

이동최소제곱 유한차분법을 이용한 응력집중문제 해석(II): 균열과 국소화 밴드 문제로의 적용

Analysis of Stress Concentration Problems Using Moving Least Squares Finite Difference Method(II): Application to crack and localization band problems

윤 영 철* 김 호 진** 김 동 조*** 윙 캄 리우**** 테드 벨리치코**** 이 상 호†
Yoon, Young-Cheol Kim, Hyo-Jin Kim, Dong-Jo Wing Kam Liu Ted Belytschko Lee, Sang-Ho
(논문접수일 : 2007년 6월 1일 ; 심사종료일 : 2007년 6월 26일)

요 지

본 연구의 전편에서는 이동최소제곱 유한차분법을 이용한 고체역학문제의 정식화 과정이 소개되었다. 후편에서는 수치예제를 통해 이동최소제곱 유한차분법의 정확성, 강건성, 효율성을 검증했다. 탄성론 문제의 해석을 통해 개발된 해석기법의 우수한 수렴률을 확인했다. 탄성균열문제에 적용하여 간편한 불연속면 모델링이 가능하고, 적응적 절점배치를 통해 특이 응력해를 정확하고 효율적으로 계산할 수 있음을 보였다. 국소화 밴드문제 해석결과를 통해 변위나 응력이 급격하게 변화하는 특수문제에 대한 정확성과 효율성을 확인했으며, 본 해석기법이 다양한 특수 공학적 문제로 확장될 수 있을 것으로 기대된다.

핵심용어 : 이동최소제곱 유한차분법, 수치예제, 정확성, 강건성, 효율성

Abstract

In the first part of this study, the moving least squares finite difference method for solving solid mechanics problems was formulated. This second part verified the accuracy, robustness and effectiveness of the developed method through several numerical examples. It was shown that the method gives excellent convergence rate for elasticity problem. The solution process of elastic crack problems showed the easiness in discontinuity modeling and demonstrates the accuracy and efficiency in finding singular stress solution based on adaptive node distribution. The applicability to the engineering problem with abrupt change in displacement and stresses gradient fields is verified through a localization band problem. The developed method is expected to be extended to the various special engineering problems.

Keywords : moving least squares finite difference method, numerical examples, accuracy, robustness, effectiveness

1. 서 론

본 연구의 전편에는 고체역학문제의 해석을 위해 이동최소제곱법에 근거한 Taylor 전개 및 콜로케이션법에 근거한 유한차분법을 이용하여 이산화된 계방정식을 정식화하는 과정이 소개되었다. 개발된 수치기법은 '이동최소제곱 유한차분법'

이라 명명했다. 본 논문에서는 이동최소제곱 유한차분법을 탄성론 문제, 균열문제 및 국소화 밴드문제에 적용하여 정확성과 수치적인 강건성을 검증한다.

Galerkin 정식화에 근거한 무요소법은 요소와 무관한 절점 의존적인 특징 때문에 불연속면 모델링에 유리하지만, 형상함수의 미분계산이 오래 걸리고, 약형식의 수치적분을 위

† 책임저자, 연세대학교 사회환경시스템공학부 교수
Tel: 02-2123-2808 ; Fax: 02-364-5300
E-mail: lee@yonsei.ac.kr

* 명지전문대학 토목과 조교수

** 연세대학교 사회환경시스템공학부 연구원 공학박사

*** 연세대학교 사회환경시스템공학부 박사과정

**** Department of Mechanical Engineering, Northwestern University Professor

• 이 논문에 대한 토론을 2007년 10월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2007년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

해 적분 cell을 나눠야 하기 때문에 요소망(mesh) 구조로부터 완전히 자유롭지 못하다. 이를 극복하기 위한 점별 콜로케이션과 같은 강형식(strong form) 정식화를 따르는 무요소법은 요소망(mesh) 구조로부터 자유로워 졌지만 근사함수의 고차미분 계산 효율성 문제를 안고 있다. 유한차분법 역시 불연속문제의 차분식 구성시 격자망(grid) 구조로부터 자유롭지 못하고 영역 내부의 불연속면 모델링 과정이 매우 복잡하다. 그러나 본 연구에서 제안한 이동최소제곱 유한차분법은 정확성, 계산 또는 모델링의 효율성을 동시에 확보할 수 있는 매력적인 수치기법이다. 본 논문은 응력 특이성과 불연속성을 내포하는 다양한 고체역학문제의 해석을 통해 이동최소제곱 유한차분법의 정확성과 수렴특성, 계방정식 구성의 간편성, 요소망이나 격자망 구조와 상관없는 불연속 모델링의 효율성을 실제적으로 조사한다.

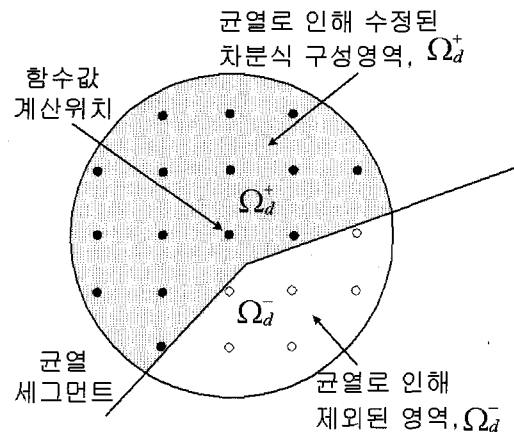
2. 차분식 구성을 위한 균열 모형화

이동최소제곱 유한차분법에서 균열의 존재는 차분식 구성에 변화를 가져온다. 그림 1과 같이 균열 세그먼트를 기준으로 함수값을 계산하려는 절점과 같은 편의 영역을 Ω_d^+ , 반대편 영역을 Ω_d^- 라 하면, 차분식은 Ω_d^+ 안의 절점들만을 이용하여 구성함으로써 균열면에 의한 함수값의 불연속성을 자연스럽게 묘사한다. 그러나 차분식 구성시 균열선단이 포함된 경우에는 함수값을 계산하는 절점과 균열선단을 연결하는 선으로 Ω_d^+ 와 Ω_d^- 를 구별하면 균열선단 주변에 실제보다 과장된 불연속 효과가 차분식에 도입된다. 따라서 무요소 균열해석 기법에서 균열선단 주변의 점진적인 불연속면 도입을 위해 Fleming 등(1997)이 제안한 '회절기법(diffraction method)'을 본 연구에 도입하여 그림 2와 같이 차분식 구성영역을 수정한다. 이는 그림 3과 같이 가중함수의 모양을 수정함으로써 균열선단 주변 절점들의 차분식 구성시 불연속 효과를 점진적으로 도입하여 해의 정도를 향상시킨다. 본 연구에서는 그림 3 또는 식 (1)과 같이 기존의 무요소법이나 이동최소제곱법과 달리 끝이 뾰족하고 미분이 불가능한 가중함수를 사용했다. 가중함수는 중심 부근에서 미분이 불가능한

$$w(r) = (1 - |r|)^4, \quad |r| \leq 1 \quad (1)$$

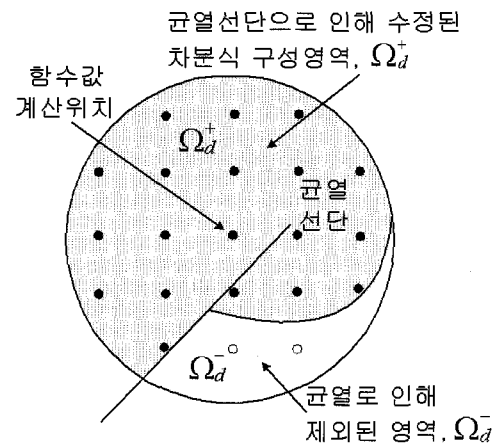
를 사용했다.

본 연구에서는 균열선단에서 무한한 값을 갖는 응력 특이성을 모델링 하기 위해 특별한 기법을 도입하지 않았으나 선단주변에 적응적(adaptive) 절점배치를 사용하여 모델링 효율성을 높였다. 그림 4에서 보듯이 직선 세그먼트(segment)



- 차분식 구성시 포함된 절점들
- 차분식 구성시 제외된 절점들

그림 1 균열면 존재시 차분식 구성에 참여하는 절점들



- 차분식 구성시 포함된 절점들
- 차분식 구성시 제외된 절점들

그림 2 균열선단 존재시 차분식 구성에 참여하는 절점들

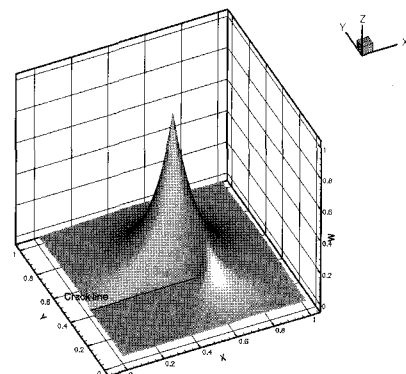


그림 3 균열선단 근방의 가중함수 수정

로 묘사되는 균열면은 절점과 상관없이 균열의 기하학적 형상을 표현한다. 균열의 성장은 균열선단에 놓여진 절점을 두 개로 분리하고 균열면 양쪽에 가까운 거리($10^{-5} \sim 10^{-4}h$, h 는

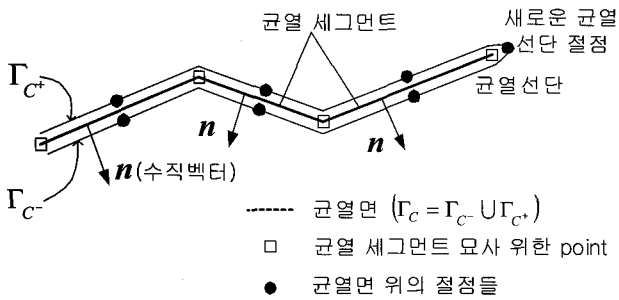


그림 4 균열 세그먼트와 절점을 이용한 균열성장 모델링

최소절점간 거리)로 배치한 후 새로운 선단위치에 절점을 추가하여 모델링 한다. '표면력 0인 조건'($\sigma \cdot n = 0$)은 균열면을 나타내는 수직벡터를 이용하여 균열면 상의 절점들에 직접 부과한다.

균열성장과정 해석을 위해 응력확대계수와 균열성장 각도 계산이 필요하다. 응력확대계수는 선적분 형태의 J-적분을 등가의 영역적분으로 환산하여 보다 안정적으로 응력확대계수값을 계산하는 교차적분법(Moran 등, 1987)을 사용한다. 균열 성장각은 계산된 모드별 응력확대계수값을 바탕으로 최대주응력 한계론(Erdogan 등, 1963)을 적용하여 결정할 수 있다.

3. 수치 예제

3.1 내민보 문제

응력집중 문제와 균열 문제를 통한 본격적인 이동최소제곱 유한차분법의 검증에 앞서 간단한 탄성론 문제(내민보 문제)를 해석하여 해석기법의 정확성을 조사한다(그림 5 참조). 응력에 대한 이론해는 Timoshenko 등(1970)에 의해 다음과 같이 주어진다.

$$\sigma_{xx} = -\frac{P(L-x)y}{I} \tag{2}$$

$$\sigma_{yy} = 0, \tag{3}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{P}{2I} \left(\frac{D^2}{4} - y^2 \right) \tag{4}$$

여기서 $I = \frac{D^3}{12}$ 는 사각형 단면을 갖는 보에 대한 관성모멘트이다. $x=0$, $-D/2 \leq y \leq D/2$ 인 경계를 따라 변위값이 필수경계조건으로 부과되고, 나머지 경계는 자연경계로 취급된다. 해석을 위해 297개(9×33)의 절점을 사용했으며, 탄성계수 $E=10,000 \text{ psi}$, 포아송비 $\nu=0.3$ 와 함께 평면응력 상태를 가정했다.

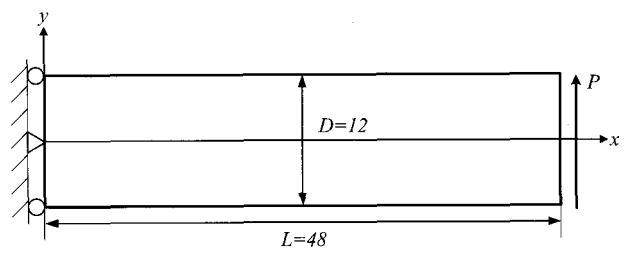


그림 5 내민보의 형상(치수)

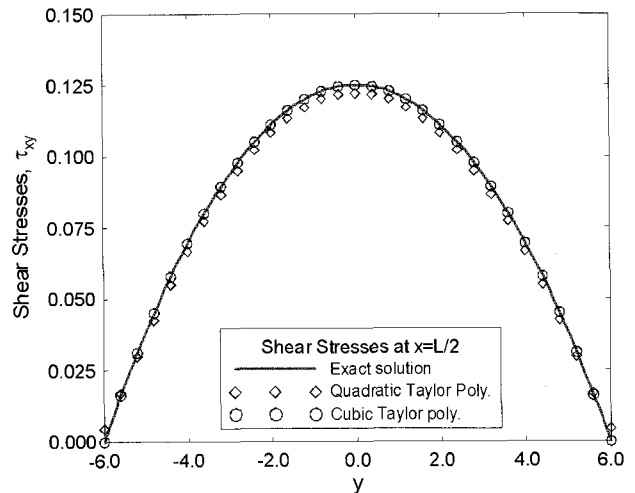


그림 6 전단응력에 대한 이론해와 수치해의 비교

이동최소제곱 유한차분법은 격자망(grid)이 필요없으나, 오차산정을 위해 적분격자를 구성하고 변위에 대한 L_2 상대 오차(식 (5))와 에너지 오차(식 (6))를 사용하여 수렴률을 평가했다.

$$e_{L_2} = \sqrt{\frac{\int_{\Omega} (\mathbf{u}_{ex} - \mathbf{u}_{num})^T (\mathbf{u}_{ex} - \mathbf{u}_{num}) d\Omega}{\int_{\Omega} \mathbf{u}_{ex}^T \mathbf{u}_{ex} d\Omega}} \tag{5}$$

$$e_{Energy} = \sqrt{\frac{\int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}_{ex} - \boldsymbol{\varepsilon}_{num})^T (\boldsymbol{\sigma}_{ex} - \boldsymbol{\sigma}_{num}) d\Omega}{\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_{ex}^T \boldsymbol{\sigma}_{ex} d\Omega}} \tag{6}$$

여기서, \mathbf{u} , $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}$ 는 각각 변위, 변형률, 응력을 나타내고, 아래첨자 'ex'는 정확해, 'num'은 수치해를 가리킨다.

고체문제의 지배방정식은 2차 편미분 방정식이기 때문에 최소 2차 이상의 Taylor 다항식을 사용해야 한다. 그림 6에는 $x=L/2$ 에서 계산된 전단응력을 이론해와 비교했다. 2차(quadratic) Taylor 다항식을 사용하는 경우 약간의 오차가 발생하나 진동(oscillation)이 거의 없는 매우 부드러운 해를 얻을 수 있었다. 3차(cubic) Taylor 다항식을 사용하면 기계오차 범위 이내의 정확한 해를 얻을 수 있는데 이것은 주어진 문제의 이론해가 3차 다항식이기 때문에 3차 Taylor

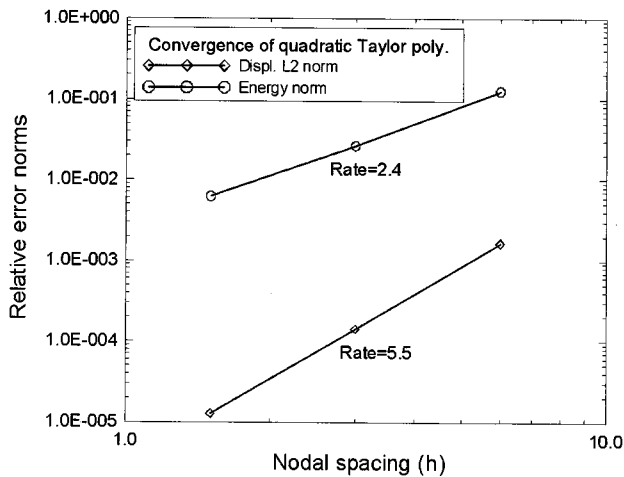


그림 7 변위와 에너지 놈 상대오차의 수렴률(2차 Taylor 다항식 사용)

다항식을 사용하여 일관성 차수(order of consistency)를 3차 이상으로 확보하면 수치적으로 완전한 해가 얻어지기 때문이다. 그림 7에는 2차 Taylor 다항식을 사용한 경우의 변위에 대한 L_2 오차와 에너지 오차의 수렴률을 도시하였는데, 본 연구의 수치해가 기존의 수치해석법들 보다 빠르게 수렴하고 있음을 알 수 있다.

3.2 균열을 갖는 사각형 패치의 선단주변장 해석

본 절은 균열을 포함한 사각형 패치시험(patch test) 문제를 고려한다. 경계조건은 모드 I 균열에 대한 선단주변 변위장(near-tip field)을 나타내는 식 (7)과 식 (8)을 이용하여 패치의 경계에 부여한다. 패치 내부의 변위와 응력에 대한 계산결과를 이론해와 다시 비교하는 방법으로 균열해석의 정확성을 검증한다(Fleming 등, 1997).

$$u_x = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 + 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (7)$$

$$u_y = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 - 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (8)$$

그림 8과 같이 사각형 패치 내변의 길이는 $2a$ 이며, 선단이 패치 중앙에 위치하는 길이 a 의 균열을 포함한다. 효율적인 해석을 위해 선단으로 가면서 절점거리를 감소시켰고, 수렴률 조사를 위해 225개, 625개, 1225개 절점 모델들을 사용했다. 일관성 차수(order of consistency)에 따른 영향을 보기 위해 2차, 3차, 4차 Taylor 다항식을 적용했다. $K_I=1$ 을 가정하면 식 (7)과 식 (8)로부터 경계값이 주어지고, J-적분을 영역 적분 형태로 변환한 교차적분법(Moran 등, 1987)을 이용하여 응력확대계수를 계산한다. 계산된 응력확대계수는 가정한

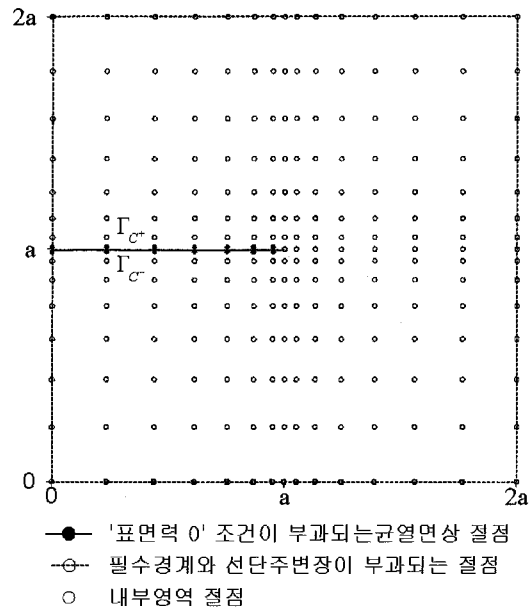


그림 8 선단주변 균열문제를 위한 절점배치(225 절점)

$K_I=1$ 과의 비교를 통해 해석의 정확도를 판단한다.

표 1에 Taylor 다항식의 차수에 따른 교차적분법으로 계산된 응력확대계수 값들을 정리했다. 일관성 차수에 관계없이 계산된 응력확대계수 값이 선단주변장 정의를 위해 가정한 값과 잘 일치하고 있다. 그림 9는 $\theta=0^\circ$ 일 때 $0.15a$ 까지의 매우 국소적인 선단 앞쪽의 응력값이며, 절점이 아닌 위치에서 계산했음에도 불구하고 부드러운 해를 얻게 해준다. 고차 Taylor 다항식을 사용하는 효과는 크지 않은데, 이것은 균열선단에서 응력값이 무한하여 다항식으로는 묘사하기 어렵기 때문이다. 625개의 절점을 사용한 패치모델에 대해 2차 Taylor 다항식을 사용하여 얻은 응력도를 그림 10에 도시했다. 그림 11의 변위에 대한 surface plot을 통해 본 연구의 불연속면 모델링 방법이 매우 성공적이라는 것을 알 수 있다. Lee 등(2003)이나 Lee 등(2005)이 사용했던 응력 특이성을 모델링 할 수 있는 특수기법을 사용하지 않기 때문에 선단에서 무한히 커지는 응력을 묘사할 수는 없으나, 본

표 1 균열을 포함한 패치문제에서 재계산된 응력확대계수

Taylor 다항식 차수	절점수	재계산된 응력확대계수	상대오차 (%)
2차 (Quadratic)	225	0.9919	0.81
	625	1.0007	0.07
	1225	1.0008	0.08
3차 (Cubic)	225	1.0015	0.15
	625	1.0057	0.57
	1225	1.0037	0.37
4차 (Quartic)	225	1.0084	0.84
	625	1.0048	0.48
	1225	1.0033	0.33

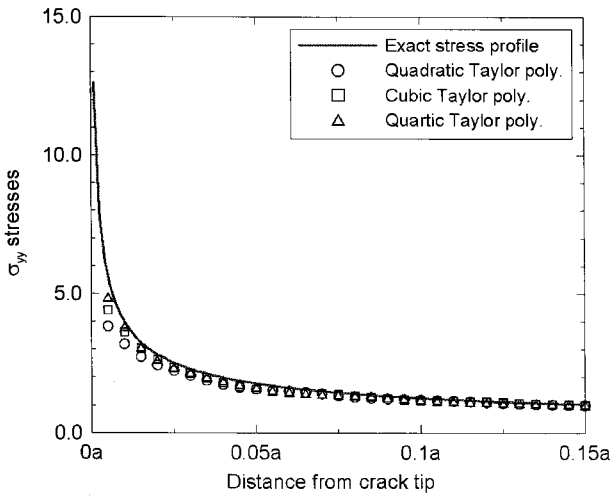


그림 9 계산된 선단 주변응력장과 이론해의 비교

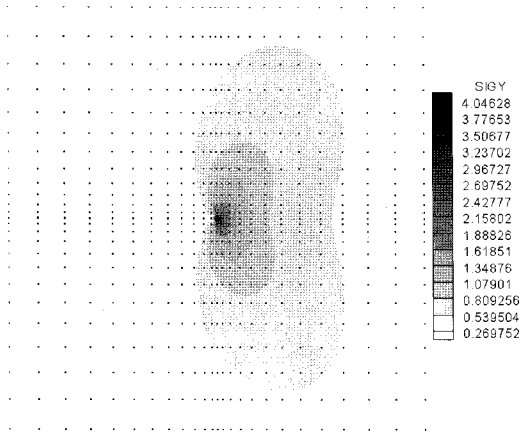


그림 10 균열을 갖는 패치문제의 σ_{yy} 응력

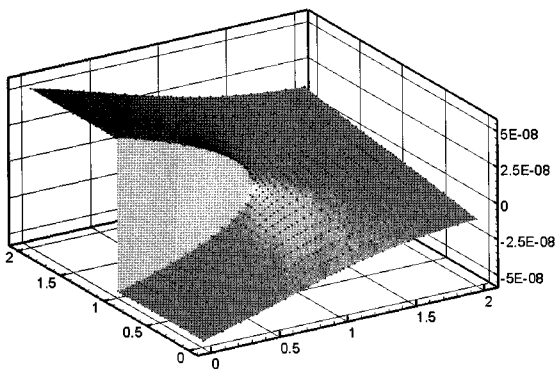


그림 11 균열을 갖는 패치문제의 개구변위 형상(u_y)

연구의 해석기법은 상당히 효과적이어서 정확도 높은 응력확대계수 계산은 물론 개구변위가 발생하는 균열의 불연속성을 잘 묘사하고 있다.

3.3 인장하중을 받으며 성장하는 편측균열

그림 12와 같이 상단에 인장하중($\sigma_y = 1 \text{ psi}$)을 받는 판부재 내의 편측균열 문제를 고려한다. 판부재는 평면응력상태이고, 탄성계수 $E = 3 \times 10^7 \text{ psi}$, 포와송비 $\nu = 0.25$ 를 가정한다. 절점은 선단주변에 좀 더 집중되도록 하면서 495개를 배치했다. 균열은 $a = 2.0 \text{ in}$ 에서 $a = 5.0 \text{ in}$ 까지 각 해석단계마다 $\Delta a = 0.5 \text{ in}$ 씩 성장하도록 했다. 그림 14에는 각 해석단계에서 계산된 응력확대계수를 Tada 등(1973)이 제시한 이론해와 비교하여 도시했으며, 계산된 응력확대계수 값은 이론해와 매우 잘 일치하고 있다.

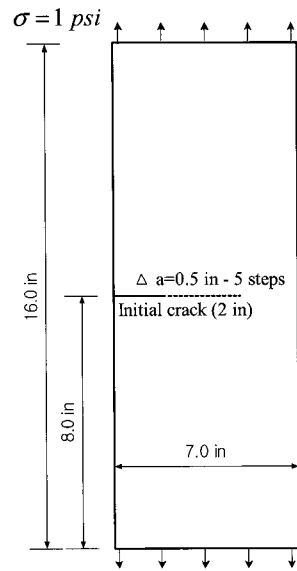


그림 12 인장하중 상태의 편측균열을 갖는 직사각형 판

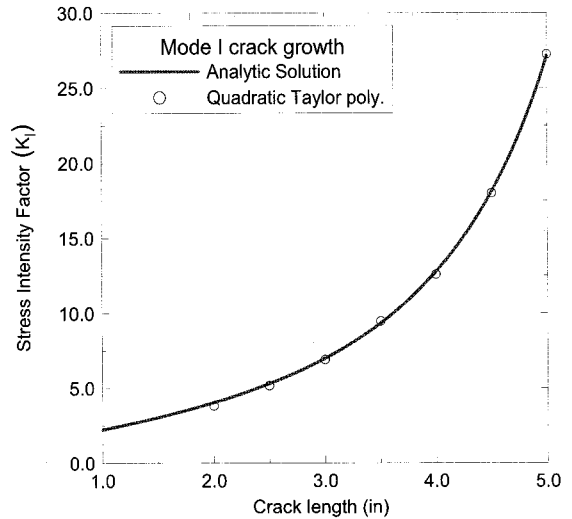


그림 13 인장하중을 받는 편측균열의 모드 I 응력확대계수

3.4 전단하중을 받는 편축균열

본 절은 전단하중을 받으면서 3.3절의 예제와 동일한 크기를 갖는 판부재 내의 길이 3.5in의 편축균열을 고려한다. 판부재의 바닥은 고정되어 있고, 상단에는 전단하중 $\tau=1.0\text{psi}$ 이 작용한다. 표 2에는 계산된 응력확대계수를 Yau 등(1980)이 제시한 이론해와 비교했다. 대체로 높은 정확도를 보이지만, 모드 I의 경우가 모드 II에 비해 좀 더 정확한 응력확대계수 값을 주었다. 그림 14는 σ_{yy} 응력을 도시했으며 균열선단의 응력집중 현상을 잘 묘사하고 있음을 알 수 있다.

표 2 전단하중을 받는 편축균열 문제의 응력확대계수 계산결과

파괴모드	이론해 ($\text{psi}\sqrt{\text{in}}$)	이동최소제곱 유한차분법	상대오차 (%)
모드 I	34.00	33.78	0.65
모드 II	4.55	4.48	1.54

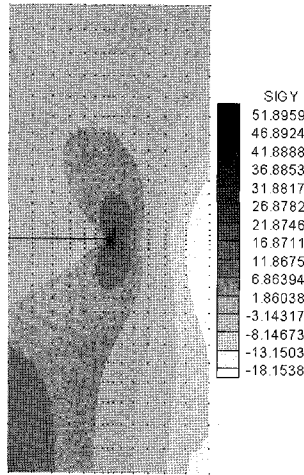


그림 14 전단응력을 받는 편축균열문제 σ_{yy} 응력(psi)

3.5 국소화 밴드 문제로의 적용을 통한 검증

본 절에서는 특수공학문제로서 변위나 응력이 좁은 국소부위에 띠처럼 집중되어 급격하게 변하는 국소화 밴드(localization band) 문제를 해석한다. 대칭성에 기인하여 그림 15와 같은 1/4 모형을 고려한다.

좁은 밴드 모양의 국소화 현상을 구현하기 위한 변위장은 식 (9), 식 (10)과 같다.

$$u_x(r, \theta) = \beta_1(r) \cos \theta \quad (9)$$

$$u_y(r, \theta) = (\beta_2 r + \beta_1(r)) \sin \theta \quad (10)$$

여기서, $\beta_2=1.0$, β_1 은 국소화 형태를 결정하는 함수로서 다음과 같다.

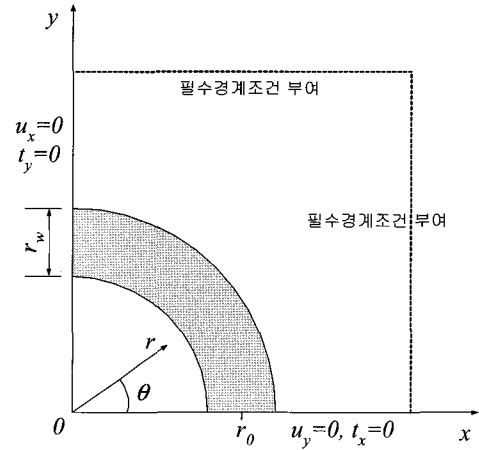


그림 15 국소화 밴드 1/4 해석모델

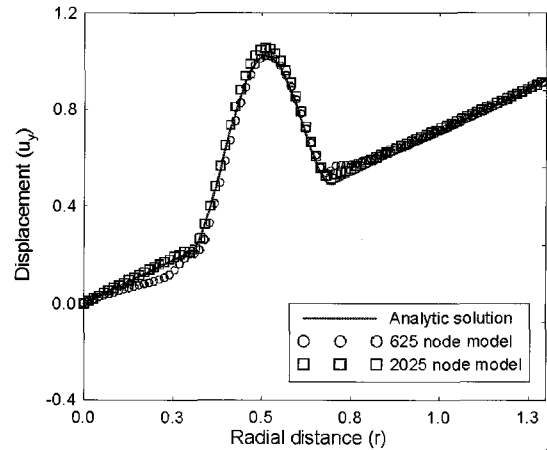


그림 16 국소화 밴드문제의 변위해와 이론해의 비교(u_y)

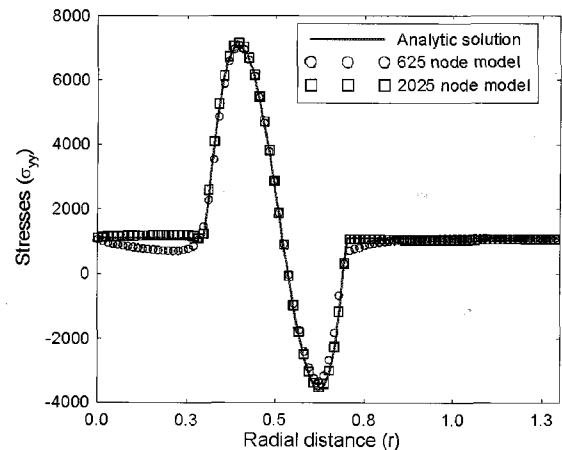


그림 17 국소화 밴드문제의 응력해와 이론해의 비교(σ_{yy})

$$\beta_1(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{if } |\omega| > 1 \\ \frac{15}{16}(1 - 2\omega^2 + \omega^4) & \text{if } |\omega| \leq 1 \end{cases} \quad (11)$$

윗 식에서 $\omega = (r - r_0)/r_w$ 이며, $r_0 = 0.5$, $r_w = 0.3$ 로 가정했다.

해석시 2차 Taylor 다항식을 사용했으며, 625개와 2025개의 절점을 일정한 간격으로 분포시킨 모델을 사용했다. 적은 수의 절점으로는 국소화 밴드로 인해 국부적으로 급격하게 변하는 변위와 응력을 정확히 묘사하지 못하므로 밴드 주변에 충분한 절점이 배치되어야 한다. 그림 16과 그림 17에는 각각 $\theta=45^\circ$ 인 경우 변위(u_y)와 응력(σ_{yy}) 계산결과를 도시했으며, 이를 통해 이동최소제곱 유한차분법이 균열문제뿐 아니라 응력집중 문제도 정확하고 효율적으로 해석할 수 있음을 알 수 있다. 정확도의 향상을 원하면 해의 급격한 변화가 발생하는 부분에 적응적(adaptive) 절점배치 사용하여 절점의 밀도를 부분적으로 높여주는 방법을 사용할 수도 있다.

4. 결 론

본 연구의 전편에서는 Taylor 전개와 이동최소제곱법을 조합한 이동최소제곱 유한차분법을 정식화 했고, 후편인 본 논문에서는 수치예제를 통해 개발된 해석기법의 수치적 강건성, 정확성, 불연속 문제 모델링의 효율성을 검증했다. 본 해석방법은 Galerkin 정식화에 따른 수치적분, 무요소법 형상함수 미분계산의 비효율성을 극복하고 지배 미분방정식의 직접적인 이산화를 통해 계산속도를 획기적으로 향상시켰다. 근사미분을 사용하기 때문에 가중함수 선택에 제약이 없고, 경계조건 처리도 간편하여 수치기법 활용의 편리함을 더해 주었다. 고체문제 해석시 지배방정식의 직접 이산화로 인해 최소 2차 미분까지 필요하지만, 이동최소제곱법을 이용해 간단히 계산했다.

내민보 문제를 해석한 결과 이동최소제곱 유한차분법이 기존의 수치해석기법의 수렴률과 경쟁할 수 있는 높은 수렴률을 보였다. 탄성균열문제에서는 기존의 무요소법이나 확장 유한요소법에서 사용하는 특별한 확장기법 없이도 균열선단 주변에서 절점의 밀도를 높이는 적응적 절점배치를 통해 정확한 응력확대계수를 산정했다. 균열에 의한 불연속 효과도 차분식 구성시 포함되는 절점을 조절하여 손쉽게 반영했다. 균열성장으로 인한 기하학적 형상변화 역시 간단한 절점 조작을 통해 효율적으로 묘사할 수 있었다. 고도의 응력집중을 포함한 국소화 밴드 문제에서는 변위해의 급격한 변화뿐 아니라 더욱 변화가 심한 응력까지도 성공적으로 계산되었다.

결과적으로 이동최소제곱 유한차분법은 변위 또는 응력이 불연속성이나 특이성을 갖는 특수공학적 문제에서도 높은 정확성과 효율성을 보이는 매력적인 수치기법임을 확인했다. 비정규적인 grid 구조에 불리한 기존의 유한차분법과 달리

비정규적인 절점 배치에도 수치적인 강건성을 유지한다. 개발된 수치기법은 해가 특이성, 불연속성을 갖는 문제, 적응적 절점구성이 필요한 응력집중 문제, 복잡한 형상을 갖는 3차원 문제 등에도 쉽게 확장될 수 있을 것으로 기대된다.

감사의 글

본 논문은 2003년도 학술진흥재단의 지원(KRF-2003-042-D20115)에 의하여 연구되었으며 이에 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

- Erdogan, F., Sih, G. C. (1963) On the Crack Extension in Plates under Loading and Transverse Shear. *Journal of Basic Engineering*, Vol. 85, pp.519~527.
- Fleming, M., Chu, Y. A., Moran, B., Belytschko, T. (1997) Enrichment element-free Galerkin methods for crack tip fields. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, pp.1483~1504.
- Lee, S-H., Yoon, Y-C. (2003) An improved crack analysis technique by element-free Galerkin method with auxiliary supports. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56, pp.1291~1314.
- Lee, S-H., Yoon, Y-C., Kim, Y. (2005) New Local Near-Tip Functions for the Element-Free Galerkin Method. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 21, pp.133~148.
- Moran, B., Shih, C. F. (1987) Crack tip and associated domain integrals from momentum and energy balance. *Engineering Fracture Mechanics*, 27, pp.615~641.
- Tada, H., Paris, P. C., Irwin, G. R. (1973) The stress analysis of cracks handbook. Del Research Corporation.
- Timoshenko, S. P., Goodier, I. N. (1970) Theory of Elasticity. 3rd edition, McGraw-Hill, New York.
- Yau, J., Wang, S., Corten, H. (1980) A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity, *Journal of Applied Mechanics*, 47, pp.335~341.