

# 크랙을 가진 유체유동 파이프의 안정성 해석<sup>#</sup>

## Stability Analysis of Pipe Conveying Fluid with Crack

윤한익<sup>†</sup> · 손인수<sup>\*</sup> · 안태수<sup>\*\*</sup>

Han-Ik Yoon, In-Soo Son and Tae-Su Ahn

(2006년 9월 26일 접수 ; 2006년 12월 14일 심사완료)

Key Words : Flutter/Divergence Instability(플러터/좌굴 불안정), Pipe Conveying Fluid(유체이송 파이프), Stability(안정성), Open Crack(개구형크랙)

### ABSTRACT

In this paper, the dynamic stability of a cracked simply supported pipe conveying fluid is investigated. In addition, an analysis of the flutter and buckling instability of a cracked pipe conveying fluid due to the coupled mode(modes combined) is presented. Based on the Euler-Bernouli beam theory, the equation of motion can be constructed by using the Galerkin method. The crack section is represented by a local flexibility matrix connecting two undamaged pipe segments. The stiffness of the spring depends on the crack severity and the geometry of the cracked section. The crack is assumed to be in the first mode of fracture and to be always opened during the vibrations. This results of study will contribute to the safety test and a stability estimation of the structures of a cracked pipe conveying fluid.

### 1. 서 론

크랙과 같은 결함을 갖는 구조물은 동일한 하중이 작용하더라도 구조물의 자체 탄성에 의한 변형에너지 외에 크랙에 의해서 추가로 변형에너지가 존재하게 되고, 이 부가되는 에너지만큼 변형이 더 발생하게 된다. 구조손상의 하나인 이러한 크랙은 구조물의 진동특성과 안정성을 변화시켜 구조물의 불안정 및 파괴를 유발하는 주요 원인이 된다. 따라서 크랙을 가지는 구조물의 동적특성 및 안정성을 파악하는 것은 구조물의 안전진단 및 사고예방을 위해서 중요

한 공학적 문제라 할 수 있다. 또 파이프 속을 흐르는 유체는 파이프에 진동을 일으키는 원인이 되며, 유체의 속도가 어떤 임계값에 도달하면 그 진동이 불안정하여 파이프가 좌굴되기도 한다. 점성이 작은 유체의 분사력은 파이프의 끝단에 작용하는 집중충동력으로 작용하며 시스템의 진동 및 안정성 해석에 중요한 인자가 된다. 따라서 유체유체를 갖는 파이프에 크랙이 존재하는 시스템은 이러한 불안정을 일으키는 두 요소를 모두 포함하고 있으므로 이들의 연성관계에 의한 시스템의 동적특성 및 안정성을 파악하는 것은 매우 흥미로운 문제가 된다. 크랙이 구조물의 동적특성에 미치는 영향을 연구하기 위하여 구조물에서 단지 크랙이 존재하는 부분의 강성을 줄이는 방법<sup>(1)</sup>에서 출발하여, 최근에는 크랙에 의해서 부가되는 에너지를 파괴역학적 변수를 계산하여 유연행렬을 구하여 적용하는 해석방법을 주로 사용하고 있다<sup>(2)</sup>. 크랙과 충동력을 고려한 연구는 양단 자유 보를 티모센코 보 이론을 적용하여 크랙이 계의 동적 안정성에 미치는 영향에 대한 해석결과와 크랙

† 책임저자; 정회원, 동의대학교 기계공학과  
E-mail : hiyoon@deu.ac.kr

Tel : (051)890-1645, Fax : (051)890-2232

\* 정회원, 동의대학교 기계공학과

\*\* 동의대학교 대학원 기계공학과

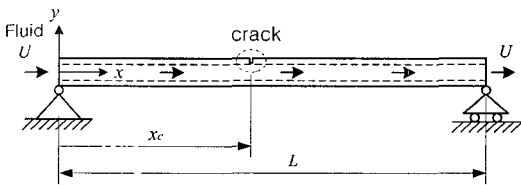
# 이 논문은 2006 추계 소음진동 학술대회에서 우수논문으로 추천되었음.

의 위치에 따라 계의 불안정을 일으키는 플러터 하중을 계산하는 연구결과들이 발표되고 있다<sup>(3,4)</sup>. 또, Liu 등<sup>(5)</sup>은 파이프 형태의 중공 축에 크랙이 존재하는 경우 크랙의 크기에 따른 보의 동적특성을 연구하였으며, 이동질량의 영향을 받는 유체유동 파이프의 진동특성 및 유체유동에 의한 송수관의 동적 안정성과 진동제어에 관해서도 많은 연구결과가 발표되어지고 있다<sup>(6-8)</sup>. 최근 Wang<sup>(9)</sup>은 크랙을 가진 외팔보가 압축 중동력을 받는 경우 이 외팔보의 플러터 불안정을 일으키는 임계하중에 미치는 크랙의 영향에 대해서 연구를 수행하였다.

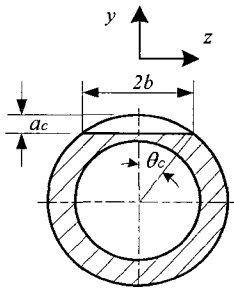
이 연구에서는 단순지지 유체유동 파이프에 크랙이 존재할 때 유체유체가 파이프의 횡방향 고유진동수 및 좌굴/플러터 임계유속에 미치는 영향에 대하여 연구하였다. 특히 개구형 크랙이 단순지지 파이프의 연성모드에 의하여 발생하는 플러터 불안정에 미치는 영향 및 유체의 질량비에 따른 단순지지 파이프의 임계유속의 변화에 대하여 상세히 연구하였다. 파이프의 해석은 오일러-베르누이 보 이론을 적용하였으며, 크랙은 비진전 개구형 크랙(open crack)이라 가정하였다.

## 2. 시스템 모델링

Fig. 1은 이 연구에서 해석예제로 가정한 크랙을



(a) Cracked pipe conveying fluid



(b) Cross section of pipe

Fig. 1 Geometry of analytical model

가진 유체유동 파이프의 개략도를 나타낸 것이다. 여기서  $U$ 와  $L$ 은 각각 유체유동의 속도와 파이프의 전체 길이를 나타낸다. 또  $x_c$ ,  $2b$ , 그리고  $\theta_c$ 는 각각 단순지지 파이프 상에 존재하는 크랙의 위치, 크랙의  $z$ 축방향의 길이, 그리고 전체 크랙의 반각(half-angle)을 의미한다.

### 2.1. 크랙 모델링

선형 탄성구간에서 크랙으로 인한 추가적인 변형에너지(additional strain energy)는 응력확대계수의 항에서 유도할 수 있는 유연행렬의 형식으로 구할 수 있다. 같은 하중이 작용하는 구조물에서도 크랙이 존재하는 경우에 구조물의 자체 탄성 변형에너지 외에 크랙에 의한 변형에너지가 존재하고 이 부가되는 에너지만큼 추가적인 변형이 발생하게 된다. Castigliano의 정리에 의하여 크랙에 의해서 부가되는 변형에너지를 다음과 같이 유연행렬을 이용하여 표현할 수 있다.

$$C_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \left[ \int_{-b}^b \int_0^{a_c} J \, dy \, dz \right] \quad (1)$$

여기서  $P$ 는 각 방향에서의 힘,  $J$ 는 변형을 에너지 밀도함수로서 제 1 파괴모드에 대하여 다음과 같다.

$$J = \frac{1}{E^*} (K_{IM} + K_{IP})^2 \quad (2)$$

여기서  $K_{IM}$ 과  $K_{IP}$ 는 각각 힘과 모멘트에 의한 응력확대계수(stress intensity factor)이다<sup>(5)</sup>. 해석에 필요한 회전 스프링 상수( $K_R$ )는 식 (1)의 역수를 취함으로써 얻을 수 있다. 또 크랙위치에서는 다음식의 기울기 변화, 변위, 모멘트 및 전단력의 연속조건을 만족해야 한다.

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_2(x_c)}{dx} - \frac{d\phi_1(x_c)}{dx} &= \frac{EI}{K_R} \frac{d^2\phi_2(x_c)}{dx^2} \\ \phi_1(x_c) &= \phi_2(x_c), \quad \frac{d^2\phi_1(x_c)}{dx^2} = \frac{d^2\phi_2(x_c)}{dx^2} \\ \frac{d^3\phi_1(x_c)}{dx^3} &= \frac{d^3\phi_2(x_c)}{dx^3} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서  $E$ 는 영계수, 그리고  $I$ 는 파이프 단면의 질량관성 모멘트를 나타내며,  $K_R$ 은 회전 스프링상수

를 표현하고 있다. 또  $\phi_1(x)$  와  $\phi_2(x)$ 는 크랙에 의해 분할되는 단순지지 파이프의 각 분할구간의 고유함수로서 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= A_1 \cos(\beta_i x) + A_2 \sin(\beta_i x) + A_3 \cosh(\beta_i x) \\ &\quad + A_4 \sinh(\beta_i x) \quad ; (0 \leq x \leq x_c), \\ \phi_2(x) &= B_1 \cos(\beta_i x) + B_2 \sin(\beta_i x) + B_3 \cosh(\beta_i x) \\ &\quad + B_4 \sinh(\beta_i x) \quad ; (x_c \leq x \leq L) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $i$ 는 모드의 수를 나타낸다. 또 식 (4)의 미지수들은 크랙 위치에서의 연속조건인 식 (3)과 다음 식 (5)의 단순 지지보의 경계조건을 적용하여 각각 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{for } x=0, \quad w(x) &= 0 \text{ and } EI \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} = 0, \\ \text{for } x=L, \quad w(x) &= 0 \text{ and } EI \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

### 2.2 계의 운동방정식

유체유동을 갖는 파이프의 기본 운동방정식은 다음과 같이 구할 수 있다<sup>(8)</sup>.

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + M^2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \\ + 2M \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x \partial t} + m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

여기서  $M$ 과  $m$ 은 각각 유체 및 파이프의 단위길 이당 질량이며,  $w(x,t)$ 는 파이프의 횡변위이다.

식 (6)의 운동방정식을 무차원화하기 위하여 다음과 같은 무차원 매개변수를 정의하였다.

$$\begin{aligned} \tau &= \sqrt{\frac{EI}{M+m}} \frac{t}{L^2}, \quad u = \sqrt{\frac{M}{EI}} LU, \quad \beta = \frac{M}{M+m}, \\ \eta &= \frac{w}{L}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \xi_c = \frac{x_c}{L}, \\ \theta_{c*} &= \frac{\theta_c}{\pi}, \quad k_R = \frac{K_R L}{EI} \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)의 무차원 매개변수를 이용하여 계의 무차원 운동방정식을 크랙의 각 분할구간에 따라 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \eta_1'''' + u^2 \eta_1'' + 2u\beta^{1/2} \dot{\eta}_1' \\ + \ddot{\eta}_1 = 0 \quad (0 \leq \xi \leq \xi_c), \\ \eta_2'''' + u^2 \eta_2'' + 2u\beta^{1/2} \dot{\eta}_2' \\ + \ddot{\eta}_2 = 0 \quad (\xi_c \leq \xi \leq 1) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 (')과 (̇)는 각각 무차원 변위  $\xi$ 와 시간  $\tau$ 에 대한 미분이다. 또 파이프의 무차원 횡변위  $\eta_{1,2}$ 는 일반화 좌표( $q_i$ )와 식 (4)에서 구한 단순지지 파이프의 고유함수의 조합으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \eta_1(\xi, \tau) &= \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{1i}(\xi) q_i(\tau), \\ \eta_2(\xi, \tau) &= \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{2i}(\xi) q_i(\tau) \end{aligned} \quad (9)$$

따라서 크랙을 가진 단순지지 파이프의 무차원 운동방정식은 다음과 같이 행렬형태로 나타낼 수 있다.

$$[M] \ddot{q} + [C] \dot{q} + [K] q = 0 \quad (10)$$

여기서  $q = q_0 \exp(i\omega\tau)$  ( $i = \sqrt{-1}$ )이다. 식 (10)을 이용하여 단순지지 파이프의 고유진동수  $\omega$ 를 계산할 수 있으며, 이 연구에서는 고유진동수의 수렴성을 위하여 8차 모드( $i=8$ )까지 고려하여 계의 고유진동수를 구하였다.

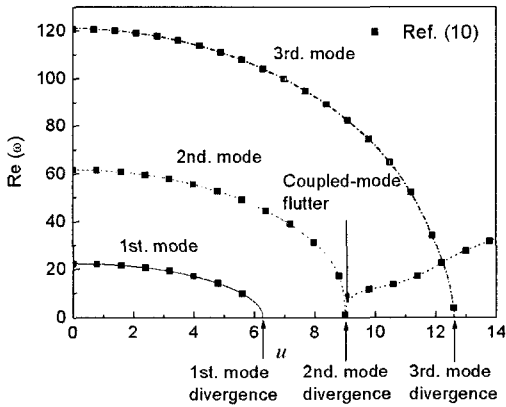
### 3. 수치해석결과 및 고찰

이 연구에서는 수치해석에서 유도된 운동방정식을 이용하여 유속의 임계값(Eluer의 좌굴 임계유속 / 플러터 임계유속) 및 크랙의 영향에 의한 파이프의 고유진동수 변화를 수치해석을 통해 비교, 고찰하였다. 수치해석은 Matlab(6.1) 및 Mathematica(5.0)을 이용하여 계산을 수행하였다.

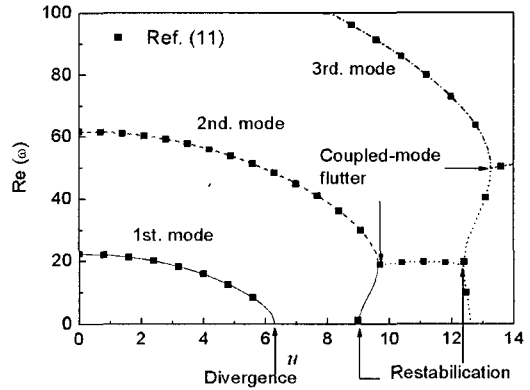
수치해석 예제에 사용한 단순지지 파이프의 길이는 1m, 영계수  $E=216$  GPa, 그리고 단순지지 파이프의 밀도는  $7850 \text{ kg/m}^3$ 으로 하였다. 이 연구에서는 크랙의 크기에 의한 영향을 중심으로 연구하였기 때문에 크랙의 위치  $\xi_c=0.5$ , 즉 크랙은 항상 파이프의 한 가운데에 존재한다고 가정하였다. Fig. 2는 이 연구의 수치해석의 타당성을 검토하기 위하여 크랙이 없는 경우 유체유동을 갖는 양단고정 파

이프의 임계유속 값을 타 연구결과와 서로 비교한 것이다. Fig. 2(a)는 유체의 질량비  $\beta = 0.1$  일 때,

그리고 Fig. 2(b)는  $\beta = 0.8$ 인 경우 파이프의 고유 진동수 변화를 3차 진동모드까지 나타낸 것이다.

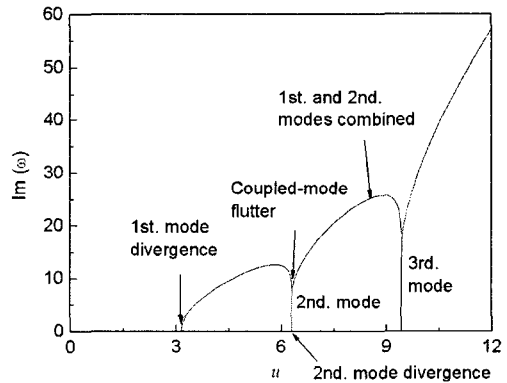
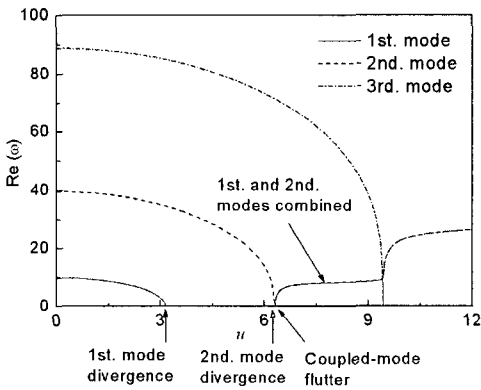


(a)  $\beta = 0.1$



(b)  $\beta = 0.8$

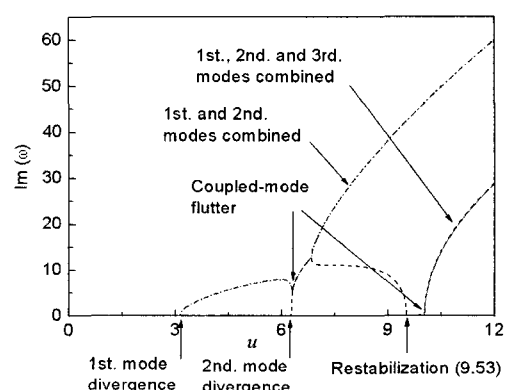
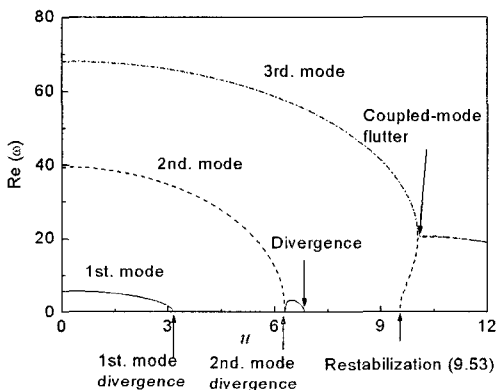
Fig. 2 Real component of dimensionless frequency of conveying fluid clamped-clamped pipe without crack



(a) Real component of dimensionless frequency

(b) Imaginary component of dimensionless frequency

Fig. 3 Natural frequency of uncracked simply supported pipe conveying fluid ( $\beta = 0.2$ )



(a) Real component of dimensionless frequency

(b) Imaginary component of dimensionless frequency

Fig. 4 Natural frequency of cracked simply supported pipe conveying fluid ( $\theta^* = 20\%$ ,  $\beta = 0.2$ )

Fig. 2에서 확인할 수 있는 것처럼 이 연구의 수치해석 결과와 참고문헌 (10), (11)의 연구결과가 완전히 일치하는 것을 볼 수 있다. 따라서 이 연구의 수치해석 과정은 타당하다고 판단되어진다.

Fig. 3은 크랙이 없고, 질량비  $\beta = 0.2$ 로 일정한 경우 유속의 변화에 따른 단순지지 파이프의 고유진동수 변화를 나타낸 것이다. Fig. 3(a)는 고유진동수의 실수부, 그리고 Fig. 2(b)는 허수부의 결과를 도시하고 있다. 1, 2차 모드에서 파이프에 좌굴형 불안정을 유발하는 임계유속은 각각  $\pi$ ,  $2\pi$ 이며, 무차원 유속이 약 3.15에서 1, 2차 모드연성에 의한 플러터형 불안정이 일어남을 확인할 수 있다.

Fig. 4는  $\theta_c^* = 20\%$ 의 크랙이 파이프의 중간에 위치하고  $\beta = 0.2$ 인 경우 무차원 유속에 따른 단순지지 파이프의 고유진동수 변화를 표현한 것이다. 크랙이 없는 경우(Fig. 3 참조)와 마찬가지로 1, 2차

모드의 연성에 의하여 파이프는 플러터형 불안정이 일어난다. 하지만 무차원 유속이 약 6.31에서 발생한 연성모드 플러터현상은 유속이 약 6.84에서 다시 발산형 불안정으로 변화함을 알 수 있다. 또 유속이 9.53에서 유체유동 파이프가 다시 안정화되고 이후 무차원 유속이 약 10.06에서 1, 2, 그리고 3차 모드들의 연성에 의한 플러터형 불안정이 일어난다. 크랙이 존재하지 않은 경우와는 달리 1, 2, 그리고 3차의 모드연성에 의해서 발생하는 플러터형 불안정이 일어나기 전에 좁은 영역의 재 안정화되는 영역이 존재함을 발견할 수 있다.

Fig. 5(a)와 (b)는 무차원 질량비가 각각  $\beta = 0.2$ ,  $\beta = 0.4$ 의 값을 가지는 경우에 크랙의 영향에 의한 유체유동 단순지지 파이프의 고유진동수 변화를 8차 모드까지 계산하여 그 결과를 3차 모드까지 도시한 것이다. Fig. 5(a)를 살펴보면, 전 모드에

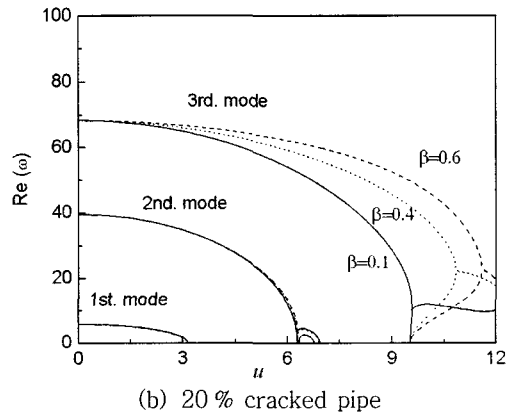
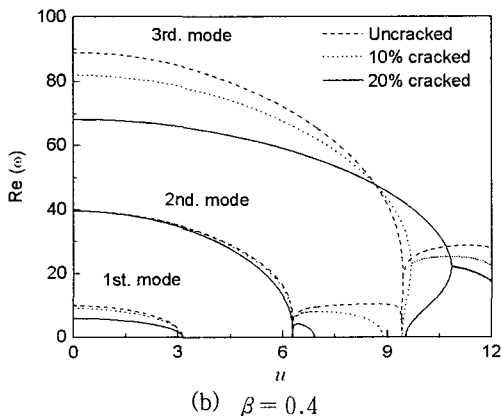
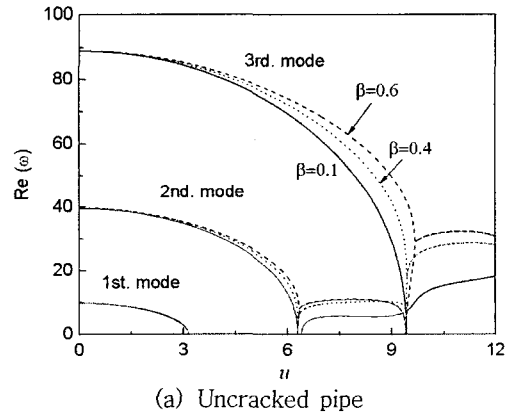
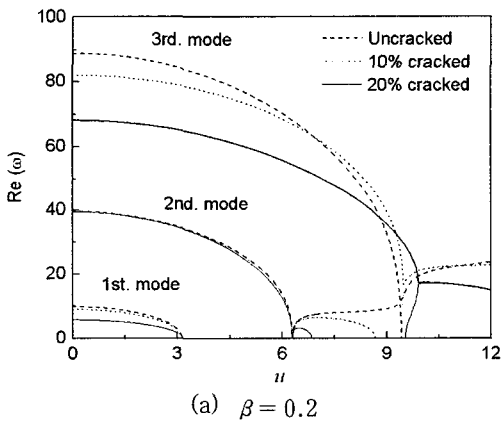


Fig. 5 Natural frequency of cracked simply supported pipe conveying fluid (1<sup>st</sup>, 2<sup>nd</sup> and 3<sup>rd</sup> modes)

Fig. 6 Natural frequency of cracked simply supported pipe conveying fluid for real component

걸쳐서 크랙의 크기가 증가할수록 파이프의 고유진동수가 감소하는 경향을 보이고 있다. 그러나 3차 진동모드에서는 유속이 일정 값 이상으로 커지는 경우 크랙의 크기와 고유진동수는 서로 비례적인 경향을 보이고 있다. 크랙이 클수록 파이프가 재 안정화되는 유속과 플러터 불안정을 일으키는 유속이 미소하나마 증가되어짐을 알 수 있다. 또 시스템의 전체 진동모드에서 크랙의 영향에 관계없이 파이프의 임계유속은 1차 진동모드에서는  $\pi$ , 2차 모드에서는  $2\pi$ 로 항상 일정함을 알 수 있다. 이는 다음 식 (11)로 계산되는 임계유속의 값이 크랙의 영향 ( $\xi_c, k_R$ )에 무관하기 때문이다.

$$k_R \sin(\alpha) [\cos^2(\xi_c \alpha) + \sin^2(\xi_c \alpha)] = 0 \quad (11)$$

1, 2차 모드연성에 의해 발생하는 플러터형 불안정 현상은 크랙의 영향으로 인하여 좌굴형 불안정 형태로 변화되어짐을 확인할 수 있으며, 크랙의 영향으로 인하여 파이프가 재 안정화되는 유속의 영역이 발생함을 알 수 있다.

Fig. 6은 질량비  $\beta$ 의 크기에 따른 파이프의 고유진동수 변화를 크랙이 없는 경우와 크랙의 크기가 20%인 경우에 대해서 각각 도시하였다. 전반적으로 크랙의 영향에 관계없이 질량비가 증가할수록 유체유동 파이프의 고유진동수가 증가한다<sup>(8)</sup>. 먼저 Fig. 6(a)의 크랙이 없는 경우를 살펴보면, 무차원 질량비가 0.1일 때 파이프는 좌굴형 불안정이 일어난 후 다시 플러터형 불안정 현상이 나타나며, 질량비가 0.4와 0.6인 경우는 플러터형 불안정이 일어난 후 좌굴형 불안정 현상이 발생함을 알 수 있다. 또한 Fig. 6(a), (b)에서 유체의 질량은 크랙의 영향에 관계없이 파이프의 좌굴 불안정을 일으키는 임계유속 값에는 영향을 주지 않으나, 플러터 불안정을 일으키는 유속을 증가시키고 있음을 알 수 있다. 특히 3차 모드에서, 질량이 증가할수록 파이프의 재 안정화되는 유속의 영역이 넓어짐을 알 수 있다. 크랙이 없는 경우 질량비 0.4와 0.6일 때 파이프가 재 안정화되는 유속의 영역은 질량비가 0.6인 경우 약 16배 정도 증가하였으며, Fig. 6(b)의 크랙이 존재하는 경우는 파이프가 재 안정화되는 유속의 영역이 약 1.6배 정도 증가하였다. 또  $\beta = 0.4$ 로 동일한 질량비를 가지는 경우 크랙이 없는 경우와 크랙의 크기가 20%인 파이프의 경우 재 안정화 영역은 크랙

이 존재하는 경우에 약 9배 정도 증가되어짐을 볼 수 있다.

#### 4. 결 론

단순지지 보 형태의 크랙을 가진 파이프에 유체가 작용하는 경우 파이프의 안정성, 즉 임계유속의 변화 및 파이프의 고유진동수 변화에 미치는 크랙의 영향에 대하여 수치해석 하였다. 이 연구에서는 크랙의 위치가 항상 단순지지 파이프의 중앙에 위치한다고 가정하여 연구결과를 도출하였다. 유동유체가 작용하는 단순지지 파이프에 크랙이 존재하는 경우, 파이프의 좌굴형 불안정을 일으키는 1, 2차 모드의 임계유속은 크랙의 크기 및 위치에 관계없이 항상 일정하였다. 또한 크랙의 존재는 파이프를 재 안정화시키는 유속의 영역을 유발하며, 크랙의 크기가 증가할수록 파이프를 재 안정화시키는 유속의 범위가 넓어짐을 알 수 있다. 유체의 질량은 크랙의 영향에 관계없이 파이프의 좌굴형 불안정을 일으키는 임계유속 값에는 영향을 주지 않으나, 플러터 불안정을 일으키는 임계유속을 증가시키고 있음을 알 수 있다.

#### 참 고 문 헌

- (1) Datta, P. K. and Lal, M. K., 1992, "Parametric Instability of a Non-prismatic Bar with Localized Damage Subjected to an Intermediate Periodic Axial Load", *Computer and Structures*, Vol. 4, No. 6, pp. 1199~1202.
- (2) Ruotolo, R., Surace, C., Crespo, P. and Storer, D., 1996, "Harmonic Analysis of the Vibrations of a Cantilevered Beam with a Closing Crack", *Computers and Structures*, Vol. 61, No. 6, pp. 1057~1074.
- (3) Takahashi, I., 1997, "Vibration and Stability of a Cracked Shaft Simultaneously Subjected to a Follower Force with an Axial Force", *Int. Journal of Solids and Structures*, Vol. 35, No. 23, pp. 3071~3080.
- (4) Takahashi, I., 1999, "Vibration and Stability of Non-uniform Cracked Timoshenko Beam

Subjected to Follower Force” , Computers and Structures, 71, pp. 585~591.

(5) Liu, D., Gurgenci, H. and Veidt, M., 2003, “Crack Detection in Hollow Section Structures Through Coupled Response Measurements” , Journal of Sound and Vibration, Vol. 261, pp. 17~29.

(6) Ryu, B. J., Jung, S. H. and Kang, Y. C., 1998, “A Study on the Dynamic Stability and Vibration Control of Cantilevered Pipes Conveying Fluid” , Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 8, No. 1, pp. 171~179.

(7) Yoon, H. I. and Son, I. S., 2002, “Dynamic Characteristics of Cantilever Pipe Conveying Fluid with the Moving Masses” , Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration

Engineering, Vol. 12, No. 7, pp. 550~556.

(8) Païdoussis, M. P., 1998, Fluid-structure Interactions (Volume 1), Academic Press.

(9) Wang, Q., 2004, “A Comprehensive Stability Analysis of a Cracked Beam Subjected to Follower Compression” , International Journal of Solids and Structures, Vol. 41, pp. 4875~4888.

(10) Païdoussis, M. P., 1975, “Flutter of Conservative Systems of Pipes Conveying Incompressible Fluid” , Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 17, pp. 19~25.

(11) Chen, C. C., 1987, Flow-induced Vibration of Circular Cylindrical Structures, Washington: Hemisphere.