

< 논문 >

NURBS 곡면기반의 기하학적 모델링과 셸 유한요소해석의 연동

최진복[†] · 노희열* · 조맹효**

(2006년 8월 25일 접수, 2006년 11월 17일 심사완료)

Integration of Shell FEA with Geometric Modeling Based on NURBS Surface Representaion

Jinbok Choi, Hee-Yuel Roh and Maenghyo Cho

Key Words : Shell Finite Element Analysis(셸 유한요소 해석), NURBS Surface(NURBS 곡면), Integrated Design(통합 설계), Trimmed Surface(트림곡면)

Abstract

The linkage framework of geometric modeling based on NURBS(Non-Uniform Rational B-Spline) surface and shell finite analysis is developed in the present study. For this purpose, geometrically exact shell finite element is implemented. NURBS technology is employed to obtain the exact geometric quantities for the analysis. Especially, because NURBS is the most powerful and wide-spread method to represent general surfaces in the field of computer graphics and CAD(Computer Aided Design)industry, the direct computation of surface geometric quantities from the NURBS surface equation without approximation shows great potential for the integration between geometrically exact shell finite element and geometric modeling in the CAD systems. Some numerical examples are given to verify the performance and accuracy of the developed linkage framework. In additions, trimmed surfaces with some cutouts are considered for more practical applications.

1. 서론

일반적으로 셸 구조물은 곡률을 가지는 두께가 얇은 3차원 구조물로 정의되며, 외부하중을 막작용과 굽힘작용의 동시 변형을 통해 효과적으로 지지하여 공간을 효율적으로 활용하고 구조물의 중량을 줄일 수 있도록 해준다. 이러한 구조물 자체의 효율성과 미학적 특성으로 자동차, 항공기, 선박분야는 물론 건축분야에 이르기까지 널리 사용되어 왔으며, 따라서 이러한 셸 구조물의 거동을 보다 효율적으로 해석하고, 설계에 적용할 수 있

도록 다양한 셸 유한요소개발에 대한 연구가 진행되어 왔다. 1927년 Love⁽¹⁾가 처음으로 일반화된 얇은 셸 이론을 정립한 이후에 이를 개선하고 보완하는 많은 연구들이 수행되었다. 그러나 컴퓨터를 이용한 수치해석이 보편화 되기 전에는 풀 수 있는 문제들이 극히 제한적이었다. 컴퓨터의 사용과 유한요소해석법의 적용으로 비로소 일반적인 셸 구조물에 대한 해석이 활발히 이루어 졌다.

특히 1970년 Ahmad⁽²⁾가 감절점 셸 요소를 제안함으로써 용이하게 셸 구조물을 해석할 수 있게 되었다. 감절점 셸 요소는 고전적인 셸 이론에 근거한 요소보다 정식화가 간단하며, 연속체역학의 기반으로부터 직접 유도되기 때문에 유한요소 구현이 직접적이다. 이러한 장점들로 인해, 지난 20여 년간 감절점 요소에 대한 연구가 활발히 진행되었고, 가장 널리 쓰이게 되었다. 그러나 일반곡선좌표계를 사용하지 않고 직교좌표계를 사용하는

[†] 책임저자, 회원, 서울대학교 기계항공공학부

E-mail : jbchoi95@snu.ac.kr

TEL : (02)877-1645 FAX : (02)886-1693

* 삼성전자 주식회사

** 회원, 서울대학교 기계항공공학부

감절점 요소는 셸 구조물의 기하학적인 형상을 근사를 통해 보간 하므로 복잡한 형상에 대한 해석 오차를 줄이기 위해서는 많은 수의 요소를 사용해야 한다는 단점이 있다. 그러므로 셸 구조물의 정확한 기하학적 형상을 고려한 셸 이론에 근거한 유한요소의 개발이 Simo 등^(3,4)에 의해 수행되었다.

일반 곡선 좌표계에 기초한 1차 전단 변형 셸 이론을 바탕으로 Cho와 Roh는 이미 곡면의 기하학적 형상을 정확히 나타낼 수 있는 셸 유한요소⁽⁵⁾를 개발하였으며, 이를 일반적인 곡면에 적용하기 위하여 B-spline 곡면 식을 사용하여 곡면을 표현하고, 이 곡면 식으로부터 곡면 계량(metric) 텐서($\alpha_{\alpha\beta}$), 곡률 텐서($b_{\alpha\beta}$), 2중 Christoffel 기호등 중요한 기하량을 계산함으로써 기하학적 오차를 줄이고자 하였다.^(6,7)

그러나 현재 컴퓨터 그래픽스 또는 CAD (Computer Aided Design)분야에서 가장 널리 사용되고 있는 곡면의 표현방식은 NURBS(Non-Uniform Rational B-Spline)이다. 즉, 대부분의 CAD 시스템들이 일반곡면을 표현하는데 NURBS 곡면식을 지원하기 때문에, CAD에서의 생성된 곡면 모델로부터 셸 유한요소해석을 위해 정확한 기하학적 정보를 추출해 내기 위해서는 NURBS곡면식으로 셸 곡면을 표현하는 것이 보다 일반적이고 유용하다. 따라서 본 연구에서는 CAD시스템에서 NURBS기반으로 생성된 곡면 데이터를 개발된 곡면 설계 해석 통합 패키지에 전송하고 이 곡면정보를 바탕으로 CAD시스템에서 모델링된 곡면과 완벽히 일치하는 NURBS곡면을 재 생성하여 기하학적으로 정확한 셸 유한요소해석 루틴과 연동할 수 있도록 하였다. 이러한 작업은 해석과정의 초기단계에 한 번만 이루어지며, 그 이후의 단계에서 반복적으로 CAD시스템과 정보를 교환할 필요가 없기 때문에 효율적이다. 본 연구에서는 개발된 통합패키지를 통해 몇 가지 잘 알려진 셸 곡면을 NURBS곡면식을 이용하여 생성하고 해석을 수행함으로써 그 성능 및 정확성을 검증하고자 하였고 단순한 곡면 뿐 아니라 트림(trim)곡면을 해석함으로써 개발한 기하학적으로 정확한 셸 유한요소를 보다 일반적인 곡면의 해석에 적용하고자 하였다. 본 연구에서 제시하는 방법은 곡면의 기하량을 계산하기 위해 요소 절점에서 주어진 값들을 보간하지 않고 NURBS곡면식으로부터 필요한 기하량을 직접 계산하여 얻게 됨으로써, 기하학적 오차를 크게 줄일 수 있고 따라서 적은 수의 요소를 사용하여 해석을 수행하더라도 높은 신뢰도를 가지는 결과를 얻을 수 있다.

2. Naghdi 셸이론과 유한요소 정식화

2.1 Naghdi 셸 이론

일반 곡선좌표계에서 셸 중립면의 임의의 점에 대한 위치벡터는 다음과 같고,

$$\bar{R} = \bar{r} + \theta^3 \bar{a}_3 \tag{1}$$

공변기저벡터는 아래와 같다.

$$\bar{g}_\alpha = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \theta^\alpha} = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} (\bar{r} + \theta^3 \bar{a}_3) = \bar{a}_\alpha - b'_\alpha \bar{a}_3, \theta^3 \tag{2}$$

곡면 계량 텐서의 공변 성분들은 다음과 같다.

$$g_{\alpha\beta} = \bar{g}_\alpha \cdot \bar{g}_\beta, \quad a_{\alpha\beta} = \bar{a}_\alpha \cdot \bar{a}_\beta \tag{3}$$

$$b_{\alpha\beta} = -\bar{a}_\alpha \cdot \bar{a}_{3,\beta}$$

일반 텐서에 기초한 셸 이론에서는 일반적으로 변형률 텐서를 다음과 같이 정의한다.

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (g'_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta})$$

$$\gamma_\alpha = 2E_{\alpha 3} = (g'_{\alpha 3} - g_{\alpha 3}) \tag{4}$$

Naghdi 셸 이론⁽⁸⁾에서, 변위 벡터는 다음과 같이 가정된다.

$$\bar{V} = (u_\alpha + \theta^3 \psi_\alpha) \bar{a}^\alpha + w \bar{a}_3 \tag{5}$$

여기서 u_α, ψ_α, w 는 각각 면내 변위, 회전각, 수직 방향 변위를 나타내며, \bar{a}^α 는 셸 중앙면에서 곡면을 따라가는 일반좌표계의 기저벡터이고, \bar{a}_3 는 곡면의 접평면에 수직인 기저벡터이다. 아울러 전단 변형률 γ_α 는 두께방향으로 일정하다고 가정한다. 주어진 변형장으로부터 인장, 굽힘, 전단 변형률은 셸 중앙면에서의 변위와 곡률로 나타낼 수 있다.

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_\alpha \parallel_\beta + u_\beta \parallel_\alpha - 2b_{\alpha\beta} w)$$

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [\psi_\alpha \parallel_\beta + \psi_\beta \parallel_\alpha - b^{\lambda\alpha} (u_\lambda \parallel_\beta - b_{\lambda\beta} w) - b^{\lambda\beta} (u_\lambda \parallel_\alpha - b_{\lambda\alpha} w)]$$

$$\gamma_\alpha = (w_{,\alpha} + \psi_\alpha + b^{\lambda\alpha} u_\lambda) \tag{6}$$

여기에서 \parallel 는 셸의 중앙면에서 정의되는 2차원 공변 미분(covariant differentiation)을 의미한다.

2.2 유한요소 정식화

본 연구에서는 Naghdi 셸에 기초한 유한요소해석에서 셸의 두께가 얇아짐에 따라 발생하는 잠금 현상을 완화하기 위하여 가정된 변형률장을 사용

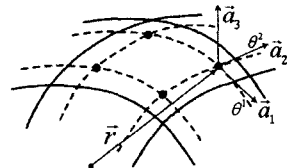


Fig. 1 Basis vector of shell surface

하는 부분 혼합 변분 범함수를 도입하였으며, 아울러 잠김현상을 완화 시키면서 격자 뒤틀림에 민감하지 않고 요소의 성능을 향상시키도록 거품함수를 사용하였다.

유한요소 정식화를 위하여 9절점 사각형 셀 요소에 대한 변위와 변형률 가정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (u_\alpha, w, \psi_\alpha) &= \sum (u_{\alpha i}, w, \psi_{\alpha i}) N_i + (u_\alpha, w, \psi_\alpha)_b N_b \\ (\varepsilon_\alpha, \gamma_\alpha) &= (P_1 \bar{\alpha}, P_2 \bar{\beta}) \end{aligned} \quad (7)$$

P_1, P_2, α, β 는 가정된 변형률장과 그 매개변수를 나타내며 가정된 변형률장은 아래와 같다.⁽⁹⁾

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\eta^2 & 0 & \xi^2\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi^2\eta & 0 & \xi\eta^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

16 parameters for membrane part $\{\alpha\}^T = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{16}]$

$$[P_2] = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\eta^2 & \xi^2\eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta & \xi^2\eta & \xi\eta^2 \end{bmatrix}$$

10 parameters for shear part $\{\beta\}^T = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{10}]$

(8)

9절점 요소에 대하여 사용된 거품함수는 다음과 같다.

$$N_b = \xi\eta(1-\xi^2)(1-\eta^2) \quad (9)$$

이를 이용하여 유한요소 이산화할 수 수행하면 이산화된 범함수는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Pi(\bar{d}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) &= \frac{1}{2} \bar{d}^T K_b \bar{d} - \frac{1}{2} \bar{\alpha}^T H_m \bar{\alpha} + \bar{\alpha}^T G_m \bar{d} - \frac{1}{2} \bar{\beta}^T H_\gamma \bar{\beta} \\ &\quad + \bar{\beta}^T G_\gamma \bar{d} - \bar{d}^T \cdot f \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} K_b &= \int_{\Omega} B_b^T D_b B_b \sqrt{ad} \theta^1 d\theta^2 \\ H_m &= \int_{\Omega} P_1^T D_m P_1 \sqrt{ad} \theta^1 d\theta^2 \\ G_m &= \int_{\Omega} P_1^T D_m B_m \sqrt{ad} \theta^1 d\theta^2 \\ H_\gamma &= \int_{\Omega} P_2^T D_\gamma P_2 \sqrt{ad} \theta^1 d\theta^2 \\ G_\gamma &= \int_{\Omega} P_2^T D_\gamma B_\gamma \sqrt{ad} \theta^1 d\theta^2 \end{aligned}$$

이고 \bar{f} 는 외력에 의해 요소에 가해지는 하중벡터, \bar{d} 는 요소절점변위벡터, $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ 는 미지의 변형률 벡터이다. 문자에 사용한 하첨자 m, b, γ 는 각각 멤브레인, 굽힘, 전단변형을 나타낸다. a 는 $\det(a_{\alpha\beta})$ 를 의미한다.

요소의 자유도 벡터는 절점의 자유도와 일반적인 곡면의 접평면에서 2개의 곡면의 접선방향 변위 (u_α)와 접평면에 수직변위 (w), 2개의 회전각변위 (ψ_α)로 표시된다.

$$\bar{d} = [(u_1, u_2, w, \psi_1, \psi_2)_1, \dots, (u_1, u_2, w, \psi_1, \psi_2)_n, (u_b, u_b, w_b, \psi_b, \psi_b)]^T \quad (11)$$

$\bar{d}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}$ 에 대하여 변분을 취함으로써 다음과 같은 요소평형 방정식을 얻는다.

$$K^e \bar{d} \doteq \bar{f} \quad (12)$$

여기서 요소강성행렬 K^e 는 다음과 같이 표현된다.

$$K^e = K_b + G_m^T H_m^{-1} G_m + G_\gamma^T H_\gamma^{-1} G_\gamma \quad (13)$$

3. NURBS 곡면생성 및 기하량의 계산

개발된 셀 유한요소와 CAD에서의 기하학적 곡면 모델링의 연동을 위해서는 NURBS곡면을 구성해야 한다. 본 절에서는 그 방법에 대하여 간략히 설명한다. 자세한 내용은 참고문헌⁽¹⁰⁾에서 찾을 수 있다.

3.1 NURBS 곡면의 표현

곡면의 u, v 각 방향으로 각각 p, q 의 차수를 가지는 NURBS 곡면은 다음과 같이 정의된다. 여기서 일반곡선좌표계에서 정의된 매개변수 (θ^1, θ^2)는 NURBS 곡면식의 매개변수로 표현하기 위하여 (u, v)로 대체한다.

$$\bar{S}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j}} \quad 0 \leq u, v \leq 1 \quad (14)$$

여기서 $P_{i,j}$ 는 u, v 방향으로의 조정점 망을 나타내며 $w_{i,j}$ 는 가중치 그리고 $N_{i,p}(u), N_{j,q}(v)$ 는 각각 B-스플라인의 기저 함수를 나타낸다. 그리고 각 방향으로의 조정점 벡터는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} U &= \{0, \dots, 0, u_{p+1}, \dots, u_{r-p-1}, 1, \dots, 1\} \\ V &= \{0, \dots, 0, v_{q+1}, \dots, v_{r-q-1}, 1, \dots, 1\} \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 $r = n + p + 1, s = m + q + 1$ 인 관계를 만족한다. 그리고 u 방향으로의 기저함수는 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} N_{i,0}(u) &= \begin{cases} 1 & \text{if } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{if otherwise} \end{cases} \\ N_{i,p}(u) &= \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \end{aligned} \quad (16)$$

v 방향으로도 마찬가지로 형태의 기저함수를 생각할

수 있다.

식 (14)로 표현되는 곡면은 모든 가중치 값들이 같게 될 때 B-spline 곡면이 되며, 가중치 값들이 같지 않고 내부 매듭(interior knot)들이 존재하지 않을 때 Bezier 곡면이 된다. 따라서 B-spline곡면과 Bezier 곡면은 NURBS곡면의 특수한 형태이며 NURBS곡면이 이들을 포함하는 일반적인 곡면식이다. 아울러 NURBS 곡면은 2차 곡면을 수학적으로 정확하게 표현 할 수 있는 장점을 가진다. 이 밖에 몇 가지 중요한 특성을 살펴보면 다음과 같다.

(1) NURBS 곡면은 구석의 네 조정점을 지나게 된다.

$$S(0,0)=P_{0,0}, \quad S(1,0)=P_{n,0}, \quad S(0,1)=P_{0,m}, \quad S(1,1)=P_{n,m}$$

(2) NURBS 곡면은 affine invariance 특성을 갖는다.

(3) 곡면의 특정 조정점 또는 가중치가 변경되었을 경우 곡면상의 $[u_i, u_{i+p+1}) \times [v_j, v_{j+q+1})$ 영역만 국부적으로 변경이 되므로 곡면을 세밀하게 조정할 수 있다.

(4) 식 (12)에 주어진 NURBS 곡면 식은 u, v 각 방향으로 $(p-k)$ 또는 $(q-k)$ 번 미분가능하며, 이러한 특성은 곡면의 정확한 기하량을 계산시 사용된다.

3.2 NURBS 곡면식으로부터 기하량 계산

기하학적으로 정확한 쉘 유한요소의 구현을 위해서는 곡면의 기저벡터(\bar{a}_α), 수직벡터(\bar{a}_3), 계량(metric)텐서($a_{\alpha\beta}$), 곡률텐서($b_{\alpha\beta}$), 2중 Christoffel 기호($\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$) 등의 기하량을 정확히 계산하여야 한다.

식 (2), (3)에서 보이는 바와 같이 곡면의 정확한 위치벡터[$\bar{r}(\theta^1, \theta^2)$]가 주어진다면 이러한 기하량들을 정확하게 계산 할 수 있다. 그러나 실린더 또는 반구 와 같이 몇 가지 수학적으로 표현 가능한 곡면들을 제외하면 일반적인 곡면에 대한 정확한 위치벡터를 구하는 것은 거의 불가능하다. 따라서 이러한 제약 조건 때문에 기하학적으로 정확한 쉘 유한요소를 일반곡면 해석에 적용하는데 한계가 있었다. 이와 같은 문제를 해결하기 위해 해석대상 쉘 곡면을 NURBS곡면 식을 이용하여 생성하고 이 NURBS 곡면 식으로부터 곡면상의 원하는 위치에서의 기하량을 유한요소 격자 절점에서의 값들을 보간하여 구하는 대신 실제 곡면을 정확히 표현하는 NURBS곡면 식으로부터 계산하여 기하학적 오차를 획기적으로 줄임으로써 해석 결과의 수렴성을 높일 수 있고, 아울러 NURBS곡

면 식으로 표현 가능한 일반적인 곡면해석도 가능하게 된다.

Fig. 1의 곡면의 기저벡터와 수직벡터는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\bar{a}_\alpha = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta^\alpha}, \quad \bar{a}_3 = \frac{\bar{a}_1 \times \bar{a}_2}{|\bar{a}_1 \times \bar{a}_2|} \quad (17)$$

여타의 기하량들은 계산된 기저벡터 또는 기저벡터의 일차 미분값으로 부터 계산 되어진다. 곡면이 NURB 로 표현되면 진술한 바와 같이 곡면상의 임의의 점에서 u, v 각 방향으로의 NURBS 곡면 식을 미분함으로써 곡면의 접선벡터 및 수직 벡터를 구할 수 있다.⁽¹¹⁾

식 (14)와 같은 NURBS 곡면식 $\bar{S}(u, v)$ 에서 (u, v) 값이 정해지면 다음 식과 같이 미분 가능하다.

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial u^k \partial v^l} \bar{S}(u, v) \quad 0 \leq k+l \leq d \quad (18)$$

여기서 k 와 l 은 곡면 $\bar{S}(u, v)$ 를 u, v 각 방향으로 k, l 번 미분하는 미분 차수를 나타낸다.

u, v 방향에 대한 NURBS 곡면 식 $\bar{S}(u, v)$ 의 u, v 각 방향에 대하여 미분을 취하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{S}(u, v)}{\partial u} &= \frac{\left(\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q \frac{\partial N_{i,p}(u)}{\partial u} N_{j,q}(v) w_{i,j} P_{i,j} \right) \left(\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} \right)}{\left(\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} \right)^2} \\ &\quad - \frac{\left(\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} P_{i,j} \right) \left(\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q \frac{\partial N_{j,q}(v)}{\partial u} N_{i,p}(u) w_{i,j} \right)}{\left(\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} \right)^2} \\ \frac{\partial \bar{S}(u, v)}{\partial v} &= \frac{\left(\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q N_{i,p}(u) \frac{\partial N_{j,q}(v)}{\partial v} w_{i,j} P_{i,j} \right) \left(\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} \right)}{\left(\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} \right)^2} \\ &\quad - \frac{\left(\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} P_{i,j} \right) \left(\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q N_{i,p}(u) \frac{\partial N_{j,q}(v)}{\partial v} w_{i,j} \right)}{\left(\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} \right)^2} \end{aligned} \quad (19)$$

여기서 B-spline 기저함수의 미분은 다음과 같이 주어진다.

$$N_{i,p}^{(k)}(u) = p \left(\frac{N_{i,p-1}^{(k-1)}}{u_{i+p} - u_i} - \frac{N_{i+1,p-1}^{(k-1)}}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \right) \quad (20)$$

여기서 $N_{i,p}^{(k)}(u)$ 는 B-spline 기저함수의 $N_{i,p}(u)$ 의 k 차

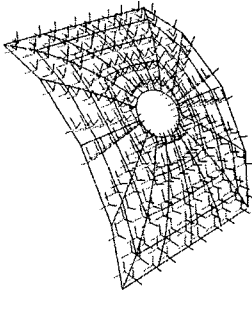


Fig. 2 The computed basis vectors at gauss points

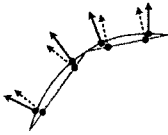


Fig. 3 The difference of normal vector of actual surface and interpolated normal vector

미분을 나타낸다. $N_{j,q}^{(i)}$ 또한 같은 형태로 표현된다. 따라서 (u, v) 파라미터 값이 주어지면 곡면상의 특정위치에서 곡면의 u, v 각 방향으로의 미분값들을 계산할 수 있고 접평면상에서 접선벡터(\vec{a}_α)와 수직벡터(\vec{a}_3)를 구할 수 있다. Fig. 2는 요소의 가우스 적분 점에서 NURBS곡면 식으로부터 계산된 곡면의 기저 벡터를 도시하고 있다.

일반적으로 평면 셀 요소를 사용하여 곡면을 근사할 경우 유한요소해석을 위하여 필요한 가우스 적분 점에서의 기하량은 요소의 절점에서의 값들을 보간하여 구하게 되는데, 이러한 과정에서 Fig. 3에서 보는 바와 같이 기하학적 오차를 피할 수 없게 되며 해의 정확성을 위해 많은 수의 요소를 사용할 수 밖에 없다. 그러나 본 연구에서 제시한 방법은 곡면을 정확히 표현하는 NURBS곡면 식으로부터 기하량을 계산하기 때문에 기하학적 오차를 크게 줄일 수 있다. 따라서, 적은 수의 요소를 사용하여 해석을 수행하더라도 빠른 수렴성을 보이게 된다.

4. 곡면 모델링과 해석의 통합

전술한 바와 같이 본 연구의 목적은 CAD 시스템에서의 곡면 모델링과 셀 유한요소해석의 유기적인 통합 체계를 개발하려는 것이다. 이를 위해 먼저 개발된 프로그램은 CAD 시스템으로부터 생성되어 저장된 곡면 모델링 파일을 불러들이게 된

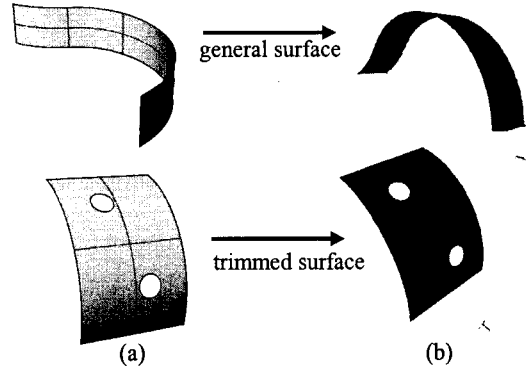


Fig. 4 (a) Modeling in the CAD system (b) Visualization of imported surface data(data transformation between two of them in IGES format file)

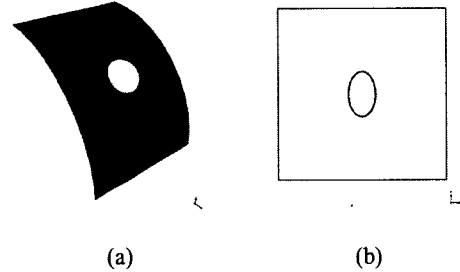


Fig. 5 A trimmed surface: (a)3-D model space (b)2-D (u, v) parametric space

다. 불러들인 곡면 모델 파일로부터 NURBS 곡면 생성을 위해 필요한 정보들을 추출해 내고 이를 바탕으로 셀 곡면해석을 위한 NURBS 곡면을 생성한다. Fig. 4(a)는 CAD 시스템에서 모델링된 일반적인 곡면과 절단(trim)곡면을 나타내고 Fig. 4(b)는 개발된 프로그램에서 불러들인 모델파일로부터 NURBS 곡면생성에 필요한 정보를 추출하여 해석을 위한 NURBS 곡면을 도시하고 있다. 대부분의 CAD 시스템에서 곡면 설계 시 NURBS 기반으로 모델링이 되기 때문에 일반적인 곡면뿐 아니라 곡면에 절단 부위가 있는 트림(trim)곡면들로부터 필요한 정보를 용이하게 추출 가능하다.

NURBS곡면을 생성한 후에는 유한요소해석을 위한 격자생성 과정이 필요하다. 본 연구에서는 사각형 셀 요소를 사용하므로 사각형 격자 생성이 필요하며 곡면에 절단부위가 없는 일반적인 곡면인 경우에는 곡면의 외부 경계정보를 추출하여 매개변수 영역에 사상하고 외부 경계정보를 바탕으로 격자생성을 수행한다. 그러나 Fig. 5와 같이 절단 부위가 있는 곡면인 경우에는 곡면의 외부 경계정보 뿐만 아니라 내부 절단부의 경계정보 또한 필요하다.

곡면의 외부 경계와 절단 부위의 내부경계 정보를 추출하여[Fig. 6(a)] 사각격자생성을 위해 영역을 분할 하고[Fig. 6(b)] (u, v) 매개변수 영역상에서 격자생성을 수행하며 더 세밀한 격자생성 역시 매개변수 영역에서 수행되게 된다.

(u, v) 매개변수 영역과 3차원 좌표공간상의 곡면상에는 일대일 대응관계가 성립하므로 매개변수 영역에서 생성된 격자의 (u, v) 좌표정보를 식 (14)의 NURBS곡면식 $\vec{S}(u, v)$ 에 대입하면 3차원 곡면상의 (x, y, z) 좌표값을 얻을 수 있게 된다. 이러한 사상관계를 도시하면 Fig. 7과 같다.

유한요소해석을 위해 사각형 요소의 가우스 적분점에 해당하는 (u, v) 값을 매개변수영역에서 계산하고 이를 역시 3차원 공간상에 사상할 수 있다. 이 요소상의 (u, v) 가우스 적분점 값들이 NURBS 곡면식으로부터 기하량을 계산하기 위한 입력값들이 된다.

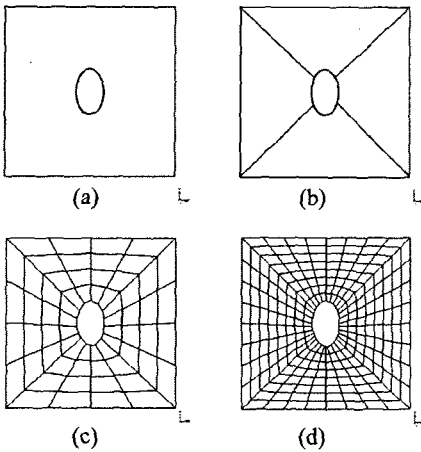


Fig. 6 Structural quadrilateral mesh generation

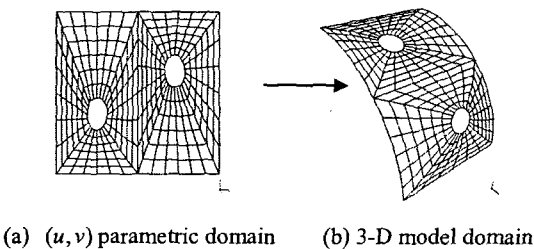


Fig. 7 The mapping relationship between parametric domain and model domain

5. 수치 예제

5.1 집중하중이 가해지는 원통형 셀

양단에 막(diaphragm)경계조건이 주어진 그림과 같은 원통형 셀에 대하여 해석을 수행하였다. Fig. 8(a)와 같은 조건에서 해석하였으며 곡면은 NURBS기반하에서 생성되었고 9절점 사각형 셀 요소가 사용되었다. 아울러 같은 형상과 물성치를 갖는 표면에 구멍이 뚫린 문제에 대한 해석을 수행하였다[Fig. 8(b)]. Flugge에 의한 본 실린더 예제의 해석 해(analytical solution)는 1.8248×10^{-5} 이다. 그러나Flugge에 의해 사용된 셀 이론은 전단변형을 포함하지 않기 때문에 본 논문에서는 NASTRAN QUAD8 요소를 사용하여 해석한 결과인 1.8541×10^{-5} 을 참조해(reference value)로 사용하였다. 해석 결과 Fig. 9에서 보는 바와 같이 적은 수의 요소를 사용하더라도 통상적인 등대개변수 유한요소와 비교하여 빠른 수렴성을 보임을 확인할 수 있다. 이는 유한요소해석에 필요한 기하량을 NURBS곡면식으로부터 직접 계산하게 됨으로써 보간에 의한 기하학적인 오차를 줄일 수 있기 때문이다.

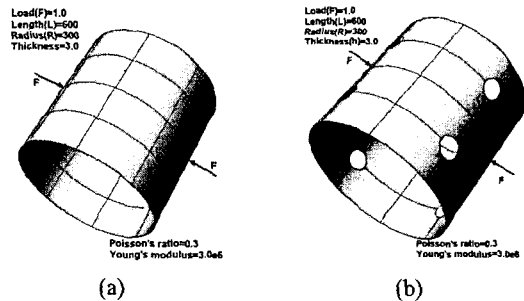


Fig. 8 NURBS cylindrical surface: (a) general surface (b) trimmed surface

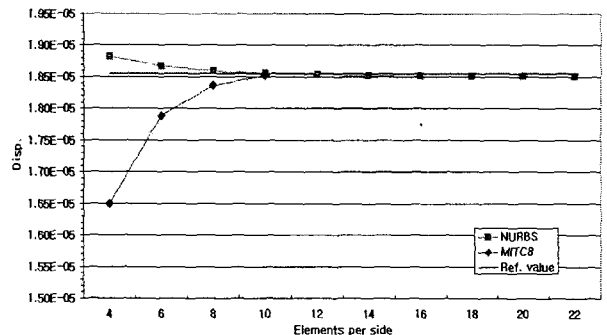


Fig. 9 Comparison of convergence rate (w direction displacement)

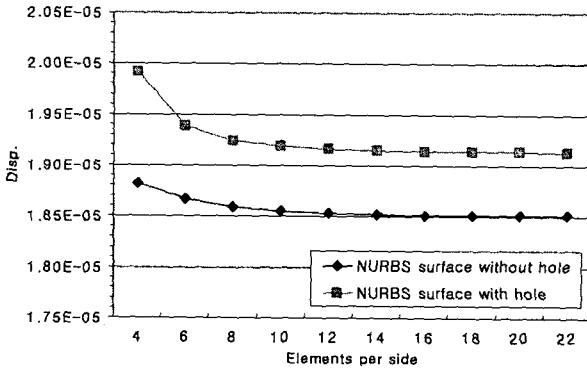


Fig. 10 Convergence of trimmed surface

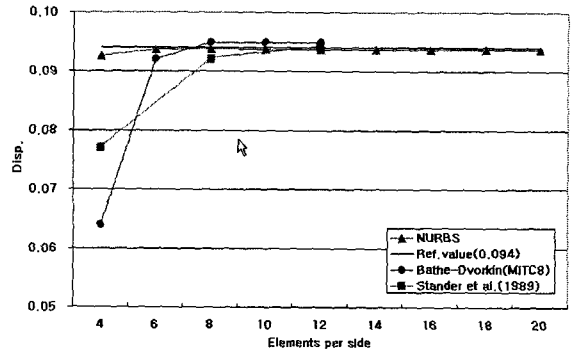


Fig. 12 Comparison of convergence rate (w direction displacement)

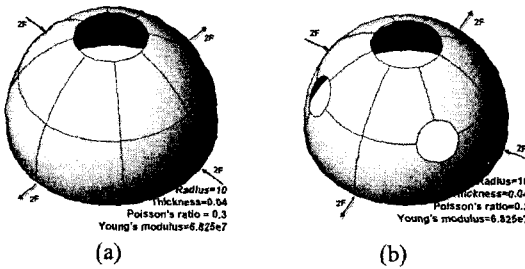


Fig. 11 NURBS hemispherical surface: (a) general surface (b) trimmed surface

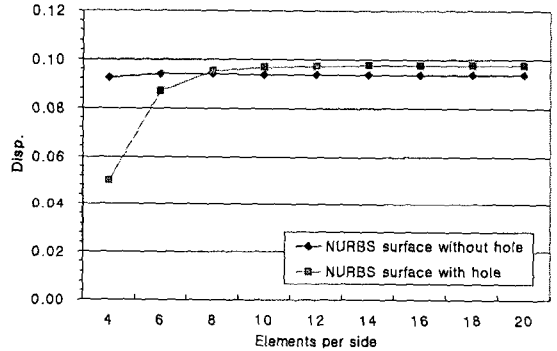


Fig. 13 Convergence of trimmed surface

그리고 Fig. 10에서 보는 바와 같이 트림곡면에 대한 해석 결과 역시 적은 수의 요소를 사용하여도 좋은 수렴성을 보임을 알 수 있고 또한 개발된 셀 곡면 설계와 해석의 통합체계가 단순한 곡면뿐 아니라 트림곡면과 같은 일반적인 곡면 해석에도 유용하게 적용될 수 있음을 확인 할 수 있다.

5.2 집중하중이 가해지는 구형 셀

해석을 위한 형상은 Fig. 11에 주어져 있다. 상단에 18°의 구멍이 뚫린 반구 예체에 대하여 해석을 수행하였다. 하단은 변위에 대한 경계조건이 없는 자유로운 상태이다. 해석을 수행한 결과 Fig. 12에서 보는 바와 같이 Stander 등의 S08 shell element,⁽¹²⁾ Bathe, Dvorkin의 MITC8 element⁽¹³⁾들과 비교하여 비교적 적은 요소를 사용하여도 빠른 수렴성을 보여준다.

마찬가지로 조건에서 해석한 트림곡면[Fig. 11(b)]의 해석결과 역시 Fig. 13의 결과 그래프에서 보는 바와 같이 적은 요소를 사용함에도 좋은 수렴성을 보여줌을 확인 할 수 있다.

6. 결론

본 연구에서는 일반 곡선 좌표계에 기초한 기하학적으로 정확한 셀 유한요소와 NURBS 곡면을 이용한 기하 모델링의 연동을 가능하게 하는 프레임워크를 구현하였다. 임의의 형상의 곡면에 대한 효과적인 해석을 위하여 기하학적으로 정확한 셀 요소를 적용하였고 잠김 현상을 해결하기 위하여 가정된 변형을 방법과, 격자 뒤틀림에 민감하지 않도록 거품함수를 도입하였다. 매개화된 셀 곡면의 일반적인 형태를 생성하기 위해서 NURBS 곡면식을 기반으로 셀 곡면을 생성하였고, 현재의 일반 좌표계에 기초한 텐서기반 셀 요소가 임의의 자유 곡면을 다룰 수 있도록 하였다. 매개변수 영역에서 구성된 기하학적으로 정확한 셀 요소는 컴퓨터 이용 곡면 모델링(CAGD modeling)과 셀 유한요소(Shell FE) 해석의 연동 체계를 가능케 한다. 잘 알려진 벤치마크(benchmark) 셀 구조에 대한 해석을 통하여 본 연구를 통해 구현된 프레임워크의 성능을 검증하였으며, 이로써 기존의 감절점

셸 요소의 한계를 극복하고 일반적인 CAD 시스템과 유기적으로 연동할 수 있는 통합설계에 대한 가능성을 확인 하였으며 곡면상에 절단부위를 포함하는 트림곡면의 해석을 가능하도록 함으로써 적용범위를 확장 시켰다.

후 기

이 논문은 2006 년도 산업자원부에 의해 지원되었음.

참고문헌

- (1) Love A. E., 1927, A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 4th Ed. Dover, New York,
- (2) Ahmad, S., Irons B.M. and Zienkiewicz O.C., 1970, "Analysis of Thick and Shell Structures by Curved Finite Element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 2, pp. 419~459.
- (3) Simo, J. C. and Fox, D. D., 1989, "On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part I: Formulation and Optimal Parameterization," *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 72, pp. 267~304.
- (4) Simo, J. C., Fox, D. D. and Rifai, S., 1989 "On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part II: The Linear Theory; Computational Aspects," *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 73, pp. 53-92.
- (5) Cho, Manenghyo and Roh, Hee Yuel, 2003, "Development of Geometrically Exact New Shell Elements Based on General Curvilinear Coordinates," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 56, No. 1, pp. 81~115.
- (6) Roh, H. Y. and Cho, M., 2004, "The Application of Geometrically Exact Shell Elements to B-Spline Surfaces," *Computer Meth. Applied Mech and Engrg.* 193, pp. 2261~2299.
- (7) Roh, Hee Yuel and Cho, Maenghyo, 2005, "Integration of Geometric Design and Mechanical Analysis Using B-Spline Functions on Surface," *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 62, pp. 1927~1949.
- (8) Naghdi P. M., 1963, "Foundations of Elastic Shell Theory. Progress in Solid Mechanics 4," Edited by Sneddon, I. N. North-Holland.
- (9) Lee, K., Cho, C. M. and Lee S. W., 2002, A Geometrically Nonlinear Nine-Node Solid Shell Element Formulation with Reduced Sensitivity to Mesh Distortion *CMES- Computer Modeling In Engineering & Sciences* 3 (3): pp. 339~349.
- (10) Les Piegl nad Wayne Tiller., 1997, "The NURBS Book," Springer-Verlag, New York, NY Second Edition.
- (11) SMLib™, NLib™, Solid Modeling Solutions, Inc. <http://www.smlib.com/>
- (12) Bathe, K. Y and Dvorkin, E.M., 1986, A Formulation of General Shell Elements, the use of Mixed Interpolation of Tensorial Components. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; 22: pp. 697~722.
- (13) Stander, N., Matzenmiller, A. and Ramm, E., 1989, "An Assessment on Assumed Strain Methods in Finite Rotation Shell Analysis," *Engineering Computations*, 3: pp. 58~66.