Young Jae Shin, Jong Hak Yun and Yeong-Chan Yoo

**Key Words :** Center of the Series(급수 중심), Differential Transformation Method(미분변환법), Axial Force(축하중)

#### Abstract

This paper presents the effect of the center of the series on convergence in solving vibration problems by Differential Transformation Method(DTM) to the transverse vibration of the Euler-Bernoulli beam under varying axial force. The governing differential equation of the transverse vibration of the Euler-Bernoulli beam under varying axial force is derived. The concepts of DTM were briefly introduced. Numerical calculations are carried out and compared with previously published results. The effect of the center of the series on convergence in solving the problem by DTM is discussed.

#### 1. 서 론

많은 기계구조물의 구조적 요소는 축 방향으로 분포된 하중을 받으며, 이러한 예는 일정한 하중을 받는 타이바(tie-bar)와 같은 구조물 요소, 선형적으로 분포되는 축 방향의 하중을 받는 중력장 내에 수직으로 위치하는 일정단면 보, 그리고 주기적으로 분포하는 원심력이 작용하는 장(field)에 놓여있는 보 등이 있다. 특히 많은 기계구조물의 요소는 비선형적으로 분포된 하중이 작용하는 임의단면을 가진다.

Naguleswaran<sup>(1)</sup>은 매달거나 선 보의 경계조건과 같은 고정단 및 자유단 경계조건을 가지는 일정단면 외팔보의 처음 세 무차원 고유진동수를 계산하였다. 그 일반해는 네 개의 선형 독립된

먹급수 함수로 구성되었다. Naguleswaran<sup>(2)</sup>은 Frobenius방법을 사용함에 의하여, 일반적인 경계 조건의 16조합에 대해 선형적으로 변하는 축 방향 하중이 작용하는 일정단면 Euler-Bernoulli보의 횡 방향 진동을 연구 하였으며, 또한 좌굴의 동적 불안정성에 대하여 연구하였다. 축 방향으로 작용하는 하중은 축 방향에 대하여 일정한 부분과 비례하는 부분으로 구성된다.

미분변환법(DTM)의 개념은 전기회로 해석에서 선형 및 비선형 초기치 문제에 대하여 적용되었다. 최근에 미분변환법은 고유값 문제를 풀기 위하여 많은 연구자들의 관심이 집중되고 있다.<sup>(3-5)</sup> 미분 변환법을 사용하여 얻은 해는 무한급수로 표현 되므로, 그 수치적 결과의 정확성을 증명함과 동시에 수렴도를 평가하기 위하여 급수중심이 수렴성에 미치는 연구가 필요하다.<sup>(8)</sup>

Shin<sup>(6)</sup> 등은 미분변환법을 사용하여 변화하는 두께를 가지는 증실 및 환형 원판을 연구하였다. Han 및 Liew<sup>(7)</sup>는 미분구적법(Differential Quadrature Method : DQM)을 사용하여 두꺼운 환형 판의 축

<sup>†</sup> 책임저자, 회원, 안동대학교 기계공학부  
E-mail : yjshin@andong.ac.kr  
TEL : (054)820-5435 FAX : (054)820-5167

\* 안동대학교 기계공학부

\*\* 안동대학교 건축공학부

대칭 자유진동에 대하여 경계조건에 대한 수렴성을 연구하였다. 미분구적법의 결과들을 몇몇의 정해나 유한 요소 수치해석의 결과와 비교함에 의하여 정확성을 검증하였다. Leissa 및 Kang은 Frobenius<sup>(8)</sup>법에 의하여 선형적으로 변하는 평면응력 하에서 SS-C-SS-C 사각평판의 진동과 좌굴 문제의 수렴성을 연구 하였다.

본 논문에서는 변하는 하중을 받고 있는 Euler-Bernoulli보의 횡방향 진동에 대하여 미분변환법을 사용하여 진동해석 할 때, 급수의 중심이 해의 수렴에 대한 영향을 연구하였다. 가변적인 힘을 받고 있는 Euler-Bernoulli보의 지배 미분방정식을 유도하고 간단히 소개하였으며, 미분변환법의 개념이 간단히 소개되었다. 수치적 계산에 의해 얻은 결과들은 미분변환법의 정확성과 효용성을 증명하기 위하여 이미 연구된 결과들과 비교하였다. 그리고 미분변환법에 의해 문제를 풀 때 급수의 중심에 대한 수렴의 영향이 논의 되었다.

2. 미분변환법(DTM)

미분변환법(Differential Transformation Method)의 개념은 Zhou(1986)에 의하여 처음 제안되었다. 미분변환법은 Taylor 급수 전개에 기초를 두었고, 미분방정식의 해는 미분변환의 기초적인 연산에 의하여 변환된 운동의 지배방정식의 대수적인 순환관계로 얻어진다. 그리고 미분변환법은 선형 및 비선형 문제를 풀기 위하여 유용한 방법이다.

도메인 D에서  $y(x)$  가 해석적이고  $x = x_0$  인 점이 존재한다면, 급수의 중심이  $x = x_0$  이고 함수  $y(x)$  을 나타낼 수 있는 어떤 급수가 존재한다. 그리고 이 급수를  $y(x)$  의 Taylor 급수라 하며, 그 형태는 식 (1)과 같다.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \left[ \frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} \quad \text{for } \forall x \in D \quad (1)$$

식 (1)에서 함수의 미분변환을  $Y(k)$  라고 정의하면 식 (2)와 같다.

Table 1 Examples of the differential transformation of the original function

Original function	T-function
$w(x) = y(x) \pm z(x)$	$W(k) = Y(k) \pm Z(k)$
$z(x) = \lambda y(x)$	$Z(k) = \lambda Y(k)$
$w(x) = \frac{d^n y(x)}{dx^n}$	$W(k) = P_{k,n} Y(k+n)$
$w(x) = y(x)z(x)$	$W(k) = \sum_{l=0}^k Y(l)Z(k-l)$
$w(x) = x^m$	$W(k) = \frac{m!}{k!} x_0^{m-k}$
$w(x) = \sin(\lambda x)$	at $x_0 = 0$ $W(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)$

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} \quad (2)$$

그리고 식 (2)를 식 (1)에 대입하고 다시 정리하면, 원시함수  $y(x)$  는 식 (3)같이 얻어진다.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x-x_0)^k Y(k) \quad (3)$$

여기서  $Y(k)$  을 원시함수  $y(x)$  에 대한 T함수(T-function)라고 하며, 식 (3)은 T함수  $Y(k)$  의 미분변환이다.

위의 미분변환의 정의로부터 변환 연산자의 규칙을 유도할 수 있으며, 미분변환의 적용 및 해석에 있어서 유용한 이러한 연산의 몇몇 예는 Table 1에 목록화 되었다.

특히,  $x_0 = 0$  이고 원시함수가  $w(x) = x^m$  이라면, 그 T 함수는 식 (4)와 같다. 표에서 P는 순열(permutation)을 나타낸다.

$$W(k) = \delta(k-m) \quad \text{at } \begin{matrix} 1 & k = m \\ 0 & k \neq m \end{matrix} \quad (4)$$

여기서  $\delta$  는 크로네크 델타(Kronecker delta)를 나타낸다.

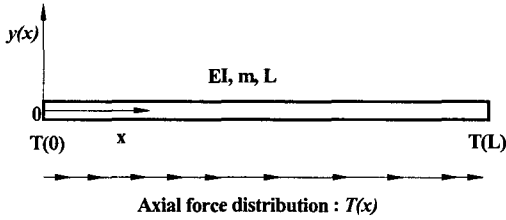


Fig. 1 The beam coordinate system and axial force distribution

실제 적용에 있어서,  $y(x)$  는 유한개의 항을 취하는 식 (5)에 의하여 근사 표현된다.

$$y(x) = \sum_{k=0}^n (x - x_0)^k Y(k) \quad (5)$$

여기서  $n$ 은 해의 수렴도를 결정하는 자연수이다.

### 3. 지배방정식과 경계조건

Fig. 1은 변하는 하중을 받는 Euler-Bernoulli보를 나타낸다. 그림에서  $EI$ ,  $m$  및  $L$ 은 각각 일정 단면 보의 휨 강성(flexural rigidity), 단위 길이당 질량 및 길이를 나타낸다. 끝단 ( $x=0$ )은 축 방향으로 강제되고, 반대편 단은 자유단이다. 보의 축을 따른 가로좌표축  $x$ 에서 변하는 축 하중 분포  $\bar{T}(x)$ 는 식 (6)과 같다.

$$\bar{T}(x) = \bar{T}(0) + \sum_{n=1}^m \alpha_n \left(\frac{x}{L}\right)^n \quad (6)$$

여기서  $\bar{T}(0)$ 는  $x=0$ 인 점에서 축 방향 하중이며,  $\alpha_n$ 은 축 방향 하중 분포함수의 계수를 나타내고  $m$ 은 자연수이다.

양의 축 방향 하중과 음의 축 방향 하중은 각각 인장과 압축을 나타낸다.

가로축  $x$ 에서,  $y(x)$ ,  $\omega$ ,  $M(x)$  및  $Q(x)$ 이 각각 보의 횡 방향 변위의 크기, 고유진동수, 휨 모멘트의 크기 그리고 전단응력이라면, 미소 요소의 등가의 항목은 다음과 같다.

$$M(x) = EI \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \quad (7)$$

$$Q(x) + \frac{dM(x)}{dx} - \bar{T}(x) \frac{dy(x)}{dx} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{dQ(x)}{dx} + m\omega^2 y(x) = 0 \quad (9)$$

식 (7)를 식 (8)에 대입하고 다시 식 (9)에 대입하고 정리하면, 변하는 축 방향 하중을 받는 Euler-Bernoulli 보의 지배방정식은 식 (10)과 같다.

$$EI \frac{d^4 y(x)}{dx^4} - \frac{d\bar{T}(x)}{dx} \frac{dy(x)}{dx} - \bar{T}(x) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} - m\omega^2 y(x) = 0 \quad (10)$$

무차원 변수들  $X$ ,  $Y(X)$ , 무차원 축 방향 하중 분포,  $T(X)$ , 진동수 파라미터  $\beta$  및 무차원 변수  $\gamma_n$ 는 식 (11)과 같다.

$$X = \frac{x}{L}, \quad \beta^4 = \frac{m}{EI} \omega^2 L^4, \\ T(X) = \tau_0 + \sum_{n=1}^m \gamma_n X^n, \quad T_1(X) = \frac{dT(X)}{dX} \quad (11)$$

여기서  $\tau_0 = \frac{\bar{T}(0)L^2}{EI}$ 는  $X=0$  및  $\gamma_n = \frac{\alpha_n L^2}{EI}$ 인 일정한 축 방향 하중이다.

식 (11)을 식 (10)에 대입하면 식 (12)의 지배방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d^4 Y(X)}{dX^4} - T_1(X) \frac{dY(X)}{dX} - T(X) \frac{d^2 Y(X)}{dX^2} - \beta^4 Y(X) = 0 \quad (12)$$

식 (12)를 풀기 위하여 네 개의 경계조건이 필요하다.  $X=0(x=0)$ 인 단에서 두 개의 경계조건이 결정되고 반대편 단에서 [ $X=1(x=L)$ ] 두 개의 경계조건이 결정된다. 본 연구에서 고려된 경계조건은 다음과 같다.

고정단 (Cl):

$$Y(X) = 0 \text{ and } \frac{dY(X)}{dX} = 0 \quad (13)$$

핀단 (Pn):  
 $Y(X)=0$  and  $M(X)=0$  (14)

4. 미분변환법의 적용

위의 Table 1을 사용하여 식 (12)의 미분변환을 취하면 식 (15)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)\bar{Y}(k+4) \\
 & - \sum_{l=0}^k \bar{T}_1(l)(k-l+1)\bar{Y}(k-l+1) \\
 & - \sum_{l=0}^k \bar{T}(l)(k-l+1)(k-l+2)\bar{Y}(k-l+2) \\
 & - \beta^4 \bar{Y}(k) = 0
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

여기서  $\bar{Y}$ ,  $\bar{T}_1$  및  $\bar{T}$ 은 각각  $Y(X)$ ,  $T_1(X)$  및  $T(X)$ 의 T함수이다.

변하는 축 방향 하중을 받는 Euler-Bernoulli보를 해석할 때, 경계조건 식 (13) 및 식 (14)도 함께 미분변환되어야 한다. 각각의 끝 단에서 변환된 경계조건의 식들은 다음과 같다.

$X=0$  단  
 고정단 (CI):  
 $\bar{Y}(0)=0$  and  $\bar{Y}(1)=0$  (16)

핀단 (Pn):  
 $\bar{Y}(0)=0$  and  $\bar{Y}(2)=0$  (17)

$X=1$  단  
 고정단 (CI):  
 $\sum_{k=0}^n \bar{Y}(k)=0$  and  $\sum_{k=0}^n k\bar{Y}(k)=0$  (18)

핀단 (Pn):  
 $\sum_{k=0}^n \bar{Y}(k)=0$  and  $\sum_{k=0}^n k(k-1)\bar{Y}(k)=0$  (19)

5. 수치해석 및 분석

변하는 하중을 받는 Euler-Bernoulli보의 해석을 위해 미분변환된 지배방정식 식 (15)와 경계조건

Table 2 Comparison of the first three frequencies parameters for  $\tau_0=10.0$  and various  $\gamma_1=100$

BC		$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
CI/CI	Ref(2)	5.877	8.972	11.960
	DTM	5.877	8.972	11.960
CI/Pn	Ref(2)	5.571	8.512	11.393
	DTM	5.571	8.512	11.393
Pn/Pn	Ref(2)	5.003	7.862	10.699
	DTM	5.003	7.862	10.699

식 (16)~(19)를 연립하면 식 (20)과 같이 행렬형태의 식으로 나타낸다.

$$\begin{bmatrix}
 a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k} & a_{1,k+1} \\
 a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,k} & a_{2,k+1} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \cdots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \bar{Y}(0) \\
 \bar{Y}(1) \\
 \vdots \\
 \bar{Y}(k)
 \end{bmatrix} = 0
 \tag{20}$$

식 (20)에서 무영근을 가지지 않기 위해서 계수 행렬의 행렬 값이 0이라는 식 (21)을 만족하여야 한다.

$$\det \begin{bmatrix}
 a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k} & a_{1,k+1} \\
 a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,k} & a_{2,k+1} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \cdots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1}
 \end{bmatrix} = 0 \tag{21}$$

여기서  $a_{i,j}$ 는  $\beta$ ,  $\tau_0$  및  $\gamma_n$ 의 함수이다.

위의 식으로부터 변하는 축 방향 하중을 받는 Euler-Bernoulli보의 고유진동수 식이 얻어진다.

본 논문에서는 변하는 축 방향 하중을 받는 Euler-Bernoulli보의 수치해석이  $m=2$  일 때, 식 (13) 및 식 (14)의 조합에 의한 경계조건에 대하여 수행 되었다(  $T(X)=\tau_0+\gamma_1$  ). 고유진동수는 5개의 유효숫자의 정도로 계산되었으며, 그 결과는 참고문헌 (2)와 비교 하였다.

처음 세 진동수 파라미터( $\beta$ )로 나타나는 Table 2의 결과들은  $\tau_0=10.0$  이고  $\gamma_1=100$  일때 이다. CI 및 Pn은 각각 고정단과 핀단 경계조건을 나타낸다. 미분변환법에 의하여 얻은 결과들은 참고문헌 (2)의 결과와 잘 일치한다.

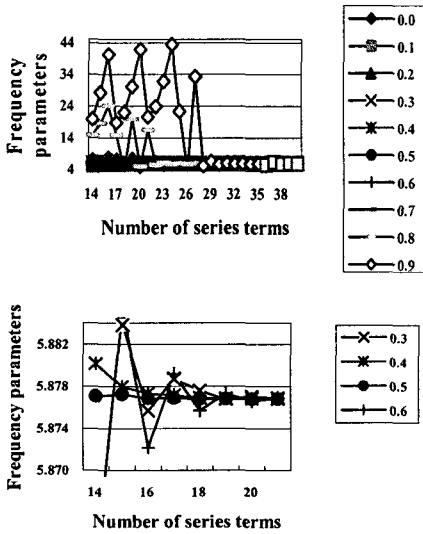


Fig. 2 Effect of center of the series on convergence of the 1st frequency parameter of the clamped-clamped boundary condition

Fig. 2는 급수의 중심( $x_0$ )이 0에서부터 1까지 변할 때, 고정단-고정단 경계조건에 대하여 첫 번째 진동수 파라미터( $\beta$ )의 수렴을 보여준다. Fig. 2에서  $k$ 는 미분변환법의 급수 항의 총 개수를 나타낸다.

Fig. 2에서, 급수의 중심이  $x_0 = 0$ 일 때 충분한 정확도로 해를 얻기 위해서 적어도 항의 개수가  $k = 32$ 이 필요한 반면에, 급수의 중심이  $x_0 = 0.5$ 일 때 진동수 파라미터를 계산하기 위해서 항의 개수가  $k = 14$ 가 필요하다는 것을 보인다. Fig. 2의 이러한 결과들은  $x_0 = 0.5$ 일 때 가장 빨리 수렴한다는 것을 알 수 있다.  $x_0 = 1$ 일 때 변하는 축 방향 하중을 받는 Euler-Bernoulli 보의 변형을 충분히 나타내기 위하여 더 많은 급수 항이 필요하다는 것을 알 수 있다. 그리고 급수의 항( $k$ )가 증가할 때 진동수 파라미터( $\beta$ )는 한 방향으로부터 접근하기보다는 정확한 해로 진동 수렴함을 알 수 있다. 급수의 중심이  $x_0 = 1$ 일 때의 진동수 파라미터는  $k = 45$ 에서 완전히 수렴한다.

Fig. 3은 급수의 중심에 대하여 고정단-고정단 경계조건일 때 두 번째 진동수 파라미터  $\beta$ 의 수렴을 나타낸다. Fig. 3은 Fig. 2와 유사하다. 그리고 급수의 중심이  $x_0 = 1$ 일 때 주파수 파라미터는

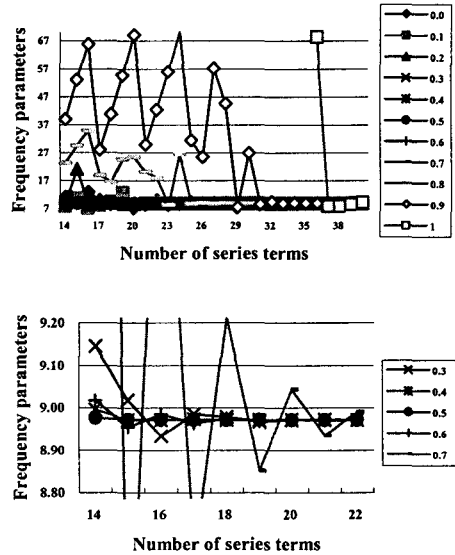


Fig. 3 Effect of center of the series on convergence of the 2nd frequency parameter of the clamped-clamped boundary condition

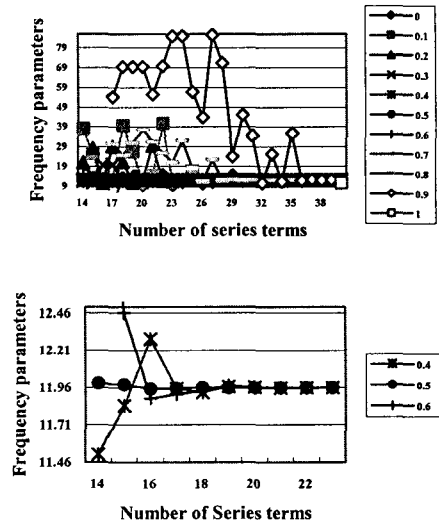


Fig. 4 Effect of center of the series on convergence of the 3rd frequency parameter of the clamped-clamped boundary condition

$k = 48$ 에서 완전히 수렴된다.

Fig. 4는 급수의 중심에 대하여 고정단-고정단 경계조건일 때 세 번째 진동수 파라미터  $\beta$ 의 수렴을 나타낸다. Fig. 4는 Fig. 2와 유사하다. 그리고 급수의 중심이  $x_0 = 0.9$  및  $x_0 = 1$ 일 때의 주파수 파라미터는 각각  $k = 41$  및  $k = 49$ 에서 완전히 수렴된다.

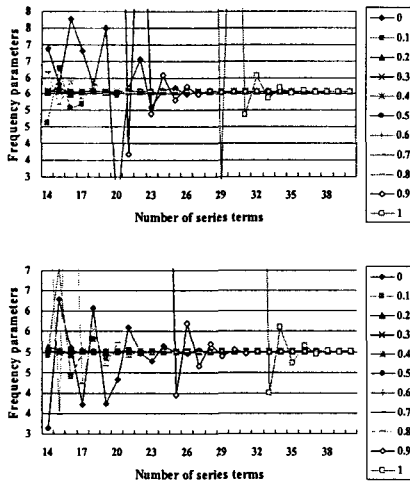


Fig. 5 Effect of center of the series on convergence of the 1st frequency parameter, clamped-pinned and pinned-pinned boundary conditions

Fig. 5는 고정단-핀단 및 핀단-핀단에 대한 결과이며, 그 결과는 유사한 경향을 나타낸다.

## 6. 결론

본 논문은 가변적인 하중을 받고 있는 Euler-Bernoulli보의 횡방향 진동에 대하여 미분변환법을 사용하여 진동해석 할 때, 급수의 중심이 해의 수렴에 대한 영향을 연구하였다. 수치적 계산에 의해 얻은 결과들은 미분변환법의 정확성과 효율성을 증명하기 위하여 이미 연구된 결과들과 비교하였으며, 그 결과들은 다음과 같다.

- (1) 미분변환법에 의해 얻은 결과와 참고문헌(2)의 결과는 잘 일치한다.
- (2) 급수의 중심이  $x_0 = 0.5$ 에서 수치 결과들은 가장 잘 수렴함을 알 수 있다.
- (3) 급수의 중심이  $x_0 = 1$ 일 때 변하는 하중을 받는 Euler-Bernoulli보의 변형을 충분히 나타내기 위하여 더 많은 항( $k$ )이 필요하다.
- (4) 급수의 항의 개수( $k$ )가 증가할 때, 진동수 파라미터( $\beta$ )는 한 방향으로 접근하기 보다는 진동 수렴한다.
- (5) 급수의 중심( $x_0$ )이 0에서부터 1까지 변할

때, 진동수 파라미터의 수렴을 도식화하였다.

## 감사의 글

이 논문은 2006년도 안동대학교 학술연구 조성비에 의하여 연구되었음.

## 참고문헌

- (1) Naguleswaran, S., 1991, "Vibration of a Vertical Cantilever with and Without Axial Freedom at Clamped End," *Journal of Sound and Vibration*, 146 (2), pp. 191~198.
- (2) Naguleswaran, S., 2004, "Transverse Vibration of a uniform Euler-Bernoulli Beam Under Linearly Varying Axial Force," *Journal of Sound and Vibration*, 275, pp. 47~57.
- (3) Zhou, J. K., 1986, *Differential Transformation and its Application for Electrical Circuits*, Huazhong University Press, Wuhan China(in Chinese).
- (4) Chen, C. K. and Ho, S. H., 1996, "Application of Differential Transformation to Eigenvalue Problems," *Applied Mathematics and Computation*, 79, pp. 173~188.
- (5) Shin, Y. J. and Yun, J. H., 2006, "Transverse Vibration of a Uniform Euler-Bernoulli Beam Under Varying Axial Force Using Differential Transformation Method," *Journal of Mechanical Science and Technology (KSME Int. J.)*, Vol. 20, No. 2, pp. 191~196.
- (6) Shin, Y. J., Jaun, S. J., Yun, J. H., Dioryan, N. M., Hwang, K. S. and Jy, Y. C., 2004, "Vibration Analysis for the Circular Plates by Using the Differential Transformation Method," *Eleventh International Congress on Sound and Vibration*, pp. 3723~3732.
- (7) Han, J. B. and Liew, K. M., 1999, "Axisymmetric Free Vibration of Thick Annular Plates," *International Journal of Mechanical Sciences*, 41, pp. 1089~1109.
- (8) Leissa, W. and Kang, J. H., 2002, "Exact Solutions for Vibration and Buckling of an SS-C-SS-C Rectangular Plate Loaded by Linearly Varying In-Plane Stresses," *International Journal of Mechanical Sciences*, 44, pp. 1923~1945.