■ 論 文 ■

동적체계기반 확률적 사용자균형 통행배정모형

Elastic Demand Stochastic User Equilibrium Assignment Based on a Dynamic System

임 용 택
(전남대 교통물류학부 부교수)

목 차

Ⅰ. 서론
Ⅱ. 기존 확률적 통행배정모형 검토
1. 기존연구
2. 확률적 사용자균형
Ⅲ. 동적체계기반 확률적 통행배정모형
1. Model formulation
2. 풀이 알고리듬
Ⅳ. 모형의 평가
1. 고정수요인 경우
2. 가변수요인 경우
Ⅳ. 결론 및 향후연구 과제
참고문헌

Key Words : 동적체계, 확률적 사용자균형, 가변수요, 로짓모형, Lyapunov 함수
dynamic system, stochastic user equilibrium, elastic demand, logit model, Lyapunov function

요 약

본 연구에서는 가변수요를 고려한 확률적 사용자균형 통행배정모형을 제시한다. 교통망에서 수요와 공급간의 균형을 가정할 경우, 통행비용의 함수인 가변수요는 통행저항함수(공급함수)와 함께 균형상태로 수렴하며, 이때 확률적 통행배정모형은 통행자들간의 경로인지 통행비용이 동일해지는 확률적 사용자균형상태에 도달하게 된다. 본 연구에서 제시하는 확률적 사용자균형모형은 기존 연구들과는 달리 동적체계(dynamic system)를 기초로 개발된다. 동적체계는 시간의 흐름에 따라 하나의 상태가 다음 상태로 변화하는 과정을 표현하는 수리적인 방법으로 시간의 변화에 따라 그 상태가 변하는 여러 분야에 적용이 가능한데, 주로 제어공학(control engineering)분야에서 활용되어 왔다. 동적 체계의 개념을 도입하면, 기존 모형들과는 달리 쉽게 모형화(formulation)할 수 있으며 풀이과정(solution algorithm)도 간단하다는 장점이 있다. 본 연구에서도 동적체계를 이용하여 확률적 사용자균형 통행배정(user equilibrium traffic assignment)모형을 제시하고 제시된 모형이 안정적인 해(stable solution)로 수렴한다는 것을 Lyapunov함수를 통하여 증명한다. 또한, 예제 교통망을 통하여 여러가지 의미있는 결과를 도출한다.

This paper presents an elastic demand stochastic user equilibrium traffic assignment that could not be easily tackled. The elastic demand coupled with a travel performance function is known to converge to a supply-demand equilibrium, where a stochastic user equilibrium (SUE) is obtained. SUE is the state in which all equivalent path costs are equal, and thus no user can reduce his perceived travel cost.

The elastic demand SUE traffic assignment can be formulated based on a dynamic system, which is a means of describing how one state develops into another state over the course of time. Traditionally it has been used for control engineering, but it is also useful for transportation problems in that it can describe time-variant traffic movements. Through the Lyapunov Function Theorem, the author proves that the model has a stable solution and confirms it with a numerical example.

Ⅰ. 서론

가변수요 확률적 통행배정모형(elastic demand stochastic user equilibrium traffic assignment)은 통행수요(travel demand)와 공급(supply)함수간의 균형(equilibrium)을 가정하는 모형이다. 일반적으로 교통망 분석시 기본적인 전제로 이런 균형 상태를 가정하는데, 이렇게 함으로서 쉽게 수리적인 형태로 문제를 정형화할 수 있고, 또 기존에 제시된 여러 최적화기법을 이용하여 쉽게 문제를 풀 수 있기 때문이다. 통행(trip)은 도시 활동을 영위하기 위해 발생하는 부수적인 수요(derived demand)로 도시 활동의 강도에 따라 통행수요는 다르게 된다. 반면 이를 수용하고 처리할 수 있는 교통시설을 일반적으로 한정되어 있어 수요와 공급간의 균형이 이루어지지 않으면 교통혼잡과 같은 교통문제가 발생하게 된다. 따라서 교통망 분석시 교통수요와 시설 공급간의 균형이 중요시되고 있다.

반면, 교통시설을 이용하는 통행자간에도 균형이 존재하는데, 이를 사용자균형(user equilibrium, UE)이라 한다. 사용자균형(UE)은 Wardrop(1952)이 제시된 경로선택 원리로 통행자들이 자신의 경로를 선택할 때 궁극적으로 자신의 통행비용을 더 이상 줄일 수 없는 균형상태 - 통행자가 실제로 선택한 모든 경로의 통행시간은 모두 동일하며, 아직 사용되지 않은 어떤 경로의 통행시간보다 크지 않다. - 에 도달한다는 개념이다. 이런 Wardrop의 원리는 모든 통행자가 교통상황에 대한 완전한 정보를 갖고 있다고 가정한다. 그러나 실제대부분의 통행자는 완전한 정보를 갖지 못하기 때문에 인지통행비용(perceived travel time)에 대한 확률적 개념을 도입한 확률적 사용자 균형(stochastic user equilibrium, SUE) 통행배정모형이 개발되었다 (Daganzo & Sheffi,1977 ; Sheffi & Powell,1982; Fisk,1980). 따라서, 개인이 갖고 있는 인지오차를 모형에 고려한다는 측면에서 확률적 통행배정모형이 좀 더 현실적이라 할 수 있다.

본 연구에서는 가변수요(elastic or vairable demand)를 고려한 확률적 사용자균형 통행배정모형을 제시한다. 앞에서 기술했듯이 가변수요는 교통망상의 통행시간의 함수로 통행배정모형과 같은 공급모형으로 부터 산출된 통행량의 함수인 통행저항함수(공급함수)와 균형상태로 수렴하게 된다. 이때 확률적 통행배정모형은 통행자들간의 경로인지 통행비용이 동일해지는 확률적 사용자균형상태에 도달하게 된다. 본 연구에서 제시하는 확률적 사용자균형모형은 기존 연구들과는 달리 동적체계(dynamic system)를 기초로 개발된다. 동적체계는 시간의 흐름에 따라 하나의 상태가 다음 상태로 변화하는 과정을 표현하는 수리적인 방법으로 시간의 흐름을 연속형(continuous)으로 간주하느냐 이산형(discrete)으로 간주하느냐에 따라 연속형 동적체계(continuous dynamic system)와 이산형 동적체계(discrete dynamic system)로 구분된다. 이런 동적체계는 시간의 변화에 따라 그 상태가 변화는 여러 분야에 적용이 가능한데, 주로 제어공학(control engineering) 분야에서 활용되어 왔다. 교통 역시, 시간이 지남에 따라 교통상태가 바뀌기 때문에 동적체계를 이용하면 교통상황을 쉽게 표현할 수 있으나 이에 대한 연구는 현재 극히 미흡한 실정이다. 관련연구로는 Smith(1984)와 임용택(2006) 등이 있다. 동적 체계의 개념을 도입하면, 기존 모형들과는 달리 쉽게 모형화(formulation)할 수 있으며 풀이과정(solution algorithm)도 간단하다는 장점이 있다. 본 연구에서도 동적체계를 이용하여 확률적 사용자균형 통행배정(user equilibrium traffic assignment)모형을 제시하고 제시된 모형이 안정적인 해(stable solution)로 수렴한다는 것을 Lyapunov함수를 통하여 증명한다.

다음 절에서는 지금까지 제시된 확률적 통행배정모형들과 균형상태에 대하여 간단히 살펴보고 제Ⅲ절에서 본 연구에서 새롭게 제시하는 동적체계기반 확률적 통행배정모형과 풀이과정을 기술하며 제Ⅳ절에서는 예제 교통망을 대상으로 모형을 평가코자 한다.

Ⅱ. 기존 확률적 통행배정모형 검토

1. 기존연구

확률적 사용자균형 통행배정모형(stochastic user equilibrium assignment)은 확정적 통행배정모형(deterministic user equilibrium assignment)이 갖는 비현실적인 가정들을 완화시킬 수 있다는 장점 때문에 이에 대한 연구들이 활발히 진행되어 왔다. 즉, 모든 통행자들은 동일한 통행특성을 갖고 있으며, 완벽한 통행정보를 갖는 상태에서 경로를 선택한다는 경직된 가정을 완화시킬 수 있기 때문이다. 확률적 통행배정에서는 확정적 모형과는 달리 확률적 오차항, 즉 각 사용자간의 인지비용차이가 링크의 통행비용에 추가되며, 각 사용자들은 자신의 인지 통행비용이 최소화되도록 경로를 선택한다. 따라서 확률적 사용자균형(stochastic user equilibrium, SUE) 상태에서는 어

떤 사용자도 임의로 자신의 경로를 변경해 자신의 인지 통행비용(perceived travel cost)을 감소시키지 못하는 상태로 정의될 수 있다.

확률적 사용자 균형모형은 인지오차항을 어떤 확률분포로 가정하느냐에 따라 크게 프로빗(probit)모형과 로짓(logit)모형으로 구분된다. 프로빗모형은 확률분포를 정규분포(normal distribution)로 가정함에 따라 로짓모형에 비해 이론적 타당성이 있으나, 계산상의 어려움과 모든 선택 가능한 경로를 열거해야하는 번거로움으로 주로 로짓모형이 현실에 적용되어 왔다. 로짓모형은 오차항이 검벨분포(Gumbel distribution)를 따른다고 가정한 모형으로 이 역시 경로간의 중첩에 따른 상관성(correlation)을 적절히 고려하지 못하는 비관련대안간의 독립성(independence of irrelevant alternatives, IIA)문제가 있으나, 통행선택행위를 쉽게 구현할 수 있다는 장점이 있다.

그러나 현재까지 개발된 로짓기반 통행배정모형에는 몇 가지 문제점을 갖고 있다. 먼저 교통망 부하기법(network loading method)측면에서 살펴보면, 현재까지의 주된 연구 대상은 모든 가능경로의 열거(all feasible path enumeration)를 피하면서 확률적 사용자균형상태(SUE)로의 수렴속도를 높일 수 있는 알고리듬을 개발하는 것이 주된 관심사였다. Dial(1971)의 STOCH 알고리듬이 대표적인 로짓 부하 알고리듬으로, STOCH 알고리듬은 모든 경로를 대상으로 하지 않고 합리적인 경로집합(reasonable path set)으로 선택대안수를 축소한 후, 링크기반(link-based)으로 통행량을 부하하는 기법이다. 따라서, 모든 경로를 열거하는 경우보다 수렴속도를 높일 수 있다는 장점을 갖고 있다. 그러나, STOCH 알고리듬은 매 반복과정에서 합리적인 경로집합으로 선택대안수(즉, 선택경로수)를 제한하기 때문에 교통량에 종속적인 통행비용이 변하는 경우, 이를 선택대안의 변화로 반영하지 못한다는 단점을 갖고 있다(Maher, 1998; Akamatsu, 1997). 또한, 순환경로(loop path)를 허용하지 못한다는 한계도 갖고 있다. 이런 문제점을 해결하기 위하여 Bell(1995), Akamatsu(1996)는 모든 가능대안을 허용하는 알고리듬을 제안한 바 있다.

로짓 통행배정모형을 포함한 확률적 균형모형의 또 다른 문제점은, 비록 사용자 균형상태를 보장하는 수리적인 모형식을 제시하고 있지만, 개발된 대부분의 알고리듬들이 모형식의 목적함수(objective function)를 이용하지 않고 휴리스틱(heuristic)하게 수렴해를 찾는다는 것이다. 즉, 수렴해에 신속히 접근하기 위해서는 목적함수를 이용하여 하강방향(descent direction)과 최적 이동크기(optimal move size)를 찾아야 하는데, 대부분 미리 정해진 이동크기(predetermined move size)를 사용한다는 점이다. 이는 목적함수를 최소화시키는 하강방향(descent direction)과 최적 이동크기를 찾기 위한 목적함수의 평가(evaluation)가 쉽지 않기 때문이다(Sheffi, 1985). 따라서, 대부분의 경우 이동크기를 미리 정하는 연속평균법(method of successive averages, MSA)이 주로 사용되고 있는데, MSA는 수렴속도가 떨어지는 문제를 갖고 있다. 이를 극복하기 위하여 최근 Maher et al.(1997), Maher(1998)는 목적함수를 이용하여 이동크기를 결정하는 방법을 제시하였다. 그러나 이 방법은 MSA보다는 빠른 수렴속도를 보이지만 이동크기를 내삽법(interpolation)으로 결정하기 때문에 최적이동크기를 찾는다고 보기 어려우며, 목적함수를 미분해야하는 어려움을 갖고 있다. 최근 임용택(2003)은 이를 극복하기 위하여 2가지 새로운 확률적 통행배정모형을 제시하고 MSA방법과 비교하였다. 첫번째 모형은 고정점 이론(fixed point theory)에 따라 직접적으로 로짓모형을 반복해서 배정하는 방법이며, 두번째 모형은 수리최소화문제로 최적해를 구하는 방법이다.

2. 확률적 사용자균형

확률적 사용자균형(stochastic user equilibrium, SUE)모형을 구성하기 위해서는 먼저 확률적 사용자 균형상태를 정의할 필요가 있다. Sheffi(1985)는 SUE 상태를 다음과 같이 정의하였다.

〔확률적 사용자 균형상태(stochastic user equilibrium, SUE)〕

어떤 통행자도 일방적으로 경로를 변경하여 자신의 인지 통행시간을 감소시킬 수 없는 상태를 확률적 사용자균형이라 하며, 이때, 특정 경로의 선택확률은 주어진 기종점간에 고려대상이 되는 경로들중 해당 경로의 인지 통행비용이 가장 작을 확률과 동일하다.

위 확률적 사용자 균형상태를 로짓모형을 이용하여 수식으로 표현하면 다음과 같다(임용택, 2003 참조). 임의의 두개의 경로 k, p에 대하여,

$$c_k^{rs}+\frac{1}{\theta}ln(f_k^{rs})=c_p^{rs}+\frac{1}{\theta}ln(f_p^{rs})=C^{rs*} \qquad (1)$$

여기서, c_k^{rs}는 기종점쌍 rs를 잇는 임의의 경로 k의 통행비용이며, f_k^{rs}는 그때 경로k의 통행량이다. 식(1)은 기종점쌍 rs를 잇는 임의의 경로 k와 p에 경로 교통량 f_k^{rs}와 f_p^{rs}가 존재하면, 이때 동일한 통행비용(C^{rs*})이 소요됨을 의미한다. 즉, 이는 각 경로간 확률적 사용자균형상태(SUE)를 나타낸다. 따라서, C^{rs*}는 기종점rs간 확률적 균형 경로통행비용이다. 확정적 사용자균형조건과 비교해보면, 확정적 경로비용(c_k^{rs})에 확률적 비용항이 추가되어 있음을 알 수 있다. 여기서, 우리는 확정적 균형모형과 비교하여 $C_k^{rs}=c_k^{rs}+\frac{1}{\theta}ln(f_k^{rs})$를 동등 경로통행비용(equivalent path cost)으로 정의한다. 따라서 확률적 사용자균형상태란 사용된 모든 경로의 동등 경로통행비용이 동일한 상태를 의미하며, 이를 Wardrop의 확률적 사용자균형조건으로 표현하면 다음과 같다.

$$\text{if } f_k^{rs}>0, \quad C_k^{rs}=C^{rs*} \qquad (2a)$$

$$\text{if } f_k^{rs}=0, \quad C_k^{rs}\geqq C^{rs*} \qquad (2b)$$

$$\text{where}, \ C_k^{rs}=c_k^{rs}+\frac{1}{\theta}ln(f_k^{rs}) \qquad (2c)$$

여기서, 하나 주의해야할 사항은 만약 조건(2b)처럼 $f_k^{rs}=0$이 되면, 식(2c)에서 log값을 정의할 수 없어 C_k^{rs}값을 결정할 수 없기 때문에, 실제 사용자 균형상태는 조건식(2a)로만 결정된다는 점이다. 만약 식(1)에서 $\theta\rightarrow\infty$로 가정하면(즉, 분산값이 매우 큰 경우), $\frac{1}{\theta}ln(f_p^{rs})\rightarrow 0$가 되어

$$c_k^{rs}=c_p^{rs} \qquad (3)$$

가 성립한다. 즉, θ값이 무한히 커지면, 확률적 사용자 균형(SUE)이 확정적 사용자 균형(UE)조건과 동일해 짐을 알 수 있다.

Ⅲ. 동적체계기반 확률적 통행배정모형

1. Model formulation

본 연구에서 제시되는 가변수요 확률적 통행배정모형은 수요모형과 공급모형으로 구성되는데, 수요모형은 기종점간 통행비용의 함수이며, 공급모형은 확률적 통행배정모형에서 도출된 통행량의 저항함수이다.

1) 수요모형

일반적으로 통행수요(q_{rs})는 기종점rs간의 통행비용(c_{rs})의 함수로 다음과 같이 표현된다.

$$q_{rs}=D(c_{rs})$$

본 연구에서는 가변수요(탄력수요)를 고려하기 위하여 다음과 같은 지수형함수(exponential function)를 따른다고 가정한다.

$$q_{rs}=\overline{q_{rs}}exp(-\theta c_{rs}) \qquad (4)$$

여기서, $\overline{q_{rs}}$는 잠재 통행수요(potential travel demand)이며, θ는 파라메타이다. 또한, 기종점 rs간의 최소 통행비용(minimum travel cost)은 다음과 같이 계산된다.

$$c_{rs}=-\frac{1}{\theta}ln\sum_k \exp[-\theta(c_k^{rs})] \qquad (5)$$

여기서, c_{rs}는 Williams(1977)가 제시한 통행비용으로 기대인지 통행비용함수(expected perceived travel cost function)와 동일하다. 그런데 이 통행비용은 다른 어떤 경로의 통행시간보다 크지 않다는 속성을 갖고 있다(즉, $c_k^{rs}\geqq c_{rs}$).

따라서, 식(4)와 같은 가변수요를 확률적 통행배정모형에 고려할 경우, 통행수요가 기종점간의 통행비용(c_{rs})의 함수로 표현되기 때문에 좀 더 현실적인 통행배정이 가능하게 된다.

2) 공급모형

동적체계(dynamic system)는 시간의 흐름에 따라 변하는 체계(system)의 변화과정을 표현하는 수리적인 방법으로 교통도 시간의 흐름에 따라 교통상황이 바뀌기 때문에 동적체계를 이용하여 표현할 수 있다. 공급모형을 동적체계(dynamic system)로 표현하면 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t)$$

여기서, $x(t)$는 상태벡터($n-vector$)이고 $f(x(t),t)$는 각 요소가 $x_1, x_2, ..., x_n$이고 시간t가 함수인 $n-$벡타이다.

상태벡터x가 한때 균형상태x_e와 동일하고 이후 장래에도 동일하다면, x_e는 동적체계(dynamic system)에서 균형상태(equilibrium)가 된다. 즉, 동적체계에서 모든 t에 대해,

$$f(x_e, t) = 0$$

을 만족하는 상태x_e를 시스템의 균형상태(equilibrium) 라고 한다. 이것은 균형상태에서 상태벡타x는 시간의 변화에 관계없이 일정한 값(상수)을 갖기 때문에 상태변수의 미분값($\dot{x}$)은 0이 되어 $f(x,t)$도 0이 되기 때문이다. 만약 시간불변인 경우 다음과 같이 표현된다.

$$f(x_e) = 0$$

또한, 시스템이 선형 시간불변(linear time-invariant)이면, 즉, $f(x) = Ax$이고, A가 비특이행렬(non-singular)이면 오직 하나의 균형상태가 존재하고, A가 특이행렬이면 무수히 많은 균형상태가 존재하게 된다.

본 연구에서는 확률적 사용자균형 통행배정모형으로 다음과 같은 동적체계모형을 제시한다

$$\dot{x}_a = c_a(x_a - x_a^*) \tag{6}$$

여기서, x_a는 링크a의 통행량으로 확률모형에서 도출되며, x_a^*는 확률적 균형상태의 링크 통행량이다. 또한, $\dot{x}_a$는 x_a를 시간으로 미분한 값이며 c_a는 링크 통행시간이다.

위 식(6)과 같은 동적체계(dynamic system)는 안정적인 해(stable solution)로 수렴하는지를 판단하는게 중요하다. 안정적인 해에 도달한다는 것을 제어이론 측면에서 보면 시간이 지남에 따라 체계(system)의 저장에너지가 감소한다는 것을 의미하며, 이를 확인할 수 있는 방법중 하나가 Lyapunov함수이다.

본 연구에서 제안한 모형이 안정해로 접근한다는 사실은 Lyapunov함수를 통하여 다음과 같이 증명할 수 있다.

[Lyapunov정리]

$x_a - x_a^* \leq 0$ 라는 조건하에서 식(6)의 동적체계는 안정적인 해로 수렴한다.

(proof)
$V_a = c_a(x_a - x_a^*)$라 놓으면,

V_a는 1차미분가능하며 Smith(1979)의 링크기반 변동부등식(link-based variational inequality)에 의해 $V_a \geq 0$이다. 그리고, $V_a = c_a(x_a - x_a^*) = 0$에서 균형해를 구할수 있다. 또한,

$$\begin{aligned} \dot{V}_a &= \dot{x}_a c_a \\ &= c_a^2(x_a - x_a^*) \end{aligned}$$

여기서, 만약 $x_a - x_a^* \leq 0$라면, $\dot{V}_a \leq 0$이다.
따라서, 함수V_a는 $x_a - x_a^* \leq 0$ 라는 조건하에서 Lyapunov 함수이며 동적체계는 안정상태에 도달한다.

2. 풀이 알고리듬

식(6)으로 표현된 확률적 사용자균형 통행배정모형의 해를 구하는 방법은 다음과 같다.

먼저, $\dot{x}_a = \frac{x_a(\tau + \Delta\tau) - x_a(\tau)}{\Delta\tau}$ 이므로 이를 이산형(discrete)으로 정리하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$x_a(\tau + \Delta\tau) = x_a(\tau) + \Delta\tau c_a(\tau)(x_a - x_a^*) \tag{7}$$

여기서, τ는 추상변수(abstract variable)로 동적체계에서는 상태변수를 미분하는 시간변수, 즉 시간 또는 오늘, 내일 등 시간단위로 해석할 수 있으며, 이를 알고리듬 측면에서는 반복횟수(number of iteration)로 볼 수 있다. $\Delta\tau$는 작은 변화량(changes)이다.

식(7)에서 링크 교통량 x_a는 확률적으로 다음과 같이 계산된다.

$$x_a = \sum_{rs}\sum_k q_{rs} p_k^{rs} \delta_{ka}^{rs}$$

여기서, p_k^{rs}는 기종점 rs간 경로k를 선택할 확률이며, δ_{ka}^{rs}는 기종점 rs간 경로k가 링크a이 속하면 1, 그렇지

않으면 0인 가변수이다. 본 연구에서는 경로선택확률 (p_k^{rs})을 구하기 위하여 다음과 같은 로짓(logit)모형을 이용한다.

$$p_k^{rs} = \frac{\exp(-\theta c_k^{rs})}{\sum_{w \in W} \exp(-\theta c_w^{rs})}$$

여기서, θ 는 경로선택시 사용자의 인지분산값을 나타내는 양의 파라메타로 이 값이 커질수록 확정적 통행배정 (deterministic traffic assignment) 에 가깝게 된다. W는 기종점 rs 간을 연결하는 대안 경로들의 집합이다.

식(7)을 알고리듬 형태로 다시 표현하면 다음과 같이 정리된다. 여기서, n은 반복수(iteration number)이다.

$$x_a^{n+1} = x_a^n + \triangle\tau c_a^n (\sum_{rs}\sum_k q_{rs} p_k^{rs} \delta_{ka}^{rs} - x_a^n) \qquad (8)$$

따라서, 식(4)와 식(8)를 이용하여 가변수요 확률적 사용자 균형상태의 링크 통행량을 계산할 수 있으며, 이를 정리하면 다음과 같다.

[단계0] 초기화

반복수 $n=0$, $m=0$

잠재통행수요 $\overline{q_{rs}}$, 파라메타θ, $\triangle\tau$ 값 설정

$q_{rs}^m = \overline{q_{rs}}$로 설정

자유교통류 초기 통행비용을 이용하여 초기 링크 통행량x_a^n 설정

[단계1] 확률적 사용자균형 통행배정

for each OD pair,

(1.1) 링크통행시간$c_a^n(x_a^n)$ 및 경로통행비용계산

$$c_k^{rs,n} = \sum_a c_a^n \delta_{ak}^{rs}$$

(1.2) 로짓모형을 이용하여 경로선택확률 $p_k^{rs,n}$과y_a^n 계산

$$y_a^n = \sum_{rs}\sum_k q_{rs}^m p_k^{rs,n} \delta_{ka}^{rs,n}$$

(1.3) 링크통행비용 갱신 $\{c_a^n(y_a^n)\}$

(1.4) 링크통행량 갱신

$$x_a^{n+1} = x_a^n + \triangle\tau c_a^n (y_a^n - x_a^n)$$

(1.5) 수렴성 검토

만약 $\dfrac{\sum_a |x_a^{n+1} - x_a^n|}{\sum_a x_a^n} < \epsilon$이면 정지 : 균형해$\{x_a^*, c_a^*\}$

〔단계2〕로 진행 그렇지 않으면, $n=n+1$후 (1.1)로 진행

[단계2] 가변수요(elastic demand) 배정

(2.1) 경로통행비용계산 : $c_k^{rs,m} = \sum_a c_a^* \delta_{ak}^{rs}$

(2.2) 기종점간 최소 통행비용c_{rs}^m계산

$$c_{rs}^m = -\frac{1}{\theta} ln \sum_k \exp[-\theta(c_k^{rs,m})]$$

(2.3) 가변수요 계산

$$q_{rs}^{m+1} = \overline{q_{rs}} exp(-\theta c_{rs}^m))$$

[단계3] 수렴성 검토

만약 $\dfrac{\sum_{rs} |q_{rs}^{m+1} - q_{rs}^m|}{\sum_{rs} q_{rs}^m} < \epsilon$이면 정지 : 균형해 $\{q_{rs}^*\}$

그렇지 않으면,

$n=0$후 [단계1]로 진행

위 알고리듬의 특징은 해를 구하기 위하여 목적함수식을 평가(evaluation)하는 과정이 불필요하다는 점이다. 즉, 목적함수를 최소화시키는 급강하 방향을 찾는 단계 (steepest descent direction finding)와 최적 이동크기(optimal move size)를 결정하는 단계가 필요없다. 대신 이동크기로 (1.4)에서 보듯이 $\triangle\tau c_a^n$ 를 사용하며, x_a^n와 y_a^n를 구할 때 기존 STOCH 알고리듬을 이용하지 않고 (1.2)와 같이 직접 로짓배정법을 적용한다.

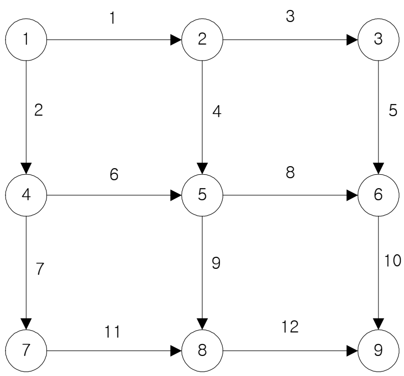
Ⅳ. 모형의 평가

본 연구에서 제시된 알고리듬을 평가하기 위하여 동일한 예제 교통망을 대상으로 수요가 고정된 경우와 수요가 변하는 가변수요인 경우에 대하여 평가해 본다. 예제 교통망은 〈그림 1〉에서 보듯이 9개의 노드와 12개의 링크 그리고 6개의 경로로 구성되어 있으며, 1번 노드가 기점이

며 9번 노드가 종점인 하나의 기종점쌍을 갖는다. 로짓모형에 사용되는 스케일 파라메타$\theta = 0.015$이고 $\Delta\tau = 0.05$로 설정한다. 교통망의 각 링크별 입력자료는 〈표 1〉에 나와 있으며, 각 경로는 〈표 2〉와 같이 구성된다. 또한 각 링크의 통행시간함수는 아래와 같은 BPR식을 이용한다.

링크 통행비용함수 $c_a = c_{a0}\left[1 + 0.15\left(\frac{x_a}{Q_a}\right)^4\right]$

여기서, Q_a는 링크a의 용량임.



〈그림 1〉 예제 교통망

〈표 1〉 예제 교통망의 네트워크 입력자료

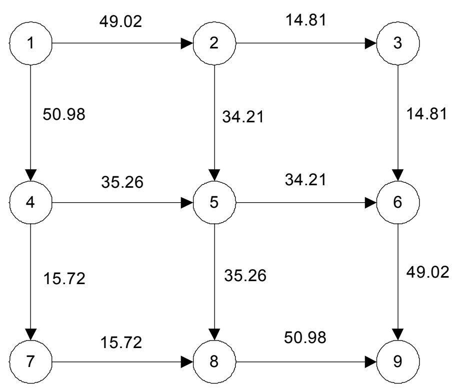
링크번호	초기 통행비용(c_{a0})	용량(Q_a)
1	12	35
2	10	35
3	15	20
4	10	35
5	15	20
6	10	35
7	15	20
8	10	35
9	10	35
10	12	35
11	15	20
12	10	35

〈표 2〉 각 경로의 구성

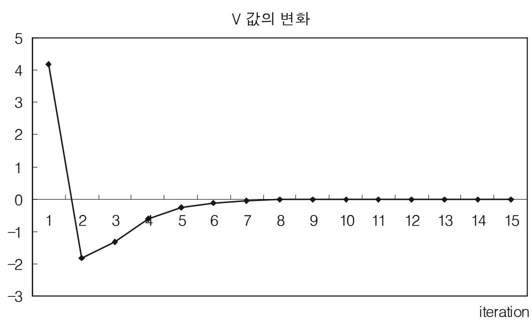
통행경로	경로구성
Path 1	①→②→③→⑥→⑨
Path 2	①→②→⑤→⑥→⑨
Path 3	①→②→⑤→⑧→⑨
Path 4	①→④→⑤→⑥→⑨
Path 5	①→④→⑤→⑧→⑨
Path 6	①→④→⑦→⑧→⑨

1. 고정수요인 경우

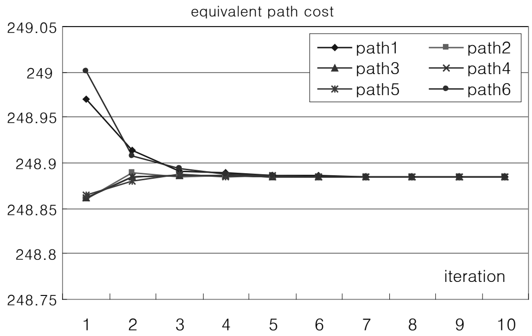
먼저, 수요를 $q_{rs} = 100$로 고정한 경우의 분석결과로 〈그림 2〉는 확률적으로 통행배정된 링크 통행량을 보여주고 있다. 〈그림 3〉과 〈그림 4〉는 반복회수에 따라 V값과 동등 경로비용C_k^{rs}의 변화를 나타내고 있다. 제Ⅲ장 1절의 Lyapunov정리에서 증명하였듯이 $V = \sum_a V_a$값은 균형상태에 도달하면 $V_a = c_a(x_a - x_a^*) = 0$이 된다. 그림에서 보듯이 반복횟수가 증가함에 따라 V값이 0으로 수렴하여 균형해에 도달했음을 알 수 있다. 확률적 사용자 균형해로 도달했음은 동등 경로비용(equivalent path cost)을 통해서도 알 수 있는데, 〈그림 4〉에서 보듯이 사용된 6개 경로의 동등경로비용C_k^{rs}이 모두 동일하게 되어 확률적 사용자균형에 수렴했음을 확인할 수 있다. 여기서 하나 주의할 사항은 확률적 사용자 균형상태(stochastic user equilibrium)에서는 사용된 경로간의 통행비용(c_k^{rs})이 같아지는게 아니라, 경로간 동등 경로비용(C_k^{rs})이 같아진다는 점이다. 동등 경로비용은 식



〈그림 2〉 확률적으로 배정된 링크통행량



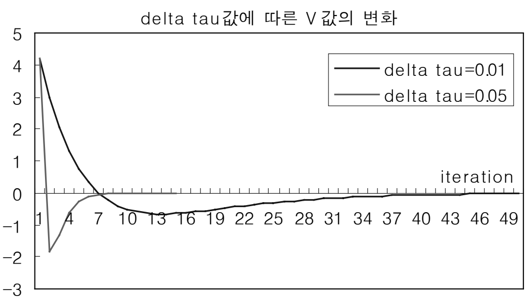
〈그림 3〉 V값의 변화



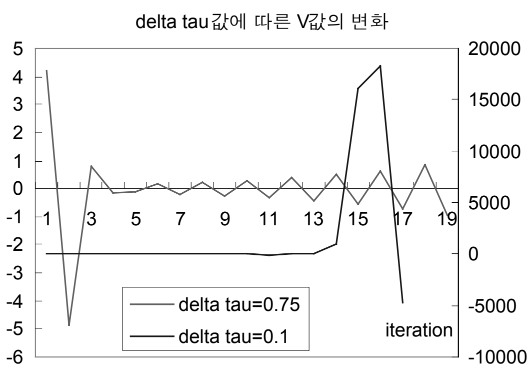
〈그림 4〉 동등경로비용(C_k^{rs})값의 변화

〈표 3〉 확률적 통행배정 결과

경로	배정된 경로통행량	경로 통행비용 (c_k^{rs})	동등 경로통행 비용(C_k^{rs})
Path 1	14.81	69.21	248.88
Path 2	16.85	60.59	248.88
Path 3	17.36	58.59	248.88
Path 4	17.36	58.59	248.88
Path 5	17.89	56.59	248.88
Path 6	15.72	65.22	248.88



(a) $\triangle\tau$ 값이 작은 경우



(b) $\triangle\tau$ 값이 큰 경우

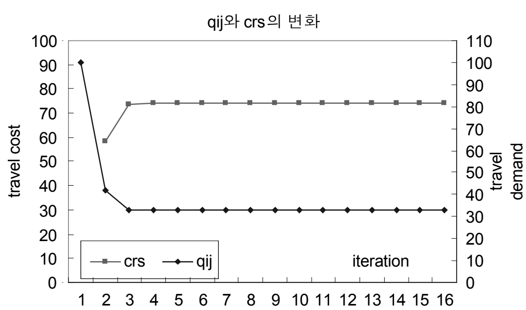
〈그림 5〉 $\triangle\tau$값에 따른 V값의 변화(고정수요)

(2c)와 같다. 〈표 3〉은 확률적으로 통행배정된 경로별 통행량과 통행시간, 그리고 동등 경로비용을 나타내고 있는데, 표에서 보듯이 각 경로들의 통행시간은 다른 반면, 동등 경로비용은 모두 동일함을 알 수 있다.

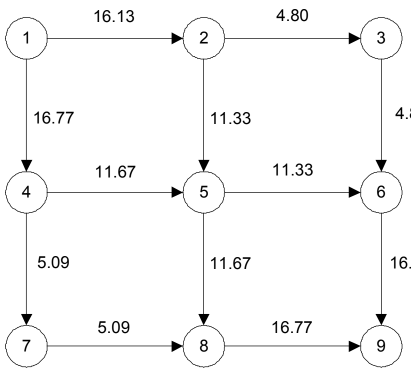
〈그림 5〉는 $\triangle\tau$값의 변화에 따른 V값의 변화를 보여주고 있다. $\triangle\tau$값이 상대적으로 작은 〈그림 5〉(a)의 경우, 반복수에 차이가 있지만 모두 $V=0$인 균형해로 수렴하고 있음을 알 수 있으며, 예상했던 대로 $\triangle\tau$이 작을수록 더 많은 반복횟수가 요구된다. 그러나, $\triangle\tau$값이 상대적으로 큰 〈그림 5〉(b)의 경우, 안정적인 상태로 수렴하지 않고 반복수가 늘어남에 따라 오히려 발산하고 있다. 이는 제어공학(control engineering) 분야에서는 널리 알려진 사실로 어떻게 적절한 $\triangle\tau$값을 결정하느냐가 중요한 이슈가 됨을 보여준다. 본 연구에서도 이에 대한 추가 연구가 필요할 것으로 보인다.

2. 가변수요인 경우

가변수요를 고려하기 위하여 잠재수요를 $\overline{q_{rs}}=100\text{(trip)}$으로 설정하였으며, 식(4)와 같은 지수함수를 가변수요함수(elastic demand function)로 사용하였다. 먼저, 〈그림 6〉은 반복횟수에 따른 기종점간 통행수요(travel demand)의 변화를 보여주고 있다. 초기 잠재수요 100(trips)에서 기종점간 최소통행시간(c_{rs})이 증가함에 따라 점차 감소하여 반복수 4회에 32.9(trips)의 통행수요로 수렴하고 있다. 〈그림 7〉은 통행수요가 안정된 상태(수렴상태)에서의 각 링크별 배정된 통행량을 보여주고 있다. 이때 6개의 각 경로별 통행량과 경로 통행시간이 〈표 4〉에 나와 있다. 표에서 보듯이 각 경로들의 동등 경로통행시간이 서로 일치하여, 사용자가 이용한 모든 경로의 동등통행시간이 동일한 Wardorp의 확률적 사용



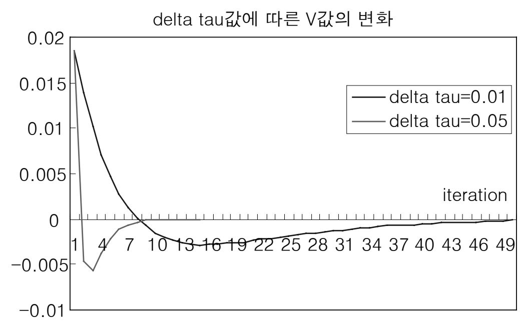
〈그림 6〉 c_{rs}와 가변 통행수요(q_{ij})의 변화추이



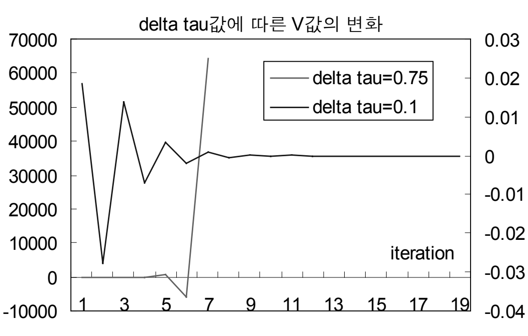
〈그림 7〉 최종적으로 배정된 링크통행량

〈표 4〉 가변수요 확률적 통행배정 결과

경로	배정된 경로통행량	경로 통행비용 (c_k^{rs})	동등 경로통행 비용(C_k^{rs})
Path 1	4.80	54.18	158.79
Path 2	5.58	44.19	158.79
Path 3	5.75	42.19	158.79
Path 4	5.75	42.19	158.79
Path 5	5.92	40.19	158.79
Path 6	5.10	50.18	158.79



(a) $\triangle\tau$ 값이 작은 경우



(b) $\triangle\tau$ 값이 큰 경우

〈그림 8〉 $\triangle\tau$값에 따른 V값의 변화(가변수요)

자 균형상태에 도달했음을 알 수 있다.

〈그림 8〉는 $\triangle\tau$값의 변화에 따른 V값의 변화를 보여주고 있는데, 고정수요과 같이 $\triangle\tau$값이 상대적으로 작은 〈그림 8〉(a)의 경우 모두 $V=0$인 균형해로 수렴하고 있는 반면, $\triangle\tau$이 0.1인 경우에는 수렴하지만 0.75가 되면 발산하여 수렴하지 않고 있음을 보여준다(〈그림 8〉의 (b)참조).

Ⅴ. 결론 및 향후 연구과제

본 연구에서는 제어공학분야에서 많이 사용되는 동적체계를 이용하여 확률적 사용자균형 통행배정문제를 구축하고 이를 풀기 위한 알고리듬을 제시하였다. 또한, 제시된 모형식이 점근적으로 안정해(stable solution)에 도달함을 증명하였으며, 간단한 예제 교통망을 대상으로 평가해 본 결과 이를 확인하였다. 확률적 사용자 균형 통행배정모형은 통행자의 경로인지비용을 고려한다는 측면에서 장점을 갖고 있지만 이를 풀기가 쉽지 않아 그 적용에 한계가 있어 왔다. 특히 Sheffi(1985)가 제안한 동등 수리최소화문제(equivalent mathematical minimization program)의 경우, 연속평균법(method of successive averages)을 이용하여 휴리스틱하게 해를 찾는다는 문제가 있으며, 이후 제시된 여러 연구들도 해석하기가 쉽지 않았다. 이에 반해, 본 연구에서 제안한 모형은 동적체계라는 단순한 이론을 이용하여 확률적 사용자균형 통행배정모형을 구성하고 이를 수치적으로 쉽게 풀 수 있다는 장점이 있다.

본 연구에서 다룬 동적체계는 교통에서는 이제 시작하는 분야로 해야 할 많은 과제가 남아 있다. 먼저, 동적체계는 속성상 시간의 흐름에 따른 교통현상의 변화를 표현하는 기법이기 때문에 이에 적합한 교통의 동적문제들, 즉 동적 통행배정(dynamic traffic assignment), ramp metering과 같은 동적 교통류제어(dynamic control flow), 동적 기종점 통행량 추정(dynamic OD trip estimation) 등과 같은 동적분야와 시스템최적화를 목적으로 하는 교통수요관리 등에 적용할 수 있으며, 따라서 이들 모형의 개발이 시급하다. 이런 점에서 본 연구에서 제시한 모형은 정적인 상태를 가정했기 때문에 한계를 갖고 있다.

또한, 본문에서 기술했듯이 알고리듬상에 적용되는 $\triangle\tau$값에 따라 수렴성에 차이가 있으며, 경우에 따라서는

전혀 해를 찾지 못하는 문제가 발생하기 때문에 이에 대한 향후 연구도 필요할 것으로 보인다.

참고문헌

1. 임용택(2003), "확률적 로짓 통행배정모형의 해석 알고리듬", 대한교통학회지, 제21권 제2호, 95~105
2. 임용택(2006), "동적체계를 이용한 교통망모형의 개발", 서울도시연구 제7권 제2호, 13~24
3. Akamatsu.T.(199), "Cyclic flows, Markov process and stochastic traffic assignment", Transportation Research 30B, pp.369~386.
4. Akamatsu.T.(1997), "Decomposition of path choice entropy in general transport networks", Transportation Science Vol.31, No.4, pp.349~362
5. Bell, M.G.H.(1995), "Alternatives to Dial's logit assignment algorithm", Transportation Research 29B, pp.287~296.
6. Daganzo C. and Y. Sheffi(1977), On stochastic models of traffic assignment, Transportation Science 11, 253~274
7. Dial, R. B. (1971), "A probabilistic multipath traffic assignment model which obviates path enumeration", Transportation Research 5, pp.83~111
8. Fisk,C. (1980), "Some development in equilibrium traffic assignment", Transportation Research 14B, 243~255
9. Maher, M. J., P. C. Hughes(1997), "A probit-based stochastic user equilibrium assignment model", Transportation Research 31B, pp. 341~355
10. Maher, M. J.(1998), "Algorithms for logit-based stochastic user equilibrium assignment", Transportation Research 32B, pp.539~549.
11. Sheffi Y.(1985), Urban transportation networks, Prentice-Hall
12. Sheffi Y., Powell W.B.(1982), An algorithm for the equilibrium assignment problem with random link times, Networks 12(2), 191~207
13. Smith, M.J. (1979), The existence, uniqueness and stability of traffic equilibria, Transportation Research 13B, 295~304
14. Smith, M.J.(1984), "The stability of a dynamic model of traffic assignment-An application of a method of Lyapunov", Transportation Science Vol. 18, No. 3, 245~252
15. Williams, H. C. W. L.(1977), "On the formulation of travel demand models and economic evaluation measures of user benefit", Environment and Planning 9A(3), pp.285~344.

♧ 주 작 성 자 : 임용택

♧ 교 신 저 자 : 임용택

♧ 논문투고일 : 2007. 3. 15

♧ 논문심사일 : 2007. 5. 22 (1차)
2007. 6. 17 (2차)

♧ 심사판정일 : 2007. 6. 17

♧ 반론접수기한 : 2007. 12. 31