

< 논문 >

## 직교스프링들에 의해 지지되는 강체의 진동 설계

장선준\* · 이준호\* · 최용제 †

(2006년 8월 14일 접수, 2006년 12월 2일 심사완료)

### Vibration Design of a Rigid Body Supported by Orthogonal Springs

Seon Jun Jang, Jun Ho Lee and Yong Je Choi

**Key Words :** Vibration Modes (진동모드), Plane of Symmetry(대칭면), Screw Theory(나선이론), Orthogonal Springs(직교스프링), Engine Mount(엔진마운트)

#### Abstract

Vibration analysis of a rigid body supported by in-parallel linear springs can be greatly simplified by utilizing the conditions for a plane of symmetry. The vibration modes of an oscillatory system having plane of symmetry are classified into the in-plane and out-of-plane modes. From the viewpoint of screw theory, they represent respectively the vibration axes perpendicular to the plane of symmetry and lying in the plane of symmetry. In this paper, the sets of orthogonal and mutually intersecting three springs are used as resilient support of a rigid body. The geometrical conditions for the system to have a plane of symmetry and diagonalized stiffness matrix are presented. From the orthogonality of the vibration modes with respect to the inertia matrix, the geometrical relation between the reaction wrenches and the vibration modes are derived. This geometrical relation is then used to get the cubic design equation for the design of out-of-plane modes. The numerical design example of engine mounts is presented in order to explain the suggested design technique.

#### 1. 서론

공간상에서 탄성적으로 지지되는 강체로 모델링 할 수 있는 진동계의 진동해석 및 설계기법은 그 응용범위가 매우 넓다고 할 수 있다. 탄성체에 의해 지지되는 이러한 강체의 진동응답은 관성행렬과 강성행렬로 표현된 운동방정식의 고유치 해석으로부터 얻을 수 있다. 그러나 진동설계를 위한 해석적인 해를 구하는 것은 일반적으로 매우 복잡하므로 의미 있는 결과를 얻기 위해서 운동방정식을 단순화하는 조건을 부여한다. Harris<sup>(1)</sup>는, 탄성체가 3개의 서로 직교하며 한 점에서 만나는 스프링

들의 집합(여기서부터는 간략히 직교스프링이라 부르기로 한다)으로 구성되고 관성행렬은 무게중심에서 대각화된다고 가정하여, 대칭면을 갖도록 하는 특정 조건들을 제시하였다. 즉, 이때 강성행렬은 비연성화되어 모드들이 3개의 in-plane modes(대칭면 수직 진동축들)와 3개의 out-of-plane modes(대칭면 내부 진동축들)로 분리되는 것을 보였다.

Ball<sup>(2)</sup>의 나선이론적(screw theory) 측면에서 진동모드들은 공간상의 진동축들로 해석된다. Dimenberg<sup>(3)</sup>는 탄성체로 지지된 단일 강체의 운동방정식을 나선으로 표현하였으며, Griffis와 Duffy<sup>(4)</sup>는 강성행렬을 일반화된 힘인 렌치(wrench)와 일반화된 변위인 트위스트(small twist)간의 상반변환(correlation)으로서 유도하였다. Blanchet<sup>(5)</sup> 등은 평면상에서 탄성적으로 지지된 강체의 고유 진동모드가 진동중심임을 보이고 이들 사이의 관계를 설명하였다. 단

† 책임저자, 회원, 연세대학교 기계공학부  
E-mail : yjchoi@yonsei.ac.kr  
TEL : (02)2123-2826 FAX : (02)362-2736

\* 회원, 연세대학교 대학원 기계공학과

병주와 최용제<sup>(6)</sup>는 강성행렬의 기하적인 대각화 기법을 이용하여 강성행렬을 분해하고 대칭면 조건을 탄성중심의 위치벡터의 조건으로 유도하였고 대칭면 수직 진동축들의 대칭면과의 교점에 대한 3차식과 대칭면 내부 진동축들이 좌표축과 만나는 점들에 대한 3차식을 구하였다.

본 논문에서는, Harris의 직교스프링들의 집합으로 구성된 단일 강체의 진동계에 대한 설계기법을 다루었다. 먼저, 2절에서 탄성계의 강성행렬을 구하여 강체의 운동방정식을 유도하고, 3절에서 진동 시스템이 대칭면을 가질 조건과 강성행렬의 대각화 조건을 제시하였다. 또한 진동모드간의 직교성으로부터 반작용렌치와 진동축 사이의 기하적 관계를 유도하였다. 4절에서는 이러한 기하적 관계를 이용하여 대칭면 내부 진동축들의 교점을 직접 얻을 수 있는 3차식을 구하였다. 제안된 진동설계기법을 엔진마운트 설계의 예를 사용하여 수치적으로 설명하였다.

## 2. 운동방정식

### 2.1 직교스프링으로 구성된 강성행렬

하나의 강체가  $n$  개의 선 스프링(linear spring)에 의하여 병렬적으로 지지되고 있다고 가정한다. 각 스프링들의 탄성계수는  $k_1, k_2, \dots, k_n$  이며  $i$  번째 스프링이 놓여 있는 직선을  $\hat{s}_i$  라 하면, 이 탄성계의 강성행렬(stiffness matrix)은 식 (1)과 같이 표현할 수 있다.<sup>(4)</sup>

$$\mathbf{K}_o = \mathbf{j}[\mathbf{k}]\mathbf{j}^T = \sum_{i=1}^n k_i \begin{bmatrix} \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^T & -\mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^T (\mathbf{r}_i \times) \\ (\mathbf{r}_i \times) \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^T & -(\mathbf{r}_i \times) \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^T (\mathbf{r}_i \times) \end{bmatrix} \quad (1)$$

여기서  $\times$  기호는 벡터곱 연산자이며  $O$  는 좌표계의 원점을 나타낸다 그리고 자코비안 행렬인  $\mathbf{j}$  는

$$\mathbf{j} = [\hat{s}_1 \quad \hat{s}_2 \quad \dots \quad \hat{s}_n] \quad (2)$$

로 주어지며,  $\hat{s}_i$  는 선 스프링이 놓여 있는 직선의 좌표로서 플뤼커의 방사좌표(Plücker's ray coordinates)<sup>(7,8)</sup> 를 이용하면  $\hat{s}_i = [\mathbf{s}_i^T (\mathbf{r}_i \times \mathbf{s}_i)^T]^T$  로 표시할 수 있다. 이때,  $\mathbf{s}_i$  는  $i$  번째 직선의 단위방향벡터이고  $\mathbf{r}_i$  는 원점으로부터  $i$  번째 직선까지의 위치벡터이

다. 이제, 식 (1)로부터, Fig. 1 과 같이 각각  $X, Y, Z$  방향으로 놓여 서로 직교하며 한 점  $(a_i, b_i, c_i)$  에서 만나며 각각  $k_x, k_y, k_z$  의 스프링상수를 갖는 3 개의 스프링, 즉 직교스프링에 대한 강성행렬을 구하면 식 (3)과 같다.

$$\mathbf{K}_o^i = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^i & \mathbf{K}_{12}^i \\ (\mathbf{K}_{12}^i)^T & \mathbf{K}_{22}^i \end{bmatrix}, \quad (3)$$

여기서

$$\mathbf{K}_{11}^i = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}, \mathbf{K}_{12}^i = \begin{bmatrix} 0 & c_i k_x & -b_i k_x \\ -c_i k_y & 0 & a_i k_y \\ b_i k_z & -a_i k_z & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{22}^i = \begin{bmatrix} b_i^2 k_z + c_i^2 k_y & -a_i b_i k_z & -a_i c_i k_y \\ -a_i b_i k_z & a_i^2 k_z + c_i^2 k_x & -b_i c_i k_x \\ -a_i c_i k_y & -b_i c_i k_x & a_i^2 k_y + b_i^2 k_x \end{bmatrix}.$$

전체 탄성계가 이러한  $n$  개의 직교스프링들의 집합으로 구성될 때에 원점  $O$  에서 표현된 전체 강성행렬은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{K}_o = \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_o^i = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{12}^T & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

여기서

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} nk_x & 0 & 0 \\ 0 & nk_y & 0 \\ 0 & 0 & nk_z \end{bmatrix}, \mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & Ck_x & -Bk_x \\ -Ck_y & 0 & Ak_y \\ Bk_z & -Ak_z & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} Qk_z + Rk_y & -Lk_z & -Nk_y \\ -Lk_z & Pk_z + Rk_x & -Mk_x \\ -Nk_y & -Mk_x & Pk_y + Qk_x \end{bmatrix},$$

$$A = \sum_{i=1}^n a_i, \quad B = \sum_{i=1}^n b_i, \quad C = \sum_{i=1}^n c_i, \quad L = \sum_{i=1}^n a_i b_i,$$

$$M = \sum_{i=1}^n b_i c_i, \quad N = \sum_{i=1}^n a_i c_i, \quad P = \sum_{i=1}^n a_i^2,$$

$$Q = \sum_{i=1}^n b_i^2, \quad R = \sum_{i=1}^n c_i^2.$$

### 2.2 강체의 운동방정식

단일 강체의 관성행렬은 관성 주축의 방향들이 각각 좌표축과 평행할 때에 무게중심  $C$  에서 표현하면 식 (5)와 같은 대각행렬로 표현된다.

$$\mathbf{M}_c = \text{diag}(m \ m \ m \ I_{xx} \ I_{yy} \ I_{zz}), \quad (5)$$

여기서  $m$  은 강체의 질량이며  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$ ,  $I_{zz}$  는 각 축방향의 관성모멘트들이다. 이제, 직교스프링들로 지지되는 강체의 운동방정식은,  $\mathbf{X}(t)$  가 강체의 시간  $t$  에 대한 일반화된 변위를 기술하는 벡터라 할 때, 식 (4)와 식 (5)를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{M}_c \ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{K}_c \mathbf{X}(t) = \mathbf{0}. \quad (6)$$

강체는 조화진동을 한다고 가정한다. 고유 각진동수를  $\Omega$  라 하면  $\mathbf{X}(t)$  는

$$\mathbf{X}(t) = \hat{\mathbf{X}} e^{j\Omega t}, \quad (7)$$

로 나타낼 수 있고, 플뤼커의 축좌표(Plücker's axis coordinates)<sup>(7,8)</sup>로 표현된 변위트위스트  $\hat{\mathbf{X}}$  는 식 (8)과 같이 표현할 수 있다.

$$\hat{\mathbf{X}} = [\delta_x \ \delta_y \ \delta_z \ \phi_x \ \phi_y \ \phi_z]^T. \quad (8)$$

여기서  $\delta_x$ ,  $\delta_y$ ,  $\delta_z$  는 각각  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  각 축방향의 병진변위의 크기를 나타내는 좌표들이며  $\phi_x$ ,  $\phi_y$ ,  $\phi_z$  는 각 축방향의 각변위의 크기를 나타내는 좌표들이다. 식 (6)과 식 (7)로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$(\mathbf{K}_c - \Omega^2 \mathbf{M}_c) \hat{\mathbf{X}} = \mathbf{0}. \quad (9)$$

### 3. 기하적 관계들

#### 3.1 대칭면을 가질 조건

대칭면을 갖기 위해서는 강체의 운동방정식이 비연성화 되어야 한다. 본 논문에서는 관성행렬이 식 (5)와 같이 기준좌표계에서 대각행렬로 표현된다고 가정하였으므로 대칭면을 가질 조건은, 강성행렬을 구성하는 직교스프링들의 위치관계에 따라 결정된다. 식 (4)에서 진동모드들이  $XY$  평면을 대칭면으로 갖는 기하적 조건은 다음과 같다.

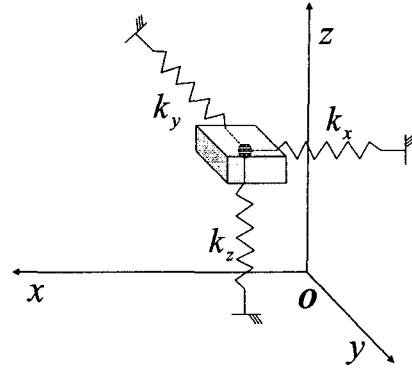


Fig. 1 Orthogonal and mutually intersecting three springs

$$C = M = N = 0. \quad (10)$$

#### 3.2 강성행렬의 대각화 조건

점  $C$  에서 탄성중심  $E$  까지의 벡터를  $\overline{CE} = [h_x \ h_y \ h_z]^T$  라 할 때 식 (10)을 만족하는 강성행렬의 대각화 조건을 찾기 위해 평행축 합동변환을 이용하여 강성행렬을  $E$  점에서 표현하였다.

$$\mathbf{K}_E = \mathbf{E}_{CE}^T \mathbf{K}_C \mathbf{E}_{CE}, \quad (11)$$

여기서

$$\mathbf{E}_{CE} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \overline{CE} \times \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad \overline{CE} \times = \begin{bmatrix} 0 & -h_z & h_y \\ h_z & 0 & -h_x \\ -h_y & h_x & 0 \end{bmatrix}.$$

이제 식 (11)로부터 다음과 같은 강성행렬의 대각화 조건을 얻을 수 있다.

$$AB - nL = 0, \quad (12a)$$

$$h_x = \frac{A}{n}, \quad h_y = \frac{B}{n}, \quad h_z = 0. \quad (12b)$$

이때 식 (11)은 다음과 같이 대각화된다.

$$\mathbf{K}_E = \text{diag}(nk_x \ nk_y \ nk_z \ k_a \ k_b \ k_\gamma), \quad (13)$$

여기서

$$k_\alpha = Rk_y + \left(Q - \frac{B^2}{n}\right)k_z, \quad k_\beta = Rk_x + \left(P - \frac{A^2}{n}\right)k_z,$$

$$k_\gamma = \left(Q - \frac{B^2}{n}\right)k_x + \left(P - \frac{A^2}{n}\right)k_y.$$

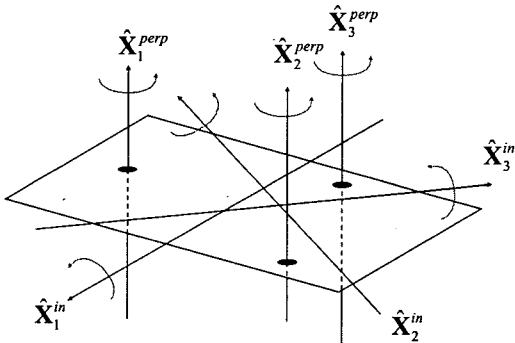


Fig. 2 Geometrical representation of in-plane and out-of-plane modes as three vibration axes perpendicular to the plane of symmetry and three vibration axes lying in the plane of symmetry respectively

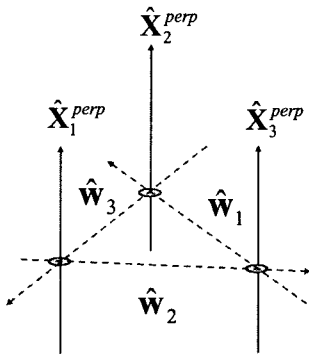


Fig. 3 Geometrical relationship between vibration axes perpendicular to the plane of symmetry and their reaction wrenches

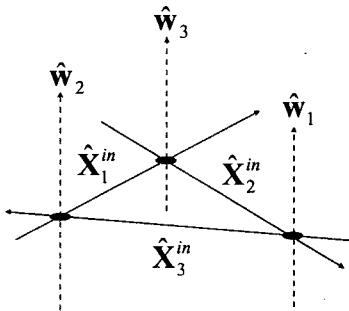


Fig. 4 Geometrical relationship between vibration axes lying in the plane of symmetry and their reaction wrenches

### 3.3 진동축 간의 기하적 관계

나선이론으로 표현된 진동계의 운동방정식으로부터 얻어진 모드 벡터들은 기하적으로 평면상에서는 진동중심을, 그리고 공간상에서는 진동축을 나타낸다. XY 평면을 대칭면으로 갖는 진동계의 경우 진동모드들은 각각 3 개의 대칭면 수직 진동축들(in-plane modes)  $\hat{X}^{perp}$  과 3 개의 대칭면 내부 진동축들(out-of-plane modes)  $\hat{X}^{in}$  로 분리되며 각각을 식 (8)의 좌표들을 사용하여 표현하면 다음과 같다.

$$\hat{X}^{perp} = [\delta_x \quad \delta_y \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \phi_z]^T, \quad (14a)$$

$$\hat{X}^{in} = [0 \quad 0 \quad \delta_z \quad \phi_x \quad \phi_y \quad 0]^T. \quad (14b)$$

이러한 경우의 진동축들의 형태는 Fig. 2 에서 보는 바와 같다.

j 번째 진동축  $\hat{X}_j$  에 의해 발생하는 관성 반작용력을 나타내는 나선은 관성행렬  $M_c$  을 곱하여 얻을 수 있다.<sup>(9)</sup>

$$\hat{w}_j = M_c \hat{X}_j, \quad (15)$$

여기서  $\hat{w}_j$  는 플뤼커의 방사좌표로 표현된 반작용렌치이다. 대칭면 수직 진동축들의 반작용렌치들은 대칭면 내부에 놓이게 되며 대칭면 내부 진동축들의 반작용렌치들은 대칭면에 수직하게 나타난다.

일반적으로 고유치해석을 통해 얻어지는 서로 다른 진동축들은 관성행렬  $M_c$  에 대해 다음과 같은 직교성을 갖는다.

$$\hat{X}_i^T M_c \hat{X}_j = 0, \quad (16)$$

여기서  $i \neq j$  이다. 식 (16)에 식 (15)를 대입하면 i 번째 진동축과 j 번째 반작용렌치간의 관계를 구할 수 있다.

$$\hat{X}_i^T \hat{w}_j = 0. \quad (17)$$

식 (17)은 진동축과 반작용렌치 사이의 역곱(reciprocal product)이 0 이며 이는 곧 두 나선이 역

관계에 있음을 의미한다. 역관계에 있는 두 나선의 기하적 관계는 식 (18)로 나타낼 수 있다.<sup>(2)</sup>

$$(p_1 + p_2)\cos\alpha_{12} - a_{12}\sin\alpha_{12} = 0, \quad (18)$$

여기서  $p_1$  과  $p_2$  는 각각 두 나선의 피치(pitch)들이고  $\alpha_{12}$  는 두 나선축의 사잇각, 그리고  $a_{12}$  는 두 축의 최단거리이다.

단일 강체의 진동계가 대칭면을 갖는 경우에 진동축의 피치는 식 (14)에서  $p = \delta \cdot \phi / \phi \cdot \phi = 0$  임을 알 수 있다. 반작용렌치 또한 피치가 0 인 직선으로 나타난다. 따라서 이들이 역관계를 갖기 위해서는 진동축과 반작용렌치가 서로 만나거나 ( $a_{12} = 0$ ) 또는 서로 평행하여야 한다 ( $\alpha_{12} = 0$  or  $\pi$ ). 이러한 사실로부터 대칭면 수직 진동축들과 반작용렌치들 사이의 기하적 관계(Fig. 3)와 대칭면 내부 진동축들과 반작용렌치들 사이의 기하적관계(Fig. 4)를 구할 수 있다.

#### 4. 진동축의 설계식

##### 4.1 대칭면 내부 진동축의 설계식

대칭면 내부 진동축의 설계식은, Fig. 4에서 보인 바와 같이 대칭면 내부 진동축들의 교점과 반작용렌치가 대칭면과 만나는 점이 일치하므로 대칭면 내부 진동축의 반작용렌치가 대칭면과 만나는 점의 궤적에 관한 식을 구함으로서 얻을 수 있다. 대칭면 내부 진동축의 반작용렌치가 대칭면과 만나는 점  $V$  에서 진동축과 반작용렌치 간에는 다음의 관계가 성립한다.

$$\hat{\mathbf{X}}_v^n = \mathbf{K}_v^{-1} \hat{\mathbf{w}}_v = \frac{1}{\Omega^2} \mathbf{M}_v^{-1} \hat{\mathbf{w}}_v. \quad (19)$$

Fig. 5 에서  $\overline{CV} = [v_x \ v_y \ 0]^T$  이며  $\overline{CE}$  의 원소들은 식 (12.b)와 같다. 이때 방사좌표에 대한 평행축 합동변환을 이용하여 식 (19)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\left( \mathbf{e}_{EV}^T \mathbf{K}_E^{-1} \mathbf{e}_{EV} - \frac{1}{\Omega^2} \mathbf{e}_{CV}^T \mathbf{M}_C^{-1} \mathbf{e}_{CV} \right) \hat{\mathbf{w}}_v = 0, \quad (20)$$

여기서,  $\mathbf{e}^T = \mathbf{E}^{-1}$  이다. 점  $V$  에서 대칭면 내부

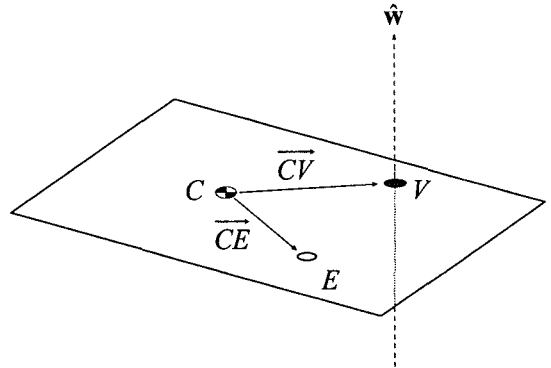


Fig. 5 Three points

진동축의 반작용렌치는 식 (21)과 같이 표현된다.

$$\hat{\mathbf{w}}_v = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T. \quad (21)$$

따라서 식 (20)으로부터 다음의 식들을 얻을 수 있다.

$$\left( \frac{1}{k_a} - \frac{1}{\Omega^2 I_{xx}} \right) v_y = \frac{B}{nk_a}, \quad (22a)$$

$$\left( \frac{1}{k_\beta} - \frac{1}{\Omega^2 I_{yy}} \right) v_x = \frac{A}{nk_\beta}, \quad (22b)$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{k_\beta} - \frac{1}{\Omega^2 I_{yy}} \right) v_x^2 + \left( \frac{1}{k_a} - \frac{1}{\Omega^2 I_{xx}} \right) v_y^2 - 2 \frac{A}{nk_\beta} v_x \\ & - 2 \frac{B}{nk_a} v_y + \frac{A^2}{n^2 k_\beta} + \frac{B^2}{n^2 k_a} + \frac{1}{nk_i} - \frac{1}{m\Omega^2} = 0. \end{aligned} \quad (22c)$$

식 (22)로부터  $v_y$  와  $\Omega$ ,  $v_x$  와  $\Omega$  를 각각 소거하여 대칭면 내부 진동축들의 교점에 관한 3차식들을 유도할 수 있다.  $v_x$  에 관한 3차식은 다음과 같다.

$$d_0 + d_1 v_x + d_2 v_x^2 + d_3 v_x^3 = 0, \quad (23)$$

여기서

$$d_0 = -A^2 n I_{yy} k_a k_z,$$

$$d_1 = I_{yy} (-A m n k_a k_\beta + 2 A n^2 I_{yy} k_a k_z$$

$$- A B^2 m k_\beta k_z - A n^2 I_{xx} k_\beta k_z - A^3 m k_a k_z),$$

$$d_2 = -mn^2 I_{xx} k_\beta^2 + mn^2 I_{yy} k_\alpha k_\beta - A^2 mn I_{xx} k_\beta k_z$$

$$+ 2A^2 mn I_{yy} k_\alpha k_z + B^2 mn I_{yy} k_\beta k_z + n^3 I_{xx} I_{yy} k_\beta k_z$$

$$- n^3 I_{yy} k_\alpha k_z,$$

$$d_3 = Amn^2 k_z (I_{xx} k_\beta - I_{yy} k_\alpha).$$

또한  $v_y$  에 관한 3 차식을 구하면 다음과 같다.

$$e_0 + e_1 v_y + e_2 v_y^2 + e_3 v_y^3 = 0, \quad (24)$$

여기서

$$e_0 = -B^2 n I_{xx}^2 k_\beta k_z,$$

$$e_1 = I_{xx} (-Bmnk_\alpha k_\beta + 2Bn^2 I_{xx} k_\beta k_z$$

$$- A^2 Bmk_\alpha k_z - Bn^2 I_{yy} k_\alpha k_z - B^3 mk_\beta k_z),$$

$$e_2 = -mn^2 I_{yy} k_\alpha^2 + mn^2 I_{xx} k_\alpha k_\beta - B^2 mn I_{yy} k_\alpha k_z$$

$$+ 2B^2 mn I_{xx} k_\beta k_z + A^2 mn I_{xx} k_\alpha k_z + n^3 I_{xx} I_{yy} k_\alpha k_z$$

$$- n^3 I_{xx}^2 k_\beta k_z,$$

$$e_3 = Bmn^2 k_z (I_{yy} k_\alpha - I_{xx} k_\beta).$$

#### 4.2 진동 설계

특정 모드에 대한 가진력의 영향을 제거하기 위해서는 특정 모드의 절점(node 또는 nodal point)을 구하여 이 점과 가진점을 일치시킨다. 이러한 절점은 평면상에서의 진동중심이 된다. 가진력도 방향과 위치를 동시에 표현하는 가진렌치로 나타낼 수 있다.

$n$  개의 고유 모드가 있는 진동계의 경우 강제응답 변위트위스트  $\hat{\mathbf{X}}$  는 진동축들의 선형조합으로서 표현된다.

$$\hat{\mathbf{X}} = \sum_{i=1}^n \frac{\hat{\mathbf{X}}_i^T \hat{\mathbf{w}}_{ext}}{k_i - \omega^2 m_i} \hat{\mathbf{X}}_i, \quad (25)$$

여기서  $\hat{\mathbf{w}}_{ext}$  는  $\omega$  의 각진동수로 인가되는 가진렌치이다. 또한  $k_i = \hat{\mathbf{X}}_i^T \mathbf{K}_c \hat{\mathbf{X}}_i$ ,  $m_i = \hat{\mathbf{X}}_i^T \mathbf{M}_c \hat{\mathbf{X}}_i$  이다. 식 (25) 우변의 분수의 분자항  $\hat{\mathbf{X}}_i^T \hat{\mathbf{w}}_{ext}$  은 축좌표로 표현된 진동축  $\hat{\mathbf{X}}_i$  와 방사좌표로 표현된 가진렌치  $\hat{\mathbf{w}}_{ext}$  간의 역곱이다. 식 (18)에서 기술한 바와 같이 가진렌치의 피치가 0인 경우 가진렌치가 특정 진동축과 평행하거나 만날 때 역 관계를 이루며 이때 전체 응답에서 특정 진동축에 대한 가진렌치의 영

향이 사라지게 된다. 이러한 성질은 대칭면을 가진 진동계의 설계에 응용될 수 있다. 먼저 가진렌치를 대칭면에 수직하게 인가하거나 대칭면이 가진렌치에 수직하게 되도록 진동시스템을 설계함으로써 대칭면 수직 진동축들에 대한 가진렌치의 영향을 없앨 수 있다. 또한 가진렌치를 대칭면 내부 진동축들의 교점 중 하나와 일치시키거나 반대로 대칭면 내부 진동축의 교점의 제적을 이용하여 교점 중 하나가 가진렌치와 만나도록 진동시스템을 변경함으로써 대칭면을 가진 진동시스템의 경우 최대 5개의 모드들에 대한 가진렌치의 영향을 전체 응답으로부터 소거할 수 있게 된다.(Fig. 6)

#### 5. 수치적 설계 예

Fig. 7에서 엔진은 4개의 마운트에 의해 지지되고 있다. 각 엔진마운트는 직교스프링으로 모델링하였다. 엔진마운트의 탄성값과 위치 및 엔진의 질량 및 관성모멘트 값들은 Table 1과 2에서 제시되어 있다. Table 2에서 마운트들이 모두 한 평면상에 위치하므로 ( $c_i = 0$ ), 식 (10)의 대칭면 조건을 만족하며 대칭면을 갖는다. 제시된 설계변수들로부터 진동계의 강성행렬과 관성행렬을 계산하면 다음과 같다.

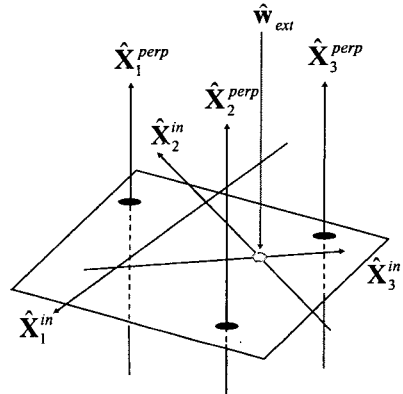


Fig. 6 Five vibration axes reciprocal to excitation wrench

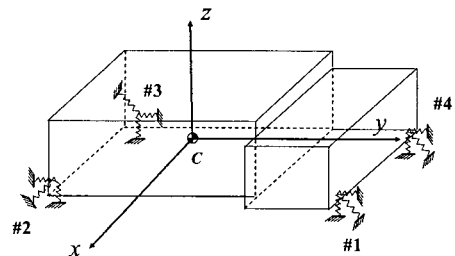


Fig. 7 Engine model

$$K_C = 10^2 \times \begin{bmatrix} 5812 & 0 & 0 & 0 & 0 & -17.44 \\ 0 & 4480 & 0 & 0 & 0 & 604.8 \\ 0 & 0 & 11320 & 33.96 & -1528 & 0 \\ 0 & 0 & 33.96 & 2864 & -4.585 & 0 \\ 0 & 0 & -1528 & -4.585 & 1884 & 0 \\ -17.44 & 604.8 & 0 & 0 & 0 & 2216 \end{bmatrix} \quad (26a)$$

$$M_C = \text{diag}(296.2 \quad 296.2 \quad 296.2 \quad 8.537 \quad 27.25 \quad 26.02). \quad (26b)$$

가진렌치는 피스톤의 상하운동으로 인한 관성력에 대해 다음과 같이 모델링하였다.

$$\hat{w}_{ext} = 881.1 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 4.825 \times 10^{-4} & 0.3522 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (27)$$

식 (27)에서 가진렌치는 Z축의 음의 방향이며 점 P (0.3522, -4.825×10<sup>-4</sup>, 0)에서 대칭면과 만나고 있음을 알 수 있다. 식 (26)의 강성행렬과 관성행렬로 이루어진 진동계는 3개의 대칭면 수직 진동축들과 3개의 대칭면 내부 진동축들을 갖게 된다. 3개의 대칭면 수직 진동축들은 식 (27)의 가진렌치와 평행하므로 응답에 영향을 주지 않는다. 따라서 본 예제에서는 대칭면 내부 진동축 3개중 2개의 영향을 전체 응답으로부터 소거하는 설계기법을 예로서 제시하였다.

1번과 2번 마운트의 위치를 X축의 음의 방향으로 0.5200 m에서 0.2000 m까지 동시에 이동시켰을 경우에 나타나는 대칭면 내부 진동축들의 교점들의 궤적을 식 (23)과 (24)를 이용하여 Fig. 8과 같이 구하였다. 1번과 2번 마운트의 X 좌표가 0.3630 m 일 때 하나의 교점이 점 P와 일치하게 된다. 이때 마운트의 이동으로 인해 변경된 강성행렬 K'<sub>C</sub>는 다음과 같다.

$$K'_C = 10^2 \times \begin{bmatrix} 5812 & 0 & 0 & 0 & 0 & -17.44 \\ 0 & 4480 & 0 & 0 & 0 & 253.1 \\ 0 & 0 & 11320 & 33.96 & -639.6 & 0 \\ 0 & 0 & 33.96 & 2864 & -1.919 & 0 \\ 0 & 0 & -639.6 & -1.919 & 1100 & 0 \\ -17.44 & 253.1 & 0 & 0 & 0 & 1906 \end{bmatrix} \quad (28)$$

이 경우, 대칭면 내부 진동축들의 교점과 대칭면에 수직한 가진렌치가 대칭면과 만나는 점이 일치하므로, Fig. 6과 같이 가진렌치는 모두 5개의 진동축들과 역 관계를 이루게 되며 전체 응답에는 하나의 진동 모드만이 나타나게 된다.

제시된 설계기법을 검증하기 위해 식 (26b)의 관성행렬과 식 (28)의 강성행렬로부터 모드 해석을 수행하고 식 (25)로부터 진동응답을 계산하였다. 계산결과는 Fig. 9와 같다. 대칭면을 가진 진동계에서 가진렌치가 대칭면에 수직하게 가해지는 경우 δ<sub>x</sub>, δ<sub>y</sub>, φ<sub>z</sub> 방향의 응답은 나타나지 않으므로 나머지 방향의 응답만을 표시하였다. Fig. 9에서 진동계는 하나의 피크(peak)만을 갖는 것을 확인할 수 있다.

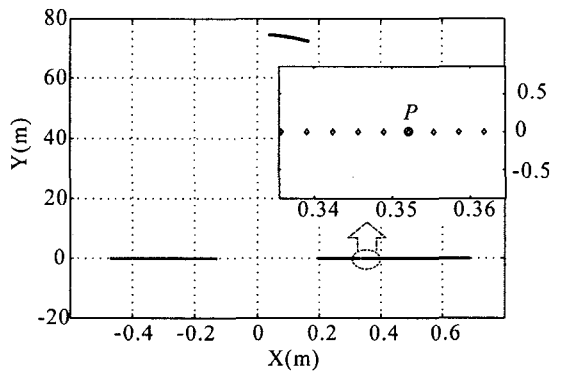


Fig. 8 Loci of intersecting points of vibration axes lying in the plane obtained by changing X coordinates of mount #1 and #2 from 0.5200 m to 0.2000 m

Table 1 Mass properties of the engine

<i>m</i> (kg)	<i>I<sub>xx</sub></i> (kg·m <sup>2</sup> )	<i>I<sub>yy</sub></i> (kg·m <sup>2</sup> )	<i>I<sub>zz</sub></i> (kg·m <sup>2</sup> )
296.2	8.537	27.25	26.02

Table 2 Mount parameters

	<i>a<sub>i</sub></i> (m)	<i>b<sub>i</sub></i> (m)	<i>c<sub>i</sub></i> (m)
Mount #1	0.5200	0.5060	0.0000
Mount #2	0.5200	-0.5000	0.0000
Mount #3	-0.2500	-0.5000	0.0000
Mount #4	-0.2500	0.5060	0.0000
<i>k<sub>x</sub></i> (N/m)	1.453×10 <sup>5</sup>		
<i>k<sub>y</sub></i> (N/m)	1.120×10 <sup>5</sup>		
<i>k<sub>z</sub></i> (N/m)	2.830×10 <sup>5</sup>		

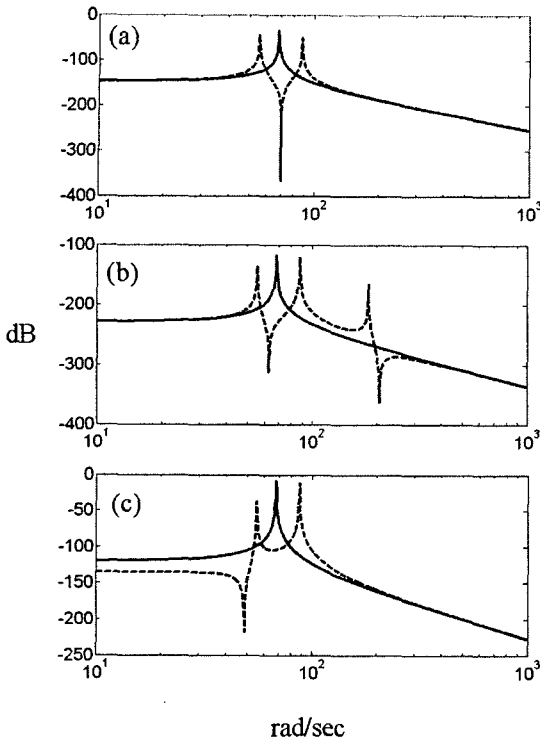


Fig. 9 Results from modal analysis. Solid line: modified, Dashed line: original

(a)  $|\delta_z|$ , (b)  $|\phi_x|$ , (c)  $|\phi_y|$

## 6. 결론

본 논문에서는 직교스프링들에 의해 지지되는 단일 강체의 기하적 진동 모드 설계기법을 제시하였다. 단일 강체 진동계가 대칭면 조건을 만족할 때 진동축들과 반작용렌치들 사이에 성립되는 기하적 관계를 고찰하여, 이로부터 대칭면 내부 진동축들의 교점의 궤적을 구할 수 있는 3차식을 유도하였다. 가진렌치가 진동축과 역관계를 가질 때 진동축에 대한 가진렌치의 영향이 소거됨을 이용한 진동설계 기법을 제시하였다. 또한, 수치 예를 통해 대칭면 내부 진동축의 교점들의 궤적이 대칭면에 수직으로 인가된 가진렌치와 만날 때 총 5개의 진동축들에 대한 가진렌치의 영향을 소거할 수 있음을 보였다.

## 후 기

이 논문은 2005년도 정부재원(교육인적자원부 학술연구조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임(KRF-2005-041-D00056).

## 참고문헌

- (1) Harris, C., 1997, *Shock and Vibration Handbook* 4th, McGraw Hill.
- (2) Ball, R. S., 1900, *A Treatise on the Theory of Screws*, Cambridge University Press.
- (3) Dimentberg, F. M., 1965, *The Screw Calculus and its Application in Mechanics*, Foreign Technology Division, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, Document No. FTD-HT\_23-1632-67.
- (4) Griffis, M. and Duffy, J., 1991, "Kinestatic Control: A Novel Theory for Simultaneously Regulating Force and Displacement," *J. Mechanical Design*, 113, pp. 508~515.
- (5) Blanchet, P. and Lipkin, H., 1996, "Vibration Centers for Planar Motion," *ASME Design Engineering Technical Conferences*, August 18-22, Irvine.
- (6) Dan, B. J. and Choi, Y. J., 2000, "The Geometrical Mode Analysis of an Elastically Suspended Rigid Body with Planes of Symmetry," *Trans. of the KSME A*, Vol. 24, No. 1, pp. 110~117.
- (7) Plücker, J., 1865, "On a New Geometry of Space," *Phil. Trans. Royal Society of London*, pp. 725~791.
- (8) Choi, Y. J., 1991, "Kinematic and Static Analyses of Robots via Screw Theory," *Journal of the KSME*, Vol. 31, No. 7, pp. 615~625.
- (9) Blanchet, P. and Lipkin, H., 1998, "Dual Properties for Vibration Analysis via Screw Theory," *ASME Design Engineering Technical Conferences*, September 13-16, Atlanta, Georgia.
- (10) Duffy, J., 1996, *Statics and Kinematics with Application to Robotics*, Cambridge University Press.
- (11) Dan, B. J. and Choi, Y. J., 1999, "Vibration Analysis via Screw Theory with Application to the Design of Information Storage Devices," *Trans. of the KSME A*, Vol 23, No. 2, pp. 155~165.
- (12) Norton, R. L., 1992, *Design of Machinery* 3rd, McGraw Hill.
- (13) Bernard, J. E. and Starkey, J. M., 1983, "Engine mount optimization," *SAE Technical Paper Series* 830257.
- (14) Lee, Joon-Yong and Kim, Chan-Mook, 1997, "An Experimental Study of Engine Mount Optimization to Improve Noise and Vibration Quality of F.R. Vehicle," *Journal of KSNVE*, Vol. 7, No. 4, pp. 681~688.