

이동최소제곱 유한차분법을 이용한 응력집중문제 해석(I) : 고체문제의 정식화

Analysis of Stress Concentration Problems Using Moving Least Squares Finite Difference Method (I) : Formulation for Solid Mechanics Problem

윤 영 철* 김 호 진** 김 동 조*** 윈 캄 리우**** 테드 벨리치코**** 이 상 호†
Yoon, Young-Cheol Kim, Hyo-Jin Kim, Dong-Jo Wing Kam Liu Ted Belytschko Lee, Sang-Ho
(논문접수일 : 2007년 6월 1일 ; 심사종료일 : 2007년 6월 26일)

요 지

본 연구에서는 미분 가능한 함수가 Taylor 전개로 표현되고 그 계수들은 주어진 함수와 미분에 대한 근사값을 제공할 수 있다는 점에 착안하여 m차 Taylor 다항식을 구성하고 이동최소제곱법을 이용하여 그 계수들을 구했다. 계산된 근사함수와 미분을 콜로케이션 개념을 바탕으로 균열 문제를 포함하는 고체문제에 대한 지배 미분방정식에 적용하여 차분식 형태의 이산화된 계방정식을 구성하였다. 본 연구의 해석기법은 격자망(grid)에 의존적이고 근사함수가 없는 유한차분법과 형상함수의 미분과 약형식의 적분산정, 필수경계조건 처리가 어려운 Galerkin법 기반의 무요소법의 단점을 효과적으로 극복한 새로운 수치기법이다.

핵심용어 : Taylor 다항식, 이동최소제곱법, 균열, 차분식

Abstract

The Taylor expansion expresses a differentiable function and its coefficients provide good approximations for the given function and its derivatives. In this study, m-th order Taylor Polynomial is constructed and the coefficients are computed by the Moving Least Squares method. The coefficients are applied to the governing partial differential equation for solid problems including crack problems. The discrete system of difference equations are set up based on the concept of point collocation. The developed method effectively overcomes the shortcomings of the finite difference method which is dependent of the grid structure and has no approximation function, and the Galerkin-based meshfree method which involves time-consuming integration of weak form and differentiation of the shape function and cumbersome treatment of essential boundary.

Keywords : *taylor polynomial, moving least squares method, crack, difference equations*

1. 서 론

Nayroles 등(1992)이 분산요소법(diffuse element method)을 제안한 이후, Belytschko 등(1994)과 Liu 등(1995)이 무요소법(meshfree method)의 형태를 갖춘 Element-free Galerkin(EFG)법과 재생커널 무요소법(Re-

producing Kernel Particle Method; RKPM)을 각각 개발하였고, 그 뒤 무요소법은 유한요소법, 경계요소법과 같이 대표적인 수치해석기법의 하나로 자리매김 해오고 있다. 무요소법은 요소망(mesh) 구성을 위한 connectivity의 극복이란 측면에서 유한요소법의 대안으로 인식되고 있으나 형상함수와 그 미분 계산시 계산비용이 크고 필수경계조건 처리가 어렵다

† 책임저자, 연세대학교 사회환경시스템공학부 교수

Tel: 02-2123-2808 ; Fax: 02-364-5300

E-mail: lee@yonsei.ac.kr

* 명지전문대학 토목과 조교수

** 연세대학교 사회환경시스템공학부 연구원 공학박사

*** 연세대학교 사회환경시스템공학부 박사과정

**** Department of Mechanical Engineering, Northwestern University Professor

* 이 논문에 대한 토론을 2007년 10월 31일까지 본 학회에 보내주 시면 2007년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

는 단점이 계속 지적되고 있다. 약형식을 피하기 위한 시도로써, 최소제곱 정식화가 Park 등(2001)에 제안되었으나 그러한 방법은 1차 편미분방정식과 같은 저차의 기법(scheme)에 적합하다는 것이 보고되었다. Luo 등(2002)이 제안한 이동최소제곱근사에 근거한 일반화된 유한차분법은 수치적분을 배제했으나, 무요소 형상함수를 직접 미분하는 과정이 매우 복잡하고 계산시간이 오래 걸려서 공학문제에 적용하는데 많은 어려움이 있다.

기존의 무요소법이 Galerkin 정식화에 근거한 유한요소법에 상응하는 수치해석기법이라면 최근에는 콜로케이션 정식화에 근거하여 유한차분법과 대응될 수 있는 해석기법들이 제안되었다(Kim 등, 2003; Lee 등, 2004). 이 기법들은 무요소 근사함수의 미분계산비용을 대폭 감소시키고 경계조건 처리를 단순화하는 등 기존 무요소법의 단점을 극복했다는 점에서 큰 의미를 갖는다. 본 연구는 강정식화(strong formulation)에 근거하여 적분방정식의 도입없이 지배 미분방정식을 직접 이산화함으로써 이와 같이 연구들과 맥을 같이 한다. 본 연구에서 제시하는 수치기법의 핵심은 이동최소제곱법에 근거한 Taylor 전개와 콜로케이션법에 근거한 차분식 구성에 있다. 이는 약정식화를 사용하지 않기 때문에 수치적분이 필요치 않으며 약정식화에 근거한 수치기법들보다 개선된 수렴률을 보여준다. 또한, 필수경계조건 만족을 위한 특수 기법도 필요 없으며, 균열성장과 같은 기학학적 형상이 변하는 문제에 대해서도 무요소법이 갖고 있는 요소망을 사용하지 않는 장점을 발휘한다. 본 논문에서는 고체역학의 응력집중문제 특히 균열전파문제를 정식화하는 과정을 중심으로 서술하고, 본 논문의 후속 편에서는 제안된 수치기법의 강건성, 정확성, 효율성의 검증을 위해 국소화 밴드 문제와 균열성장 문제를 해석한다.

2. 이동최소제곱법에 근거한 유한차분식

2.1 1차원 Taylor 다항식을 이용한 미분근사

미분 가능한 함수 $u(x) \in C^m(\bar{\Omega})$ 가 주어졌을 때, 한 점 \bar{x} 를 기준으로 $u(x)$ 의 Taylor 급수 전개식은 다음과 같다.

$$u(x) = u(0) + xu^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2!}u^{(2)}(0) + \dots + \frac{x^m}{m!}u^{(m)}(0) + H.O.T. \quad (1)$$

윗 식에서 m 차 이상의 고차항을 제외한 다항식을 Taylor 다항식이라 부르며, 다음과 같은 벡터형태로 다시 쓸 수 있다.

$$u_L(x) = \begin{pmatrix} 1, x, x^2, \dots, x^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u^{(1)}(0) \\ u^{(2)}(0) \\ \vdots \\ u^{(m)}(0) \end{pmatrix} \quad (2)$$

국부중심(local center) \bar{x} 와 팽창계수(dilation parameter) ρ 를 이용하여 위 식을 아래와 같이 다시 쓸 수 있다.

$$u_L(x, \bar{x}) = u(\bar{x}) + \left(\frac{x-\bar{x}}{\rho}\right) \frac{\rho}{1!} u^{(1)}(\bar{x}) + \left(\frac{x-\bar{x}}{\rho}\right)^2 \frac{\rho^2}{2!} u^{(2)}(\bar{x}) + \dots + \left(\frac{x-\bar{x}}{\rho}\right)^m \frac{\rho^m}{m!} u^{(m)}(\bar{x})$$

$$= \begin{pmatrix} 1, \left(\frac{x-\bar{x}}{\rho}\right), \left(\frac{x-\bar{x}}{\rho}\right)^2, \dots, \left(\frac{x-\bar{x}}{\rho}\right)^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\bar{x}) \\ \rho u^{(1)}(\bar{x}) \\ \frac{\rho^2}{2!} u^{(2)}(\bar{x}) \\ \vdots \\ \frac{\rho^m}{m!} u^{(m)}(\bar{x}) \end{pmatrix} \quad (3)$$

식 (3)은 기존의 무요소법에서 정의하는 \bar{x} 근방의 x 에 대한 국부근사함수(local approximation)와 유사한 형태이다. 이제, 식 (3)의 열벡터에서 스케일링 계수(scaling factor)에 대한 대각행렬을 이용해 다음과 같이 미분계수를 분리할 수 있다.

$$u_L(x, \bar{x}) = \begin{pmatrix} 1, \left(\frac{x-\bar{x}}{\rho}\right), \left(\frac{x-\bar{x}}{\rho}\right)^2, \dots, \left(\frac{x-\bar{x}}{\rho}\right)^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\rho}{1!} & 0 \\ 0 & \frac{\rho^2}{2!} & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\rho^m}{m!} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\bar{x}) \\ u^{(1)}(\bar{x}) \\ u^{(2)}(\bar{x}) \\ \vdots \\ u^{(m)}(\bar{x}) \end{pmatrix} = \mathbf{p}_m^T(x, \bar{x}) \mathbf{S} \mathbf{U}^h(\bar{x}) \quad (4)$$

여기서 \mathbf{S} 는 스케일링 계수(scaling factor)를 대각항에 갖고 있는 행렬, $\mathbf{U}^h(\bar{x})$ 는 Taylor 다항식의 미분계수를 모은 벡터이다.

이제 미지의 미분계수 $\mathbf{U}^h(\bar{x})$ 를 계산하기 위해 해석대상 내에 분포시킨 절점들 중 국부근사함수의 근사에 포함시킬 절점들을 결정하고 이 절점들에 대해 이동최소제곱법을 적용

하여 다음과 같은 잔차식을 구성한다.

$$J := \sum_{l \in \Lambda_{\bar{x}}} w\left(\frac{x-\bar{x}}{\rho}\right) \left[\mathbf{p}_m^T(x_l, \bar{x}) \mathbf{S} \mathbf{U}^h(\bar{x}) - u_l \right]^2 \quad (5)$$

위 식의 $w\left(\frac{x-\bar{x}}{\rho}\right)$ 는 가중함수(weight function)를 나타내며 미분에 대한 요구조건이 없기 때문에 임의의 함수를 사용할 수 있다. 이때, \mathbf{S} 는 식 (4)에서 보듯이 이미 알고 있으므로, 미지의 미분계수벡터 $\mathbf{U}^h(\bar{x})$ 의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{S} \mathbf{U}^h(\bar{x}) = \mathbf{M}^{-1}(\bar{x}) \mathbf{P}(\bar{x}) \mathbf{W}(\bar{x}) \mathbf{u}^h \quad (6)$$

여기서 $\mathbf{u}^h = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T$ 는 N 개의 절점에 대한 절점해를 포함하는 벡터이고, $\mathbf{M}(\bar{x})$ 는 기존의 무요소법에서 '모멘트 매트릭스'라고 불리는 행렬이며 다음과 같다.

$$\mathbf{M}(\bar{x}) = \mathbf{P}^T(\bar{x}) \mathbf{W}(\bar{x}) \mathbf{P}(\bar{x}) \quad (7)$$

이때, $\mathbf{P}(\bar{x})$ 는 interpolation 이론에서 나오는 Vandermonde 행렬과 매우 유사하며,

$$\mathbf{P}(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 1 & \left(\frac{x_1-\bar{x}}{\rho}\right) & \dots & \left(\frac{x_1-\bar{x}}{\rho}\right)^m \\ 1 & \left(\frac{x_2-\bar{x}}{\rho}\right) & \dots & \left(\frac{x_2-\bar{x}}{\rho}\right)^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \left(\frac{x_N-\bar{x}}{\rho}\right) & \dots & \left(\frac{x_N-\bar{x}}{\rho}\right)^m \end{bmatrix} \quad (8)$$

의 형태를 갖고 $\mathbf{W}(\bar{x})$ 는 대각선 성분에 각 이웃절점들에 대한 가중함수를 갖는 다음과 같은 행렬이다.

$$\mathbf{W}(\bar{x}) = \begin{bmatrix} w\left(\frac{x_1-\bar{x}}{\rho}\right) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & w\left(\frac{x_N-\bar{x}}{\rho}\right) \end{bmatrix} \quad (9)$$

이제 \bar{x} 를 x 로 치환하면 국부근사함수(local approximation) $u_L(x, \bar{x})$ 는 전역근사함수(global approximation) $u(x)$ 로 변환되고 더 이상 \bar{x} 에 의존하지 않는 x 만의 함수가 된다. Li 등(2002)는 이를 'moving process'라 부르기도 했다. 이동최소제곱법을 이용하여 Taylor 다항식의 미분계수에 대한 근사값 $\mathbf{U}^h(x) = (u(x), u^{(1)}(x), \dots, u^{(m)}(x))^T$ 를 다음과 같이 얻게 된다.

$$\mathbf{U}^h(x) = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{M}^{-1}(x) \mathbf{P}(x) \mathbf{W}(x) \mathbf{u}^h \quad (10)$$

위 식으로부터 x 에서의 매우 좋은 근사함수와 그 미분들을 얻을 수 있다. 결국 기존의 무요소법에서 정의하는 미지 벡터는 $\mathbf{u}(x)$ 에 대한 Taylor 전개식의 미분계수 값에 스케일링 계수(scaling factor)를 곱한 값들을 포함하는 벡터 즉, $\mathbf{S} \mathbf{U}^h(x)$ 와 같다는 것을 알 수 있다. \mathbf{S} 의 역할은 모멘트 행렬의 역수(inverse) 계산시 행렬의 조건수(condition number)를 좋게 해주는 것이다.

기존 무요소법에서 기준점 x 에 대한 영향영역 내의 절점들에 대한 형상함수는 식 (11)과 같다.

$$(\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_N(x)) = \mathbf{p}_m^T(x, \bar{x}) \Big|_{\bar{x}=x} \mathbf{M}^{-1}(x) \mathbf{P}(x) \mathbf{W}(x) \quad (11)$$

본 연구의 근사식 식 (10)의 우변에서 절점해 \mathbf{u}^h 의 앞에 있는 행렬들은 기존 무요소 근사함수의 형상함수의 형태를 취한다. 두 식을 비교하면 식 (10)의 \mathbf{S} 는 다항식기저벡터 $\mathbf{p}_m^T(x, \bar{x}) \Big|_{\bar{x}=x}$ 또는 그 미분과 상관이 있음을 알 수 있다. 기존 무요소법은 식 (11)과 같은 형상함수를 계산한 후, 다시 x 에 대해 직접 미분하여 도함수를 계산했다. 이 과정에서 가중함수에 대한 미분이 개입되고 모멘트 행렬의 미분을 계산해야 하는 불편함이 발생했다. 또한, 기존 무요소법이 식 (11) 우변의 $m \times N$ 행렬 중에서 첫째 행만을 사용하여 형상함수를 구성하고 나머지 행의 값들은 전혀 사용하지 않는 반면 본 연구의 근사함수는 $\mathbf{S}^{-1} \mathbf{M}^{-1}(x) \mathbf{P}(x) \mathbf{W}(x)$ 행렬의 첫째 행은 근사함수로 사용하고, 나머지 항들은 형상함수의 미분근사에 사용한다. 이는 기존의 무요소법이 형상함수의 도함수 계산에 많은 시간이 필요했던 것에 비해 형상함수와 도함수를 동시에 얻게 되므로 계산효율을 획기적으로 향상시킨 것이다.

Taylor 다항식의 미분계수에 대한 식 (10)을 형상함수와 그 미분을 이용하여 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ u^{(1)}(x) \\ \vdots \\ u^{(m)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1(x) & \Phi_2(x) & \dots & \Phi_N(x) \\ \Phi_1^{(1)}(x) & \Phi_2^{(1)}(x) & \dots & \Phi_N^{(1)}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1^{(m)}(x) & \Phi_2^{(m)}(x) & \dots & \Phi_N^{(m)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \Phi \mathbf{u}^h \quad (12)$$

위 식에서 각 α 번째 행(row)은 영향영역 내의 절점들의 형상함수에 대한 α 차 미분을 나타내고, l 번째 열(column)은 절점 l 에 대한 형상함수(또는 형상함수의 0차미분)와 m

차까지의 형상함수 미분근사를 나타낸다. Φ 은 형상함수와 그 미분을 모두 포함하는 행렬이다. 식 (10)과 식 (12)로부터 Φ 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Phi = S^{-1}M^{-1}(x)P(x)W(x) \quad (13)$$

흥미로운 점은 이와 같은 형상함수와 그 미분은 기저다항식에서 채택한 m 차 다항식에 대해 재생성(reproducing property)을 갖는다는 것이다(Lee 등, 2004). 여기서 '재생성'은 다항식기저의 조합으로 표시될 수 있는 함수와 그 미분은 본 연구의 근사함수를 사용하여 정확하게 재생할 수 있다는 의미이다. 유한차분법의 개념에서는 재생성 차수 m 은 일관성 차수(order of consistency)와 동일하다.

미분방정식의 강형식(strong form)을 사용하는 경우, 유한차분법이 그러하듯이, 수치적분이 없기 때문에 수학적으로 엄밀하지 않은 근사적인 미분을 사용해도 재생성의 의미에서 미분값을 재생할 수 있다면 정도 높은 계방정식을 구성할 수 있다. 이동최소제곱법으로 계산된 Taylor 다항식의 계수를 사용하는 근사함수와 미분근사는 '재생성'을 갖기 때문에 미분방정식을 직접 이산화하는 본 연구의 정식화 과정에 잘 적용될 수 있다. 그러나 수학적으로 엄밀하게 유도된 미분값이 아니기 때문에 약형식(weak form)에 근거한 정식화를 하는 경우 형상함수 미분값의 적분을 수행하는 과정에서 오차가 다소 크게 발생할 수 있기 때문에 주의할 필요가 있다(Krongauz 등, 1997). 매우 뾰족한 형상을 갖는 가중함수를 도입하여 오차를 어느 정도 감소시킬 수 있으나 수학적으로는 본 연구의 근사함수가 약형식과 잘 맞지 않음을 의미한다(윤영철 등, 2005).

2.2 다차원 Taylor 다항식을 이용한 미분근사

1차원 공간의 미분가능한 함수 $u(x)$ 에 대해 적용했던 이동최소제곱법을 이용한 Taylor 다항식의 전개는 2차원, 3차원 공간으로 그대로 확장될 수 있다. 편의상, 다중지수(multi-index) notation을 사용한다. 벡터의 제곱연산을 다중지수로 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (14)$$

여기서 벡터 α 의 크기는 $|\alpha| = \sum \alpha_i$ 이고, n 은 공간의 차원이다. \mathbf{x} 에 관한 α 차 미분연산자 D_x^α 는 아래와 같다.

$$D_x^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} \quad (15)$$

미분 가능한 함수 $u(\mathbf{x}) \in C^m(\bar{\Omega})$ 를 국부중심 $\bar{\mathbf{x}}$ 를 기준으로 $u(\mathbf{x})$ 의 Taylor 전개하면

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{|\beta| \leq m} \left(\frac{\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}}{\rho} \right)^\beta \frac{\rho^{|\beta|}}{\beta!} D_x^\beta u(\bar{\mathbf{x}}) + R_m(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \quad (16)$$

로 쓸 수 있다. 위 식에서 $R_m(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ 은 잔차항인데 잔차항을 제외한 Taylor 다항식을 취하면, 무요소법에서 정의하는 국소근사함수(local approximation)와 동일한 형태의 근사함수식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$u_L(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{p}_m^T \left(\frac{\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}}{\rho} \right) \mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}) \quad (17)$$

위 식은 1차원 경우의 식 (3) 또는 식 (4)를 벡터차원 확장한 것으로 $\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{S}U^h(\bar{\mathbf{x}})$ 이다. 이동최소제곱법을 통해 잔차에 대한 가중함수식(weighted square functional)을 세우고 최소화한 후 $\bar{\mathbf{x}}$ 를 \mathbf{x} 로 치환하면 Taylor 다항식의 미분계수를 구할 수 있다.

결국 $u(\mathbf{x})$ 의 α 차 미분에 대한 근사는 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ 의 α 차 성분을 취하여 얻을 수 있다. 이 때 차수는 lexicographic 순서를 따른다. 이를 수식으로 표현하면 Taylor 다항식의 α 차 미분계수 $D_x^\alpha u(\mathbf{x})$ 와 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ 의 관계는 다음과 같다.

$$D_x^\alpha u(\mathbf{x}) \approx \frac{\alpha!}{\rho^{|\alpha|}} (\mathbf{e}_\alpha^T \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x})) \quad (18)$$

여기서 \mathbf{e}_α 는 α 차 성분이 1인 단위벡터이고, $\frac{\alpha!}{\rho^{|\alpha|}}$ 는 미지 계수벡터의 α 차 성분과 Taylor 다항식의 α 차 미분계수를 연관시켜주는 스케일링 계수(scaling factor)이다. 본 연구에서 Taylor 다항식과 이동최소제곱법을 이용하여 주어진 함수의 미분을 근사하는 기법은 '분산미분(diffuse derivative)'을 이용하여 동일한 결과를 얻을 수 있다(윤영철 등, 2005).

다차원의 경우에도 1차원에 대한 식 (12)와 같은 형상함수 행렬식을 유도할 수 있다. m 차까지의 Taylor 다항식의 미분계수들을 모아 형상함수 행렬식을 구성하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} D^{(0, \dots, 0)} u(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ D^{(0, \dots, m)} u(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1(x) & \dots & \Phi_N(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1^{(0, \dots, m)}(x) & \dots & \Phi_N^{(0, \dots, m)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \Phi u^h \quad (19)$$

결과적으로 본 연구의 근사기법은 격자망(grid)의 구성이 필요하고 근사함수를 갖고 있지 못한 유한차분법과 달리 적절히 배치된 절점만으로 근사함수와 그 미분을 간단히 계산해준다. 기존의 무요소법과 비교하면, 복잡한 형상함수의 미분계산이 근사함수를 계산하는 수고만으로 근사함수와 동시에 얻어지는 장점이 있어서 미분방정식을 직접 이산화하여 고차 미분이 요구되는 수치기법에 효과적으로 적용될 수 있고, 약형식 적분을 위한 계산비용도 절감할 수 있다.

3. 콜로케이션법의 잔차식에 근거한 미분방정식의 이산화

경계 Γ 로 둘러싸인 영역 Ω 내의 선형탄성 구성방정식과 미소변형을 가정하는 고체역학 문제를 고려한다(그림 1 참조). 지배 미분방정식은 변위 u 와 체적력 b 를 이용하여 표현하면 다음과 같다.

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot u) + \mu\nabla^2 u = -b \text{ in } \Omega \text{ (평형방정식)} \quad (20)$$

$$\sigma \cdot n = \bar{t} \text{ on } \Gamma_t \text{ (자연경계조건)} \quad (21)$$

$$u = \bar{u} \text{ on } \Gamma_u \text{ (필수경계조건)} \quad (22)$$

여기서 $\nabla^2 (= \nabla \cdot \nabla)$ 는 Laplace 연산자이며, n 은 자연경계 Γ_t 에서의 단위수직벡터이고, \bar{t} 은 규정된 표면력이다. 응력 대신 변위로 표현된 평형방정식 식 (20)을 'Navier 방정식'이라 부른다. 자연경계조건 식 (21)도 역시 다음과 같이 변위만의 방정식으로 표현할 수 있다.

$$2\mu(\varepsilon \cdot n + \lambda(\text{tr} \varepsilon)I \cdot n) = \bar{t} \text{ on } \Gamma_t \quad (23)$$

여기서 $I = \delta_{ij} e_i \otimes e_j$ 은 2차 단위텐서, λ 및 μ 는 Lamé 상수, $\text{tr}(\varepsilon)$ 는 변형율텐서의 trace이다. 균열해석시 균열표면은 식 (23)의 자연경계조건을 이용하여 표면력이 0인 조건($\sigma \cdot n = 0$)을 부여한다.

유한차분법에서 Taylor 전개식을 이용하여 차분식을 구성하는 것과 유사하게 본 연구에서는 콜로케이션법(collocation method)의 잔차(residual)개념을 이용하여 지배미분방정식을 직접 이산화한다. 이동최소제곱법으로 계산한 Taylor 다항식의 첫 번째 계수는 근사함수로, 나머지 계수들은 고려하는 함수의 미분에 대한 근사값으로 활용한다. 직접 이산화에 의한 강 정식화(strong formulation)에서는 미분에 대한 재생성(reproducing property) 또는 완전성(completeness) 만이 정식화를 위한 필요충분조건이다. 완전성(completeness)에 대한 자세한 내용은 Belytschko 등(1998)을 참조할 수 있다. 2.1절에서 전술했듯이, 이동최소제곱 Taylor 다항식의 계수

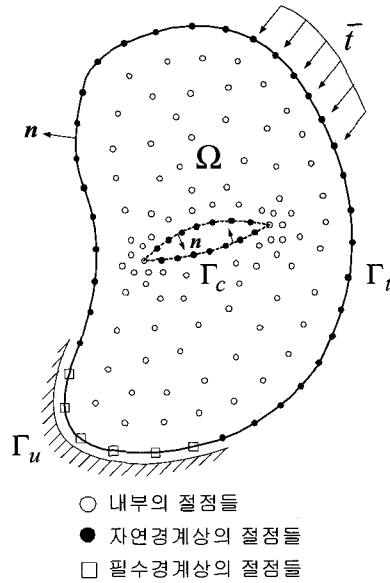


그림 1 해석대상의 절점을 이용한 이산화 (내부영역 Ω , 경계영역 $\Gamma = \Gamma_t \cup \Gamma_u$)

들이 재생성을 갖기 때문에 계방정식 구성을 위한 정식화에 성공적으로 적용될 수 있다. 잔차식을 모아 구성된 계방정식은 유한차분법의 차분식과 유사한 형태를 취한다. 식 (20)~(22)의 지배 미분방정식을 이산화방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\|Lu(x_I) - b(x_I)\|_{L^\infty} = 0, \quad x_I \in \Omega \text{ and } I \in \Lambda_\Omega \quad (24)$$

$$\|B_t u(x_J) - \bar{t}(x_J)\|_{L^\infty} = 0, \quad x_J \in \Gamma_t \text{ and } J \in \Lambda_t \quad (25)$$

$$\|u(x_K) - \bar{u}(x_K)\|_{L^\infty} = 0, \quad x_K \in \Gamma_u \text{ and } K \in \Lambda_u \quad (26)$$

식 (24)~(25)에서 L , B_t 는 지배방정식과 자연경계에 대한 미분연산자인데, 각각 식 (20)과 식 (23)을 이산화하여 얻어진다. Λ_Ω , Λ_t , Λ_u 는 각각 내부영역, 자연경계, 필수경계에 놓인 절점들의 집합이다. 식 (24)~(26)을 조합하면 최종적으로 다음과 같은 시스템 방정식을 얻는다.

$$Ku^h = F \quad (27)$$

여기서 $K = (K^\Omega, K^{\Gamma_t}, K^{\Gamma_u})^T$, $F = (F^\Omega, F^{\Gamma_t}, F^{\Gamma_u})^T$ 이다. K^Ω , K^{Γ_t} , K^{Γ_u} 는 각각 내부영역과 자연경계, 필수경계에 대해 이산화 방정식을 만족시키는 계수행렬들이고, F^Ω , F^{Γ_t} , F^{Γ_u} 는 각각 내부영역과 자연경계, 필수경계에 대한 일반화된 힘벡터들이다. 위 식의 계수행렬 K 는 banded되어 있으나 대칭은 아니다. 그러나 고려하는 이산화방정식의 미분 차수에 따라 팽창계수 ρ 를 적절하게 곱해주면 K 의 특성을 효과적으로 개선(conditioning)할 수 있고, 결과적으로 행렬

K 의 조건수(condition number)를 향상시킬 수 있다.

이동최소제곱법으로 구한 Taylor 다항식은 근본적으로 유한차분법의 차분식과 비슷하지만 구별되는 특성이 있다. 구성한 Taylor 다항식은 차분식과 달리 근사함수(approximation) 또는 형상함수(shape function)을 갖고 있기 때문에 해석영역 내의 임의의 위치에서 해와 미분값(응력, 변형률)을 용이하게 계산할 수 있다. 균열의 응력확대계수 계산시, 임의의 위치에서의 응력값이 필요한데 이와 같은 특성은 매우 유용하다. 또한 개발된 해석기법은 격자망(grid)이나 요소망(mesh)에 의존적인 유한차분법, 유한요소법과 달리, 경계를 포함한 해석영역 내에 적절하게 배치된 절점들만으로 근사함수를 포함한 원하는 차수의 미분을 손쉽게 계산할 수 있는 장점이 있다. 더욱이, 기존의 무요소법은 필수경계조건을 만족시키기 위해 Penalty 기법이나 Lagrange 확대계수법과 같은 추가의 구속조건식을 동원해야 하고, 대부분 약형식(weak form)에 근거하기 때문에 다항식(polynomial)이 아닌 형상함수의 미분값을 적분할 때 정확도를 확보하기 어렵고 적분식을 계산하는 시간이 오래 걸리는 단점이 있었다. 그러나 본 연구에서 개발된 수치기법은 이러한 단점을 훌륭히 보완하면서 동시에 균열전파와 같이 불연속면의 기하학적 형상이 변하는 문제에 유리한 무요소법의 장점을 유지해준다.

4. 결 론

해석영역 내에 절점을 적절하게 배치하고 이동최소제곱법을 이용하여 Taylor 다항식을 구성하면 지배 미분방정식에 대한 차분식을 구성할 수 있다. 다항식기저벡터와 미지의 미분계수로 구성된 Taylor 다항식의 계수들은 고려하는 함수값에 대한 근사함수와 그 미분값을 포함하고 있다. 이 계수들은 이동최소제곱법을 이용하여 한꺼번에 구할 수 있으며, 일관성 차수(order of consistency)까지 미분을 정확하게 재생하기 때문에 국부영역에서 매우 우수한 근사함수와 그 미분값을 제공한다. 콜로케이션법의 잔차식 개념에 근거하여 Taylor 다항식의 계수들을 적용함으로써 지배 미분방정식을 직접 이산화하였다. 약형식이나 적분방정식의 구성없이 해석대상 내의 각 절점에서 유한차분법의 차분식과 유사한 형태의 계방정식을 구성하였다. 계방정식을 풀어서 얻어진 절점해와 Taylor 다항식에서 얻은 미분근사를 이용하여 임의의 위치에서 변위와 응력(또는 변형률)을 계산할 수 있다.

본 연구에서 개발된 해석기법은 근사함수를 갖고 있기 때문에 기존의 유한차분법과 달리 임의의 위치에서 함수값이나 그 미분값을 자유롭게 계산할 수 있게 되며, 이는 응력확대계수 계산을 위해 임의의 위치에서의 응력값의 계산을 필요

로 하는 균열문제에도 효과적으로 적용될 수 있게 해준다. 유한차분법이 격자망(grid)에 매우 의존적이고 근사함수식이 없어 임의의 위치에서 함수값의 계산이 어려웠던 단점을 극복할 수 있다. 또한, Galerkin법에 근거한 무요소법의 관점에서 보면, 본 연구의 해석방법은 적분식 구성에 따른 계산 비용 절감과 필수경계조건 처리를 위한 추가적인 구속방정식을 도입할 필요가 없는 장점이 있다. 더욱이 근사함수를 계산하는 비용만으로 근사함수의 미분값까지 얻을 수 있기 때문에 근사함수의 미분계산에 많은 비용이 들었던 기본 무요소법을 획기적으로 개선할 수 있다. 본 해석기법은 특정한 미분방정식에만 적합한 수치기법이 아니고 유한요소법이나 유한차분법과 같이 어떤 문제에도 적용될 수 있는 수치기법이 되며, 다양한 특수 공학적 문제에도 효과적으로 적용될 수 있을 것으로 기대된다. 본 연구의 후속 편은 수치예제의 해석을 통해 탄성론 문제뿐만 아니라 균열과 같이 불연속면과 응력의 특이성을 갖는 문제에서도 높은 정확도를 갖는 해를 얻을 수 있음을 보여준다.

감사의 글

본 논문은 2002년도 학술진흥재단의 지원(KRF-2002-042-D00115)에 의하여 연구되었으며 이에 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

- 윤영철, 서창범, 김명원, 이상호 (2005) 무요소법의 약정식화 와 강정식화를 위한 일관된 분산미분근사 (1) : 수학적 이론배경 및 이산화. 대한토목학회논문집, 25(5), pp.907~913.
- Belytschko, T., Lu, Y. Y., Gu, L. (1994) Element-free galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, pp.229~256.
- Belytschko, T., Krongauz, J., Dolbow, J., Gerlach, C. (1998) On the completeness of Meshfree particle methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43, pp.785~819.
- Kim, D. W., Kim, Y-S. (2003) Point collocation methods using the fast moving least square reproducing kernel approximation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56, pp.1445~1464.
- Krongauz, Y., Belytschko, T. (1997) A Petrov-Galerkin diffuse element method (PG DEM) and its comparison to EFG.. *Computational Mechanics*, 19, pp.327~333.

- Lee, S. H., Yoon, Y. C.** (2004) Meshfree point collocation method for elasticity and crack problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61, pp.22~48.
- Li, S., Liu, W. K.** (2002) Meshfree and particle methods and their applications. *Applied Mechanics Review*, 55, pp.1~34.
- Liu, W. K., Jun, S., Zhang, Y.** (1995) Reproducing kernel particle methods. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 20, pp.1081~1106.
- Luo, Y., Häussler-Combe, U.** (2002) A generalized finite-difference method based on minimizing global residual. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, pp.1421~1438.
- Moran, B., Shih, C. F.** (1987) Crack tip and associated domain integrals from momentum and energy balance. *Engineering Fracture Mechanics*, 27, pp.615~641.
- Nayroles, B., Touzot, G., Villon, P.** (1992) Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, 10, pp.307~318.
- Tada, H., Paris, P. C., Irwin, G. R.** (1973) The stress analysis of cracks handbook, *Del Research Corporation*.
- Park, S. H., Yoon, S. K.** (2001) The least-squares meshfree method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52, pp.997~1012.
- Yoon, Y. C., Lee, S. H., Belytschko, T.** (2006) Enriched Collocation Method with Diffuse Derivatives for Elastic Fracture. *Computers & Mathematics with Applications*, 51, pp.1349~1366.