

< 논문 >

섬유 체적분율을 고려한, 단일의 함유체를 포함한 무한고체에서의 탄성해석

이 정 기[†] · 한 희 덕^{*}

(2006년 7월 31일 접수, 2006년 11월 30일 심사완료)

Elastic Analysis of an Unbounded Elastic Solid with an Inclusion Considering Composite Fiber Volume Fraction

Jung-Ki Lee and Hui-duck Han

Key Words: Volume Integral Equation Method(체적 적분방정식법), Inclusions(함유체), Composites(복합재료), Fiber Volume Fraction(섬유 체적분율), Effective Material(균질화 물질)

Abstract

A volume integral equation method (VIEM) is applied for the effective analysis of plane elastostatic problems in unbounded solids containing single isotropic inclusion of two different shapes considering composite fiber volume fraction. Single cylindrical inclusion and single square cylindrical inclusion are considered in the composites with six different fiber volume fractions (0.25, 0.30, 0.35, 0.40, 0.45, 0.50). Using the rule of mixtures, the effective material properties are calculated according to the corresponding composite fiber volume fraction. The analysis of plane elastostatic problems in the unbounded effective material containing single fiber that covers an area corresponding to the composite fiber volume fraction in the bounded matrix material are carried out. Thus, single fiber, matrix material with a finite region, and the unbounded effective material are used in the VIEM models for the plane elastostatic analysis. A detailed analysis of stress field at the interface between the matrix and the inclusion is carried out for single cylindrical or square cylindrical inclusion. Next, the stress field is compared to that at the interface between the matrix and the single inclusion in unbounded isotropic matrix with single isotropic cylindrical or square cylindrical inclusion. This new method can also be applied to general two-dimensional elastodynamic and elastostatic problems with arbitrary shapes and number of inclusions. Through the analysis of plane elastostatic problems, it will be established that this new method is very accurate and effective for solving plane elastic problems in unbounded solids containing inclusions considering composite fiber volume fraction.

1. 서론

본 논문에서는 서로 상호작용을 하는 다수의 원형 또는 정사각형의 단면을 갖는 실린더 형태의 등방성 함유체(섬유)를 포함하는 등방성 무한고체

(복합재료)가 정적 무한역 하중을 받을 때 고체 내부에 발생하는 변형, 변형률 및 응력분포 해석을 효과적으로 수행할 수 있는 체적 적분방정식법(VIEM; Volume integral equation method)이라는 새로운 수치해석 방법을 소개한다.

본 논문에서는 단일의 원형 또는 정사각형의 단면을 갖는 실린더 형태의 등방성 함유체를 포함하는 등방성 무한고체가 정적 무한역 하중을 받을 때, 함유체와 기지(matrix) 사이의 경계면에서의 응력분포를 구하기 위하여, 두 가지 서로

[†] 책임저자, 회원, 홍익대학교 기계정보공학과

E-mail : inq3jkl@wow.hongik.ac.kr

TEL : (041)860-2619 FAX : (041)866-9129

^{*} 홍익대학교 대학원 기계정보공학과 [(주)유니플라텍]

다른 수치해석 방법을 적용한다; (1) 복합재료의 섬유 체적분율(fiber volume fraction)을 고려하지 않는 방법과 (2) 복합재료의 섬유 체적분율을 고려하는 방법. 복합재료의 섬유 체적분율을 고려한 해석 결과와 섬유 체적분율을 고려하지 않은 해석 결과 사이에 현저한 차이가 발생하는 것을 확인할 수 있었다.

2. 체적 적분방정식법(VIEM)

Fig. 1은 x축에 평행하게 전파하는 평면 시간-조화 탄성파가 입사할 때 재료특성이 다른 다양한 형태를 갖는 다수의 함유체에 의하여 산란현상이 발생하는 일반적인 탄성동역학 문제를 나타낸다. Fig. 2는 재료특성이 다른 다양한 형태를 갖는 다수의 함유체를 포함하는 무한고체가 무한역 하중을 받는 일반적인 탄성정역학 문제를 나타낸다. 여기서, 무한역 하중이란 무한원방에서 작용하는 하중을 나타낸다.

Fig. 1에서, 기지(matrix)는 무한공간을 차지하는 균일한 등방성 재료로 이루어지고, 함유체들은 기지와 다른 등방성 재료로 이루어진다고 가정한다. $\rho^{(1)}$ 과 $c_{ijkl}^{(1)}$ 은 함유체의 밀도와 탄성상수를 나타내고, $\rho^{(2)}$ 와 $c_{ijkl}^{(2)}$ 는 기지의 밀도와 탄성상수를 나타낸다. 함유체들과 기지 사이의 경계면은 변위와 표면력 벡터(traction vector)의 연속성을 보장하는 완전결합이라고 가정한다.

$e^{-i\omega t}u_m^0(\mathbf{x}, \omega)$ 를 입사파의 변위 벡터의 m성분이라고 하고, 함유체가 포함되어 있는 무한고체의 임의의 위치에서의 변위 벡터의 m성분을 $e^{-i\omega t}u_m(\mathbf{x}, \omega)$ 라고 한다. 여기서 ω 는 파형의 각 주파수(angular frequency)를 나타내고, t는 시간을 나타내며, 공통적인 시간인자 $e^{-i\omega t}$ 의 표시는 생략하기로 한다. Mal과 Knopoff⁽¹⁰⁾는 무한고체 내부의 임의의 위치에서의 변위 벡터 $u_m(\mathbf{x})$ 가

$$u_m(\mathbf{x}) = u_m^0(\mathbf{x}) + \int_V [\delta\rho\omega^2 g_i^m(\xi, \mathbf{x})u_i(\xi) - \delta c_{ijkl} g_{i,j}^m(\xi, \mathbf{x})u_{k,l}(\xi)] d\xi \quad (1)$$

의 방정식을 만족함을 보였다. 식 (1)에서 적분은 전체 무한공간에 대해서 이루어지고, $\delta\rho = \rho^{(1)} - \rho^{(2)}$ 이고 $\delta c_{ijkl} = c_{ijkl}^{(1)} - c_{ijkl}^{(2)}$ 이며 각각 함유체와 기지 사이의 밀도와 탄성상수의 차이를 나타낸다. $g_i^m(\xi, \mathbf{x})e^{-i\omega t}$ 은 등방성 무한기지에서의 Green 함수이다. 즉, $g_i^m(\xi, \mathbf{x})e^{-i\omega t}$ 은 등방성 무한기지의 \mathbf{x} 에서 m방향으로 작용하는 단위 집중하중 $e_m e^{-i\omega t}$ 때문에 ξ 에서 발생하게 되는 변위 벡터의 i방향 성분을 나타낸다. 식 (1)에서 합의 규약과 콤마 표기법이 사용되었으며, 미분은 적분변수 ξ_i 에 관해서 행해진다. 여기서, $\delta\rho$ 와 δc_{ijkl} 가 함유체 내부에서만 0이 아니므로, 피 적분함수(integrand)는 함유체 외부의 무한공간에서는 0이 된다는 사실을 주목해야 한다.

만약 \mathbf{x} 가 함유체 내부에 속하면, 식 (1)은 함유체 내부에서의 미정 변위 벡터 $u(\mathbf{x})$ 에 관한 적분-미분 방정식(integro-differential equation)이 된다. 따라서, 임의의 형상을 갖는 단일의 함유체를 할지라도, 식 (1)의 해를 해석적으로 구한다는 것은 매우 어려운 문제가 된다. 그러므로, 함유체 내부를 표준의 유한요소들을 사용해서 요소 분할하여 함유체 내부에서의 $u(\mathbf{x})$ 를 수치해석 방법으로 결정하는 체적 적분방정식법이 Lee와 Mal^(5,6)에 의하여 개발되었다. 일단, 함유체 내부에서의 $u(\mathbf{x})$ 가 결정되면, 함유체 내부에서의 변형을 및 응력을 계산할 수 있고, 또한 함유체 외부에서의 산란파의 변위 및 응력은 식 (1)의 적분 값을 구함으로써 별다른 어려움 없이 계산할 수 있다.

특히, 함유체가 이방성을 나타내는 경우, 경계요소법에서는 이방성 재료에 대한 Green 함수를 구해야만 해석이 가능한 반면에 체적 적분방정식법에서는 등방성인 기지에서의 Green 함수만 구할 수 있으면 해석이 가능하다는 장점이 있다. 그런데, 일반적으로 이방성 재료에서의 Green 함수는 등방성 재료의 경우와 비교해 볼 때 복잡한 형태로 나타나며, 특히, 탄성파 산란 문제에서는 이방성 재료에서의 Green 함수를 구하는 것이 매우 어려운 것으로 알려져 있다.⁽⁹⁾

Fig. 2에 있는 탄성정역학 문제해석의 경우는 파형의 주파수가 0인 극한 경우의 탄성동역학 문제로 수식화할 수 있으며, 함유체를 포함하는 무한고체의 임의의 위치에서의 변위 벡터 $u_m(\mathbf{x})$ 가 다음의 방정식을 만족함을 알 수 있다.^(5,6)

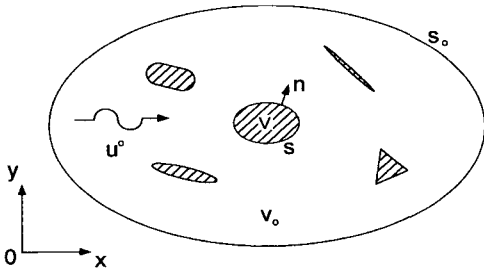


Fig. 1 Geometry of the general elastodynamic problem

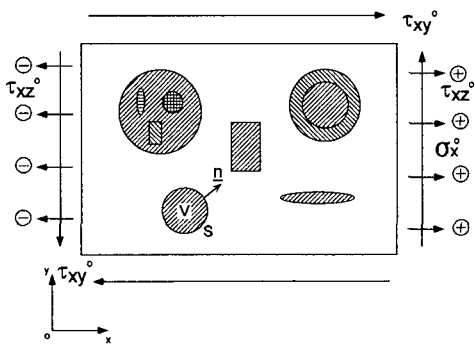


Fig. 2 Geometry of the general elastostatic problem

$$u_m(\mathbf{x}) = u_m^0(\mathbf{x}) - \int_V \delta c_{ijkl} g_{i,j}^m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_{k,l}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \quad (2)$$

식 (2)에서, $\delta c_{ijkl} = c_{ijkl}^{(1)} - c_{ijkl}^{(2)}$ 이며, 함유체와 기지 사이의 탄성상수의 차이를 나타낸다. $g_m^i(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$ 은 등방성 무한기지에서의 탄성정역학 Green 함수(또는 Kelvin의 해)이다.⁽¹⁾

등방성 무한기지에 다수의 등방성 함유체가 포함된 무한고체에서의 일반적 탄성동역학 및 탄성정역학 문제를 해석하기 위한 체적 적분방정식법에 대한 자세한 기술은 Lee와 Mal^(5,6)에 잘 나타나 있다.

3. 함유체의 두 가지 모델링 방법

원형 또는 정사각형의 단면을 갖는 실린더 형태의 단일의 등방성 함유체를 포함하는 등방성 무한고체가 정적 무한역 하중을 받을 때, 함유체와 기지(matrix) 사이의 경계면에서의 응력분포를 구하기 위하여, (1) 복합재료의 섬유 체적분율을

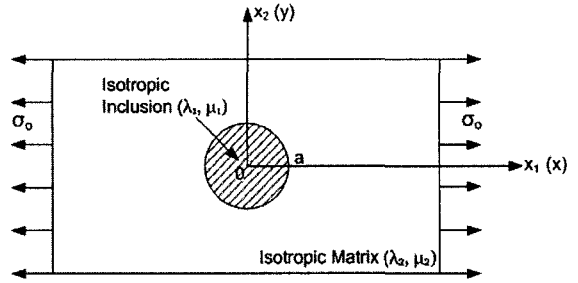


Fig. 3 An isotropic inclusion in unbounded isotropic matrix under uniform remote tensile loading

고려하지 않는 방법과 (2) 복합재료의 섬유 체적분율을 고려하는 방법에 따라 모델링을 다르게 하였다.

3.1. 복합재료의 섬유 체적분율을 고려하지 않는 모델링

대부분의 수치해석 방법에서 많이 사용되는 모델링 방법이며, 함유체(섬유)와 등방성 무한 기지(matrix)만을 모델링에 포함하는 방법이다.

Fig. 3에 있는 무한공간을 차지하는 등방성 기지에 원형 단면을 갖는 실린더(cylinder) 형태의 단일의 등방성 함유체가 포함되어 있는 무한고체가 무한역 인장하중 (σ_0)을 받는 경우를 고찰해 본다. 이때, 반지름 a 는 $70\mu\text{m}$ 로 가정한다. 이 문제 해석에 사용된 등방성 기지와 등방성 함유체의 물질 특성치는 Table 1에 나타나 있다.

Fig. 4는 체적 적분방정식법에 사용되는 대표적인 분할된 모델의 예이다. 체적 적분방정식법에 사용되는 요소는 표준의 유한요소이다. 무한공간을 차지하는 기지는 요소 분할할 필요가 없으며, 함유체 내부만을 표준의 유한요소를 사용하여 요소 분할한다는 점이 유한요소법과 다른 점이다. 또한 체적 적분방정식법에서는, 경계요소법과 달리, 함유체 내부를 유한요소를 사용하여 요소 분할하므로 임의의 형상을 갖는 함유체를 해석할 때 도 전혀 어려움이 없게 된다.

체적 적분방정식법 모델에는 표준의 8-절점 사각형 요소와 6-절점 삼각형 요소가 사용되었으며, 사용된 요소의 수는 256개이다.

Table 2는 등방성 기지와 원형 단면을 갖는 실린더 형태의 단일의 등방성 함유체로 이루어진 무한고체가 무한역 인장하중을 받을 때 함유체 내부에 발생하는 규준화된 인장응력 성분($\frac{\sigma_x}{\sigma_0}$)에

Table 1 Material properties of the isotropic matrix and the isotropic inclusion

(Unit: GPa)	Isotropic Matrix	Isotropic Inclusion
λ	67.34	176.06
μ	37.88	176.06

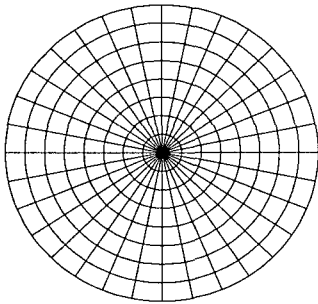


Fig. 4 A typical discretized model in the volume integral equation method

대한 체적 적분방정식법의 해와 해석해와의 비교를 나타낸다. 이때, 실린더 형태의 등방성 함유체 내부에서의 인장응력 성분은 일정한 값을 갖게 된다.^(3,8,11,13) 체적 적분방정식법의 해와 해석해가 서로 잘 일치함을 알 수 있다.

3.2. 복합재료의 섬유 체적분율을 고려하는 모델링

0.25, 0.30, 0.35, 0.40, 0.45, 0.50의 여섯 가지 서로 다른 복합재료의 섬유 체적분율을 고려하였다. 혼합법칙(rule of mixtures)을 적용하여, 각각의 섬유 체적분율에 해당하는 균질화 물질 특성치(effective material properties)를 다음과 같이 계산하였다.^(2,4)

$$E_e = cE_f + (1 - c)E_m \tag{3}$$

$$v_e = cv_f + (1 - c)v_m \tag{4}$$

여기서, c 는 섬유 체적분율을 나타내며, E_f 는 함유체(섬유)의 탄성계수를 나타내고, E_m 는 기지의 탄성계수를 나타낸다. v_f 는 함유체(섬유)의 푸아송

Table 2 Normalized tensile stress component (σ_x/σ_x^0) within the isotropic cylindrical inclusion due to uniform remote tensile loading (σ_x^0)

	Isotropic Matrix with Isotropic Inclusion
Exact	1.3167
VIEM	1.3167 (Average)

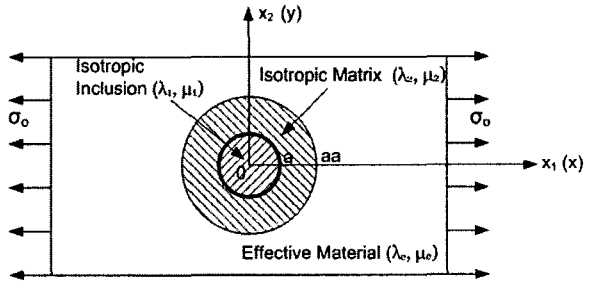


Fig. 5 An isotropic inclusion that covers an area corresponding to the composite fiber volume fraction in bounded isotropic matrix material in unbounded effective material under uniform remote tensile loading

비를 나타내며, v_m 는 기지의 푸아송 비를 나타낸다. E_e 는 균질화 물질(effective material)의 탄성계수를 나타내고, v_e 는 균질화 물질의 푸아송 비를 나타낸다.

Fig. 5에 나와 있는, 무한공간을 차지하는 균질화 물질에 섬유 체적분율이 변함에 따라서 다른 면적을 갖는, 단일의 등방성 원형 또는 정사각형 실린더 형태의 함유체 및 유한한 면적(함유체를 포함하는 기지의 면적을 일정하게 고정)을 갖는 기지가 포함되어 있는 무한고체가 무한역 인장하중 (σ_0)을 받는 경우를 고려해본다.

이때, 기지의 바깥 반지름을 aa 는 $140\mu\text{m}$ 로 가정한다. 함유체의 반지름 a 는 해당하는 섬유 체적분율에 따라서 결정되며, 섬유 체적분율이 $0.25(c = 0.25)$ 인 경우에 $a = 70\mu\text{m}$ 이며, 섬유 체적분율이 $0.50(c = 0.50)$ 인 경우에 $a = 98.994\mu\text{m}$ 로 가정된다.

이 문제 해석에 Table 1에 나타나 있는 기지와

등방성 함유체의 물질 특성치가 사용되었으며, 복합재료의 여섯 가지 서로 다른 섬유 체적분율에 따른 균질화 물질 특성치가 Table 3에 나타나 있다.

Fig. 6과 Fig. 7은 체적 적분방정식법에 사용되는 대표적인 분할된 모델의 예이다. Fig. 6은 단일의 원형 단면을 갖는 실린더 형태의 함유체를 포함하는 등방성 무한고체에 대한 체적 적분방정식법에 사용되는 대표적인 분할된 모델의 예를 나타내고, Fig. 7은 단일의 정사각형 단면을 갖는 실린더 형태의 함유체를 포함하는 등방성 무한고체에 대한 체적 적분방정식법에 사용되는 대표적인 분할된 모델의 예를 나타낸다.

Fig. 6과 Fig. 7에서 무한공간을 차지하는 균질화 물질은 요소 분할할 필요가 없으며, 섬유 체적

분율이 변함에 따라서 다른 면적을 갖는 함유체 및 유한한 면적을 갖는 기지의 내부만을 표준의 유한 요소를 사용하여 요소 분할한다. Fig. 6(a)는 섬유 체적분율이 0.25일 때 체적 적분방정식법에 사용된 분할된 모델($a = 70\mu\text{m}$, $aa = 140\mu\text{m}$)이고, Fig. 6(b)는 섬유 체적분율이 0.50일 때 사용된 분할된 모델($a = 98.994\mu\text{m}$, $aa = 140\mu\text{m}$)이다. Fig. 7(a)는 섬유 체적분율이 0.25일 때 체적 적분방정식법에 사용된 분할된 모델(a와 b 사이의 한 변의 길이는 $70\mu\text{m}$, aa와 bb 사이의 한 변의 길이는 $140\mu\text{m}$)이고, Fig. 7(b)는 섬유 체적분율이 0.50일 때 사용된 분할된 모델(a와 b 사이의 한 변의 길이는 $98.994\mu\text{m}$, aa와 bb의 한 변의 길이는 $140\mu\text{m}$)이다. Fig. 6과 Fig. 7에서 함유체와 기지 사이 및 기지와 균질화 물질 사이의 경계면을 굵은 실선으로 표시하였다.

Fig. 6의 체적 적분방정식법 모델에 표준의 8-절점 사각형 요소와 6-절점 삼각형 요소가 사용되었으며, 사용된 요소의 수는 512이다. Fig. 7의 체적 적분방정식법 모델에 표준의 8-절점 사각형 요소와 6-절점 삼각형 요소가 사용되었으며, 사용된 요소의 수는 1,024이다.

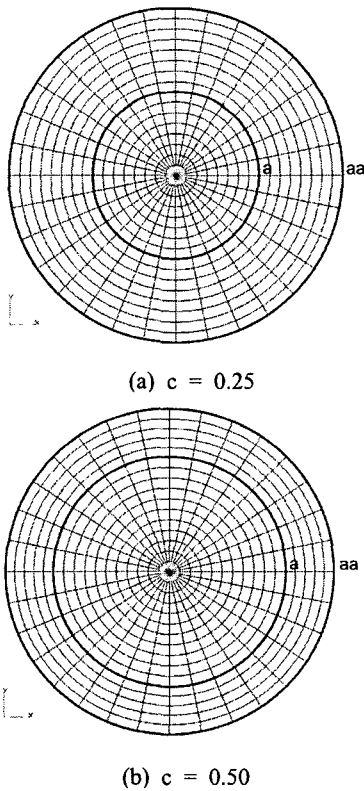


Fig. 6 A typical discretized model in the volume integral equation method for the unbounded effective material containing single isotropic cylindrical inclusion in bounded isotropic matrix material

Table 3 Material properties of the effective material according to the composite fiber volume fraction

c (fiber volume fraction)	Elastic Constants (Unit: GPa)	Matrix	Inclusion	Effective Material
0.25	λ	67.34	176.06	108.795
	μ	37.88	176.06	71.032
0.30	λ	67.34	176.06	115.687
	μ	37.88	176.06	77.769
0.35	λ	67.34	176.06	122.164
	μ	37.88	176.06	84.544
0.40	λ	67.34	176.06	128.248
	μ	37.88	176.06	91.355
0.45	λ	67.34	176.06	133.954
	μ	37.88	176.06	98.202
0.50	λ	67.34	176.06	139.302
	μ	37.88	176.06	105.088

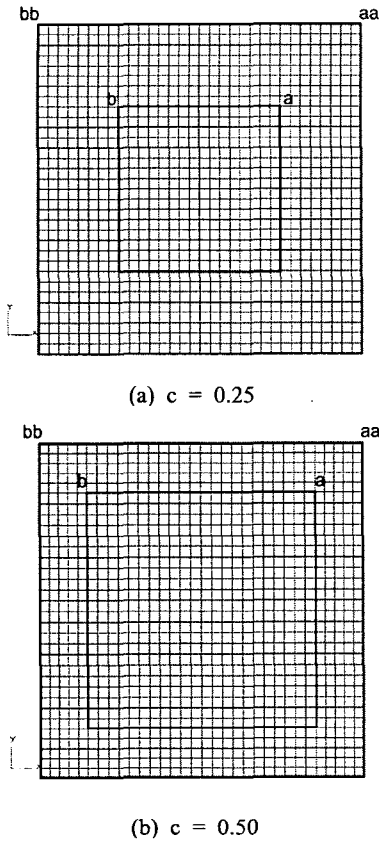


Fig. 7 A typical discretized model in the volume integral equation method for the unbounded effective material containing single isotropic square cylindrical inclusion in bounded isotropic matrix material

Fig. 8은 무한공간을 차지하는 균질화 물질(effective material)에 섬유 체적분율이 변함에 따라서 다른 면적을 갖는, 원형 단면을 갖는 실린더 형태의, 단일의 등방성 함유체 및 유한한 면적을 갖는 기지가 포함되어 있는 무한고체가 무한역 인장하중(σ_0)을 받을 때, 함유체와 기지 사이의 경계면에서의 균준화된 인장응력 성분($\frac{\sigma_x}{\sigma_x^0}$)을 나타낸다.

섬유 체적분율이 증가함에 따라, $\theta = 90^\circ$ 의 부근에서 인장응력의 크기가 가장 크게 감소하는 것을 알 수 있다. 섬유 체적분율을 고려하지 않은 결과(Single)와 섬유 체적분율을 고려한 결과($c = 0.25 \sim 0.50$) 사이에 현저한 차이가 발생하는 것을 알 수 있다.

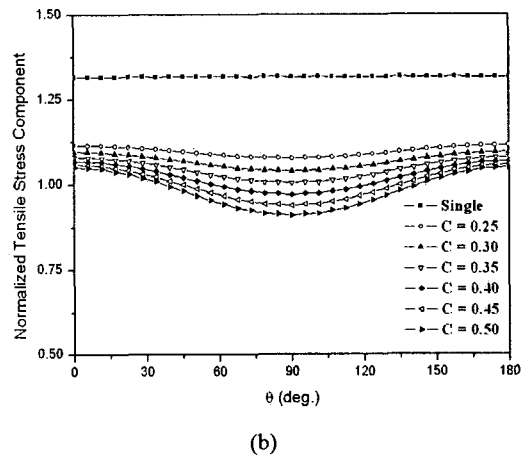
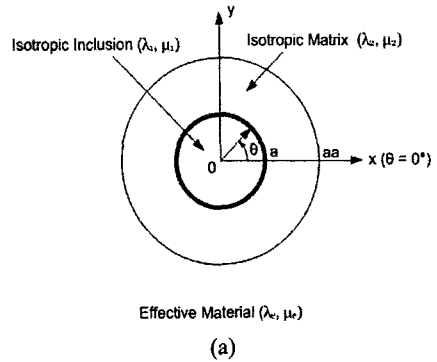


Fig. 8 Normalized tensile stress component (σ_x/σ_x^0) at the interface between the isotropic inclusion and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading(σ_0)

Fig. 9는 무한공간을 차지하는 균질화 물질(effective material)에 섬유 체적분율이 변함에 따라서 다른 면적을 갖는, 정사각형 단면을 갖는 실린더 형태의, 단일의 등방성 함유체 및 유한한 면적을 갖는 기지가 포함되어 있는 무한고체가 무한역 인장하중(σ_0)을 받을 때, 함유체와 기지 사이의 경계면에서의 균준화된 인장응력 성분($\frac{\sigma_x}{\sigma_x^0}$)을 나타낸다.

섬유 체적분율이 증가함에 따라, $45^\circ < \theta < 90^\circ$ 의 구간(a와 b 사이의 구간)에서 인장응력의 크기가 일정하게 감소하는 것을 알 수 있다. 섬유 체적분율을 고려하지 않은 결과(Single)와 섬유 체적분율을 고려한 결과($c = 0.25 \sim 0.50$) 사이에 많은 차이가 발

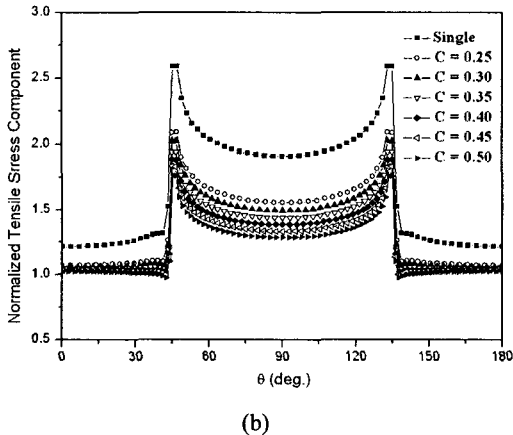
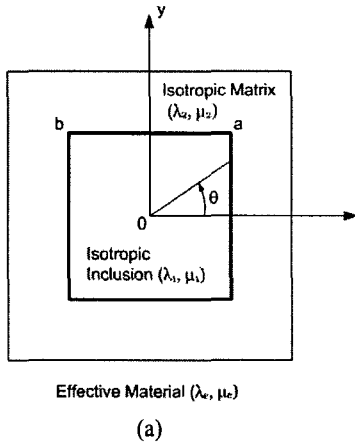


Fig. 9 Normalized tensile stress component (σ_x/σ_x^0) at the interface between the isotropic inclusion and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading (σ_x^0)

생하는 것을 알 수 있다.

복합재료의 섬유 체적분율을 고려하지 않은 해석 결과보다는 복합재료의 섬유 체적분율을 고려한, 단일의 함유체에 대한 해석 결과가 동일한 단일의 함유체가 다수의 함유체를 포함하는 실제의 복합재료에 포함되어 있는 경우에 대한 결과(최소한 함유체와 기지 사이의 경계면에서의 응력분포에 대한 경향)에 더 가깝게 접근할 것으로 판단된다.^(7,12,14)

추후에 발표될 논문에서, 실제의 복합재료에 포함되어 있는 단일의 함유체에 대한 해석 결과와 본 논문에서 적용한, 복합재료의 섬유 체적분율을 고려한, 단일의 함유체에 대한 해석 결과와의 구체적인 비교에 대하여 논의할 예정이다. 본

논문에서는 혼합법칙을 적용하여, 각각의 섬유 체적분율에 해당하는 균질화 물질 특성치를 계산하였다. 그러나, Generalized Self Consistent Scheme 등의 방법을 적용하여 균질화 물질 특성치를 구하는 방법을 개선하면, 본 논문에서 적용한, 복합재료의 섬유 체적분율을 고려한, 단일의 함유체에 대한 해석 결과(함유체와 기지 사이의 경계면에서의 응력분포)를 개선할 수 있을 것으로 판단된다.

4. 결 론

본 논문에서는, 체적 적분방정식법(VIEM; Volume integral equation method)이라는 새로운 수치해석 방법을 이용하여, 단일의 원형 또는 정사각형의 단면을 갖는 실린더 형태의 함유체를 포함하는 등방성 무한고체가 정적 무한역 하중을 받을 때, (1) 복합재료의 섬유 체적분율을 고려하지 않는 방법과 (2) 섬유 체적분율을 고려하는 방법을 적용하여, 함유체와 기지(matrix) 사이의 경계면에서의 응력분포를 구하였다. 두 가지 서로 다른 수치해석 결과들을 서로 비교해 보았으며, 복합재료의 섬유 체적분율을 고려하지 않은 해석 결과와 섬유 체적분율을 고려한 해석 결과 사이에 현저한 차이가 발생하는 것을 확인할 수 있었다.

복합재료의 섬유 체적분율을 고려하지 않은 해석 결과보다는 복합재료의 섬유 체적분율을 고려한, 단일의 함유체에 대한 해석 결과가 동일한 단일의 함유체가 다수의 함유체를 포함하는 실제의 복합재료에 포함되어 있는 경우에 대한 결과(최소한 함유체와 기지 사이의 경계면에서의 응력분포에 대한 경향)에 더 가깝게 접근할 것으로 판단된다.^(7,12,14)

후 기

이 논문은 2004학년도 홍익대학교 교내연구비에 의하여 지원되었습니다. 지원에 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Banerjee, P. K., 1993, *The Boundary Element Methods in Engineering*, McGraw-Hill, England.
- (2) Christensen, R. M., 1991, *Mechanics of Composite*

- Materials*, Krieger Pub. Co., Florida.
- (3) Hwu, C. and Yen, W. J., 1993 (Sep.), "On the Anisotropic Elastic Inclusions in Plane Elastostatics," *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 60, pp. 626~632.
- (4) Jones, R. M., 1999, *Mechanics of Composite Materials*, Taylor & Francis, Philadelphia.
- (5) Lee, J. K. and Mal, A. K., 1995, "A Volume Integral Equation Technique for Multiple Scattering Problems in Elastodynamics," *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 67, pp. 135~159.
- (6) Lee, J. K. and Mal, A. K., 1997 (Mar.), "A Volume Integral Equation Technique for Multiple Inclusion and Crack Interaction Problems," *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 64, pp. 23~31.
- (7) Lee, J. K., Han, H. D. and Mal, A., 2006, "Effects of Anisotropic Fiber Packing on Stresses in Composites," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 195, No. 33~36, pp. 4544~4556.
- (8) Lee, J. K., Choi, S. J. and Mal, A., 2001, "Stress Analysis of an Unbounded Elastic Solid with Orthotropic Inclusions and Voids Using a New Integral Equation Technique," *International Journal of Solids And Structures*, Vol. 38 (16), pp. 2789~2802.
- (9) Lee, K. J. and Mal, A. K., 1990, "A boundary element method for plane anisotropic elastic media," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, pp. 600~606.
- (10) Mal, A. K. and Knopoff, L., 1967, "Elastic Wave Velocities in Two Component Systems," *J. Inst. Math. Applics.*, Vol. 3, pp. 376~387.
- (11) Mal, A. K. and Singh, S. J., 1991, *Deformation of Elastic Solids*, Prentice Hall, New Jersey.
- (12) Yang, R. B., 2003, "A Dynamic Generalized Self-Consistent Model for Wave Propagation in Particulate Composites," *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 70, No. 4, pp. 575~582.
- (13) Yang, H. C. and Chou, Y. T., 1976 (Sep.), "Generalized Plane Problems of Elastic Inclusions in Anisotropic Solids1," *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 43, pp. 424~430.
- (14) Yang, R. B. and Mal, A. K., 1995, "The Effective Transverse Moduli of a Composite with Degraded Fiber-Matrix Interfaces," *International Journal of Engineering Science*, Vol. 33, No. 11, pp. 1623~1632.