

Kanai-Tajimi 필터 인공지진 가진된 마찰형 감쇠를 갖는 구조물의 변위 응답 확률분포

Probability Distribution of Displacement Response of Structures with Friction dampers Excited by Earthquake Loads Generated Using Kanai-Tajimi Filter

윤 경 조† 박 지 훈* 민 경 원** 이 상 현***
Youn, Kyung-Jo Park, Ji-Hun Min, Kyung-Won Lee, Sang-Hyun
(논문접수일 : 2007년 5월 17일 ; 심사종료일 : 2007년 7월 6일)

요 지

마찰형 감쇠를 갖는 구조물은 구조물의 고유주기, 하중의 특성, 그리고 외부하중에 대한 마찰력의 상대적인 크기에 따라 강한 비선형성을 나타내므로, 구조물의 최대응답을 예측하기 매우 어렵다. 기존의 연구에서는 비선형 시스템을 등가의 선형 시스템으로 치환하거나, 구조물의 비선형 시간이력해석을 통한 응답스펙트럼 분석에 의한 간단한 확률해석에 의해 수행되었다. 지진 하중은 불확실성과 불규칙성을 갖고 있기 때문에 확률적으로 정의된다면, 지진하중을 받는 마찰형 감쇠를 갖는 구조물의 응답 역시 확률분포를 나타낼 것이다. 본 논문에서는 Kanai-Tajimi 필터를 이용해 생성된 인공지진하중에 대해 마찰형 감쇠를 갖는 구조물의 비선형 시간이력 해석이 수행되었다. 그리고 정규분포 확률밀도 함수에 선형 회귀분석을 통해 얻어진 구조물의 주기와 마찰력의 크기에 의한 변수를 업데이트 시킨 마찰형 감쇠를 갖는 구조물의 변위 응답 확률밀도함수식이 제시된다.

핵심용어 : 마찰형 감쇠장치, 확률밀도함수, 비선형시스템, 최대변위예측

Abstract

The accurate peak response estimation of a seismically excited structure with frictional damping system(FDS) is very difficult since the structure with FDS shows nonlinear behavior dependent on the structural period, loading characteristics, and relative magnitude between the frictional force and the excitation load. Previous studies have estimated that by replacing a nonlinear system with an equivalent linear one or by employing the response spectrum obtained based on nonlinear time history and statistical analysis. In the case that an earthquake load is defined with probabilistic characteristics, the corresponding response of the structure with FDS has probabilistic distribution. In this study, nonlinear time history analyses were performed for the structure with FDS subjected to artificial earthquake loads generated using Kanai-Tajimi filter. An equation for the probability density function (PDF) of the displacement response is proposed by adapting the PDF of the normal distribution. Finally, coefficients of the proposed PDF are obtained by regression analysis of the statistical distribution of the time history responses. Finally, the correlation between PDFs and statistical response distribution is presented.

Keywords : frictional damping device, probabilistic density function, nonlinear system analysis, estimation of peak displacement

1. 서 론

마찰형 감쇠장치는 건축구조물의 진동제어 분야에 있어서,

지진이나 바람과 같은 동적 하중을 받는 대형 토목 및 건축 구조물에 설치되어, 구조물의 변형 및 운동에너지를 마찰현상을 이용하여 소산시켜주는 장치로서 전세계적으로 널리 이

† 책임저자, 학생회원 · 단국대학교 건축공학과 석사과정

* 정회원 · 인천대학교 건축공학과 전임강사

** 정회원 · 단국대학교 건축공학과 교수

*** 교신저자, 정회원 · 단국대학교 건축공학과 조교수

Tel: 031-8005-3735 ; Fax: 031-8005-3741

E-mail: lshyun00@dankook.ac.kr

· 이 논문에 대한 토론을 2007년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2008년 2월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

용되고 있다. 마찰현상을 이용하여 구조물의 에너지를 소산시키는 장치로서 대표적인 예로는 마찰감쇠기(friction damper), 금속형 감쇠기(metallic damper), 그리고, 준능동 제어 장치로서 전기신호크기를 조절함으로써 가변적인 마찰력을 구현하는 ER damper, MR damper 등이 있다(Soong and Dargush, 1997). 이들 모두 구조물에 설치되어 구조물의 에너지 소산능력을 현저히 증가시키면서 고유주기에는 크게 영향을 미치지 않는다는 장점 때문에 실제 많은 건축 및 토목구조물에 적용되고 있으며, 최근에도 많은 연구와 실험이 진행되고 있다(Chopra, 2001).

그러나 마찰형 감쇠장치가 설치된 구조물은 감쇠장치의 마찰력과 외부의 동적하중의 상대적 크기와 지진하중의 주파수 특성에 크게 영향을 받는 비선형 거동특성을 보이기 때문에 구조물의 최대응답을 정확히 예측하는 것은 어렵다. 지진은 바람과 같이 불규칙적인 특성을 갖고 있기 때문에 확률과정으로 모델링되며, 이에 대한 구조물의 동적 응답 역시 확률과정으로서 그 크기를 산정함에 있어서 확률적 특성을 고려하여야 한다(박지훈, 2002).

기존의 연구에서도 비선형 시스템의 응답에 대한 확률분포를 이용한 연구가 진행되었다. 박지훈, 강경수는 마찰감쇠기-가새 시스템이 설치된 비선형 시스템을 확률분포를 기반으로 등가의 선형시스템으로 치환하여 응답을 예측하였고(박지훈과 강경수, 2006), 이상현 등은 수동형 MR 감쇠장치의 최적의 상대 마찰력을 찾기 위해 수동형 MR 감쇠장치가 설치된 단자유도 구조물의 응답스펙트럼을 20개의 역사지진으로 수치해석을 통한 평균값을 장주기 구조물과 단주기 구조물의 최대변위, RMS변위, 최대가속도, RMS 가속도를 제시하였다(이상현 등, 2007). 그러나 기존의 대부분의 연구에서는 일반적으로 예측 값의 확률분포 특성을 정의하기 보다는 단순한 통계처리를 통해 얻어지는 평균값과 표준편차 정도만을 제시하였다.

한편, 비선형 구조물의 응답의 확률밀도함수식에 대한 연구도 활발히 진행되었다. Cai와 Lin은 백색잡음 가진입력에 대해 비선형 구조물의 응답에 대한 확률밀도함수식을 Fokker-Planck 방정식을 풀어서 제시하였다(Cai and Lin, 1988). 그러나 일반적으로 닫힌 형태의 해를 가지지 않는 Fokker-Planck 방정식을 풀기위해 하중은 백색잡음이고 비선형 시스템이 등가의 선형시스템으로 치환하는 등의 다양한 조건을 가정하였기 때문에 실제 지진하중을 받는 구조물 응답의 분포 특성과는 다른 값을 제시할 수 있다.

본 연구에서는 먼저 백색잡음에 Kanai-Tajimi 필터를 통과시켜 생성한 인공 지반가속도를 사용하여 마찰감쇠 장치가 설치된 다양한 주기의 구조물에 대한 비선형 시간이력해석을

수행한다. 외부의 지진하중과 마찰감쇠장치의 상대적 마찰력의 크기에 대한 비를 정규화된 마찰력으로 정의하고, 기존의 백색잡음을 사용한 Cai와 Lin의 연구결과를 수정하여, Kanai-Tajimi 필터를 포함시켜 확률분포함수를 정규화된 마찰력과 구조물의 고유주기에 관한 식으로 유도한다. 최종적으로 수치해석 결과에 대한 회귀분석을 통해 제시된 확률 밀도함수의 정확성을 분석한다.

2. 수치해석 모델링

2.1 가진입력설정

본 연구에서 지반가속도는 Kanai-Tajimi 필터를 통과시킨 백색잡음으로 모델링하며, 이 때 지반 가속도는 백색잡음 가진을 받는 단자유도 진동계의 절대 가속도 응답으로 나타난다. 여기서 Kanai-Tajimi 필터는 다음 단자유도 운동방정식으로 표현될 수 있다.

$$\ddot{x}_f + 2\xi_f \omega_f \dot{x}_f + \omega_f^2 x_f = -w \quad (1)$$

$$E[w(t)w(t+\tau)] = 2\pi S_w \delta(\tau) \quad (2)$$

여기서, x_f 는 단자유도 진동계의 변위, ω_f 는 진동계의 고유진동수, ξ_f 는 진동계의 감쇠비, w 는 백색잡음 가진입력, S_w 는 백색잡음의 파워스펙트럼밀도, 그리고 $\delta(\tau)$ 는 Dirac delta 함수이다. 필터의 고유진동수와 감쇠비는 지반의 성질에 따라서 그 값이 변하는데, Kanai는 암반지반에서는 필터의 고유진동수는 15.6rad, 감쇠비는 60%를 사용할 것을 제시하였다(Clough and Penzien, 1993).

마찰형 감쇠를 갖는 구조물의 비선형 시간이력 거동을 통해 최대응답을 확률적으로 예측함에 있어 가진입력의 강도가 중요하다. 본 연구에서는 가진입력의 크기를 등가의 백색잡음 파워스펙트럼밀도(Power Spectral Density, PSD)로 나타낸다. 이 등가의 백색잡음 파워스펙트럼밀도는 지반가속도를 모사하기 위한 Kanai-Tajimi 필터의 확률적 응답에 기초해서 구한다. 등가 백색잡음 파워스펙트럼 밀도를 구하기 위해 우선 필터의 입력이 되는 S_w 를 구하는 과정은 다음과 같다.

우선 필터의 응답 x_f 와 \dot{x}_f 의 표준편차는 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$\sigma_{x_f}^2 = \frac{\pi S_w}{2\xi_f \omega_f^3} \quad \sigma_{\dot{x}_f}^2 = \frac{\pi S_w}{2\xi_f \omega_f} \quad (3)$$

이를 기초로 단자유도 진동계의 절대가속도 \ddot{x}_a 의 표준편차를 구하면 다음과 같다.

$$\sigma_{\ddot{x}_a}^2 = \frac{\pi S_w}{2\xi_f} [4\xi_f^2 \omega_f^2 + 1] \quad (4)$$

생성된 가진 입력의 S_w 는 다음과 같다.

$$S_w = \frac{2\xi_f \sigma_{\ddot{x}_a}^2}{\pi \omega_f (4\xi_f^2 + 1)} \quad (5)$$

여기서, \ddot{x}_a 의 표준편차 $\sigma_{\ddot{x}_a}^2$ 은 0.1g로 가정하였다.

위에서 유도된 S_w 는 구조물의 응답이 공진성분이 지배적인 협대역 확률과정일 경우 필터 통과 백색잡음을 등가의 백색잡음으로 치환해서 확률적 응답을 산정할 수 있다. 이 때 등가의 백색잡음 크기는 구조물의 고유진동수에 대한 필터 통과 백색잡음의 파워스펙트럼 밀도 크기로 산정할 수 있다 (Lutes and Sarkani, 1997). 식 (6)~(7)은 구조물의 고유진동수에 대한 필터 통과 백색잡음의 파워스펙트럼 밀도 $S_{\ddot{x}_a}$ 를 나타낸다.

$$S_{\ddot{x}_a} = \frac{1 + 4\xi_f^2 \beta^2}{[(1 - \beta^2)^2 + 4\xi_f^2 \beta^2]} S_w \quad (6)$$

여기서, β 는 $\frac{\omega_n}{\omega_f}$ 을 나타낸다.

2.2 마찰형 감쇠장치가 설치된 구조물의 모델링

2.1절에서 생성된 인공 지진하중을 가진 입력으로 하는 마찰형 감쇠장치가 설치된 구조물의 비선형 이력거동을 모사하기 위해 본 논문에서는 그림 1과 같이 간단한 쿨롬 마찰력으로 구성된 모델을 사용한다.

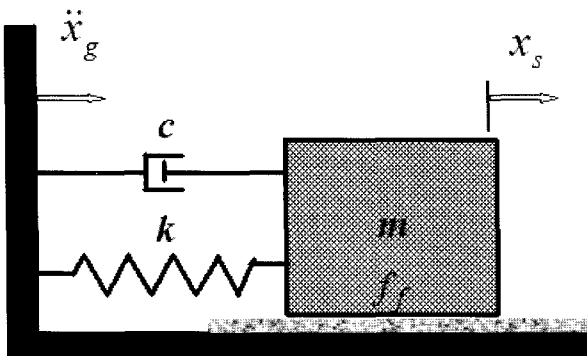


그림 1 마찰형 감쇠를 갖는 단자유도 구조물의 모델링

그림 1을 다시 마찰형 감쇠를 갖는 구조물 단자유도 구조물의 운동방정식으로 나타내면 식 (8)과 같다.

$$m_s \ddot{x}_s + c_s \dot{x}_s + k_s x_s = -m_s \ddot{x}_g - f_s \text{sgn}(\dot{x}) \quad (8)$$

식 (8)을 다시 질량정규화된 구조물의 운동방정식으로 구성하면 식 (9)와 같다.

$$\ddot{x}_s + 2\xi_s \omega_n \dot{x}_s + \omega_n^2 x_s = -\ddot{x}_g - \frac{f_f}{m_s} \text{sgn}(\dot{x}_s) \quad (9)$$

여기서 구조물의 질량 m_s 는 1로, 감쇠비 ξ_s 는 0.05를 갖는 것으로 가정한다.

일반적으로 마찰형 감쇠를 갖는 구조물의 제진 성능은 감쇠시스템에 가해지는 외부하중에 대한 마찰력의 상대적인 비율에 의해서 좌우된다. 따라서 본 논문에서는 감쇠시스템의 마찰력 f_f 를 구조물에 대하여 다음과 같은 무차원 변수를 사용하여 나타낸다.

$$\rho = f_f / f_s \quad (10)$$

여기서 f_s 는 구조물에 마찰형 감쇠시스템이 설치되지 않을 때의 RMS 변위에 대한 밀면전단력으로서 다음과 같이 주어진다.

$$f_s = k_s |x_o|_{RMS} \quad (11)$$

여기서 x_o 는 마찰형 감쇠장치가 설치되지 않을 때 즉 $\rho=0$ 일 때 예측되는 구조물의 RMS 변위응답 값을 기초로 한다.

앞서 구해진 $S_{\ddot{x}_a}$ 값을 이용하여 구조물의 RMS 변위응답을 예측하는 방법은 식 (12)와 같다(Lutes and Sarkani, 1997).

$$|x_o|_{RMS} = \sqrt{\frac{\pi S_{\ddot{x}_a}}{2\xi_s \omega_n^3}} \quad (12)$$

3. 확률밀도함수식

3.1 속도피드백 뱅뱅형 제어의 확률밀도함수식(Cai and Lin, 1988)

마찰형 감쇠장치가 설치된 구조물은 강한 비선형성으로 인해 응답의 확률밀도함수의 해석적 정해는 존재하지 않는다. 축소 Fokker-Planck 방정식의 해석해가 존재하지 않는 경

위에 확률밀도함수를 근사적으로 구하는 방법으로서 다양한 방법이 연구되어 왔다(Soong and Grigoriu, 1993).

본 장에서는 Cai와 Lin이 제안한 등가 비선형 시스템 (Equivalent Nonlinear System) 방법을 이용하여 마찰형 감쇠를 갖는 단자유도 구조물의 상대적 마찰력의 크기와 주기에 따른 확률 밀도함수 근사해를 검토해 본다.

Cai와 Lin이 유도한 마찰형 감쇠를 갖는 구조물의 비선형성을 등가의 선형으로 치환한 변위의 확률밀도 함수는 식 (13)과 같다.

$$\phi(H) = \frac{1}{\pi S \ddot{w}_s} \left[2\xi_s \omega_n H - \frac{4}{\pi} f_f \sqrt{2H} \right] \quad (13-a)$$

$$P(x, \dot{x}) = C \exp[-\phi(H)] \quad (13-b)$$

$$H = \frac{1}{2} (\dot{x}_s^2 + \omega_n^2 x_s^2) \quad (13-c)$$

여기서, H 는 등가 비선형계의 에너지 함수로서 식 (13)과 같다.

식 (13)에서 정규화 계수 C 는 다음과 같다.

$$C^{-1} = \frac{2\pi^3 (S \ddot{w}_s)^2}{w_n \left[\left(\frac{4}{\pi} \right) f_f \right]^2} \quad (14)$$

3.2 수정된 정규분포 확률밀도함수식

마찰형 감쇠장치가 설치된 단자유도 구조물의 응답의 확률 밀도함수는 확률밀도함수를 지배하는 편미분 방정식인 Fokker-Planck 방정식의 해를 풀어야만 한다. 그러나 3.1절에서 제시된 Cai와 Lin의 확률밀도함수는 일반적으로 닫힌 형태의 해를 가지지 않는 Fokker-Planck 방정식을 풀기 위해 하중이 백색잡음이고 비선형 시스템이 등가의 선형시스템으로 치환될 수 있다는 등의 다양한 조건을 가정하였기 때문에 실제 지진하중을 받는 구조물 응답의 분포특성과는 다른 값을 제시 할 수 있다. 따라서, 본 절에서는 상대적인 마찰력의 크기와 구조물의 고유주기를 반영하고, 구조물의 예측되는 변위 RMS 응답을 이용한 수정된 정규분포 확률밀도 함수식을 제안한다.

일반적인 확률통계분야에서 정규분포 확률밀도 함수는 다음과 같이 확률변수의 평균값과 표준편차값만으로 나타낼 수 있다.

$$P(X) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(X-m)^2}{2\sigma_x^2} \right] \quad (15)$$

식 (15)와 같은 일반적인 정규분포 확률밀도함수식을 바탕으로 4장의 수치해석 결과 얻어진 구조물의 전단력에 대한 상대적 마찰력의 크기 ρ 의 증가와 구조물의 고유주기 T_n 이 작아짐에 따른 확률밀도함수가 가운데로 좁아지고, 구조물의 최대변위가 작아지는 현상을 보정한 보정계수를 곱하여 다음과 같은 마찰형 감쇠를 갖는 단자유도 구조물의 변위응답의 수정된 정규분포 확률밀도 함수식이 식 (16)과 같이 제안한다.

$$P(x) = \frac{1}{(1-\alpha\rho)\sigma_{x_s}\sqrt{2\pi}} \exp \left[\frac{-(X_x-m)^2}{2(1-\alpha\rho)^2\sigma_{x_s}^2} \right] \quad (16)$$

여기서, α 는 구조물의 고유주기의 변화에 따른 보정계수로서, matlab 7.1의 내장함수인 LSQCURVEFIT을 이용한 회귀분석 계수를 나타내며, 식 (17)과 같다.

$$\alpha(T_n) = 0.5774 - 0.1251 T_n \quad (17)$$

4. 확률밀도함수 근사식의 통계적 검증

본 장에서는 앞서 유도된 마찰형 감쇠장치가 설치된 구조물의 확률밀도함수 근사식들의 정확성을 구조물의 주기에 따라 통계적 검증을 실시한다. 대상 구조물의 감쇠비는 5%로, 구조물의 주기는 0.5초와 1.5초를 각각 수행하였다. 총 가진 시간은 해당주기의 300배로 가진하였으며, 구조물의 응답이 충분히 정상상태에 도달한 상태인 해당주기의 30배, 즉 주기가 0.5초일 때는 15초부터 150초까지, 주기가 1.5초일 때는 45초부터 450초 사이의 해당하는 데이터로부터 확률밀도 함수를 구하였다.

그림 2와 3은 구조물의 고유주기가 각각 0.5초, 1.5초일 때, 기존 연구에서 Cai와 Lin에 의해 제안된 확률밀도함수들과 본 논문에서 제시된 수정된 정규 분포 확률밀도 함수식과 구조물의 비선형 시간이력해석과의 비

교를 보여준다. 그림 2에서도 알 수 있듯이 구조물의 주기가 0.5초인 구조물에서는 본 연구에서 제안된 수정된 정규분포 확률밀도 함수가 구조물의 ρ 가 증가함에 따른 구조물 변위 응답의 변화를 잘 묘사하는 경향을 볼 수 있다.

그림 3에서는 구조물의 고유주기가 1.5초인 구조물에서는 Cai 와 Lin이 제시한 확률밀도함수가 근사한 차이로 정확하다는 것을 알 수 있다. 하지만 다양한 가정과 복잡한 계산을 수반하는 기존의 확률밀도 함수식보다는 단지 구조물의 예측되는 변위의 RMS를 이용하는 수정된 정규분포확률밀도 함수식을 사용한다면, 보다 효율적인 마찰형 감쇠장치가 설치된 구조물의 최대변위응답을 예측할 수 있을 것이다. 다음으

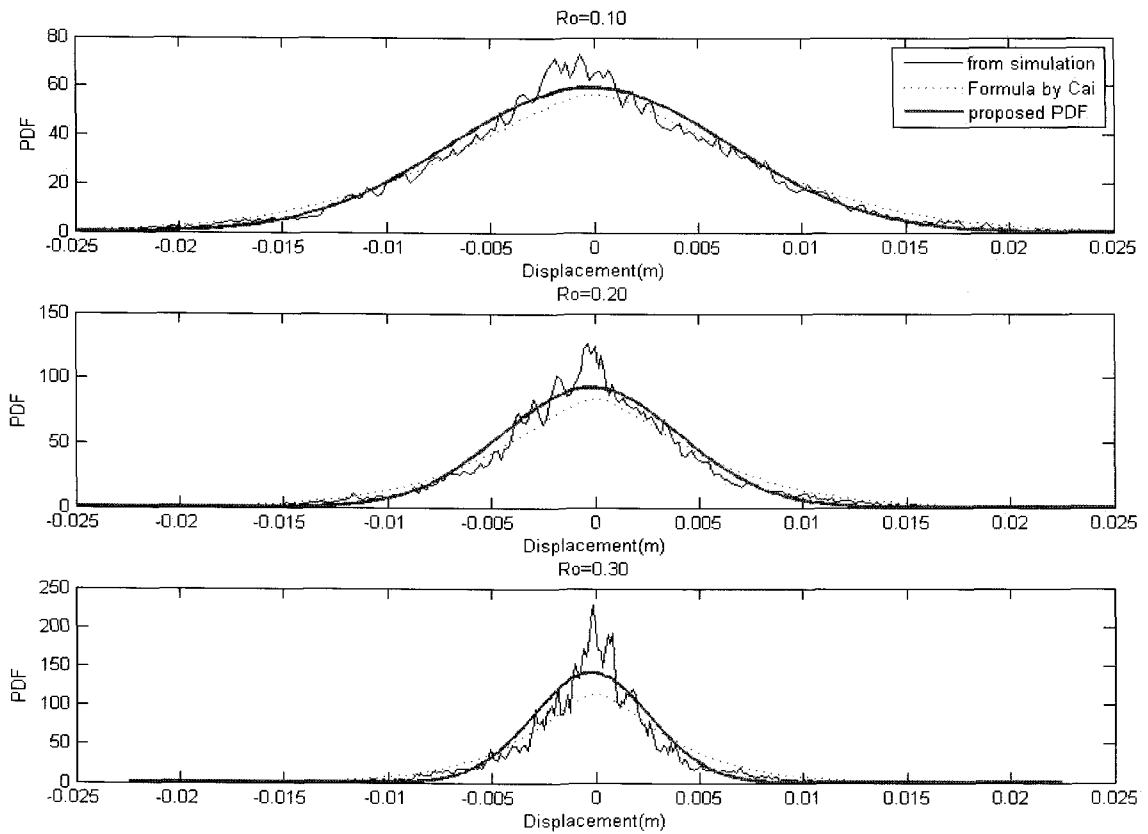


그림 2 마찰형 감쇠장치가 설치된 단자유도 구조물의 변위 확률밀도 함수 비교 그림 ($T_n=0.5$)

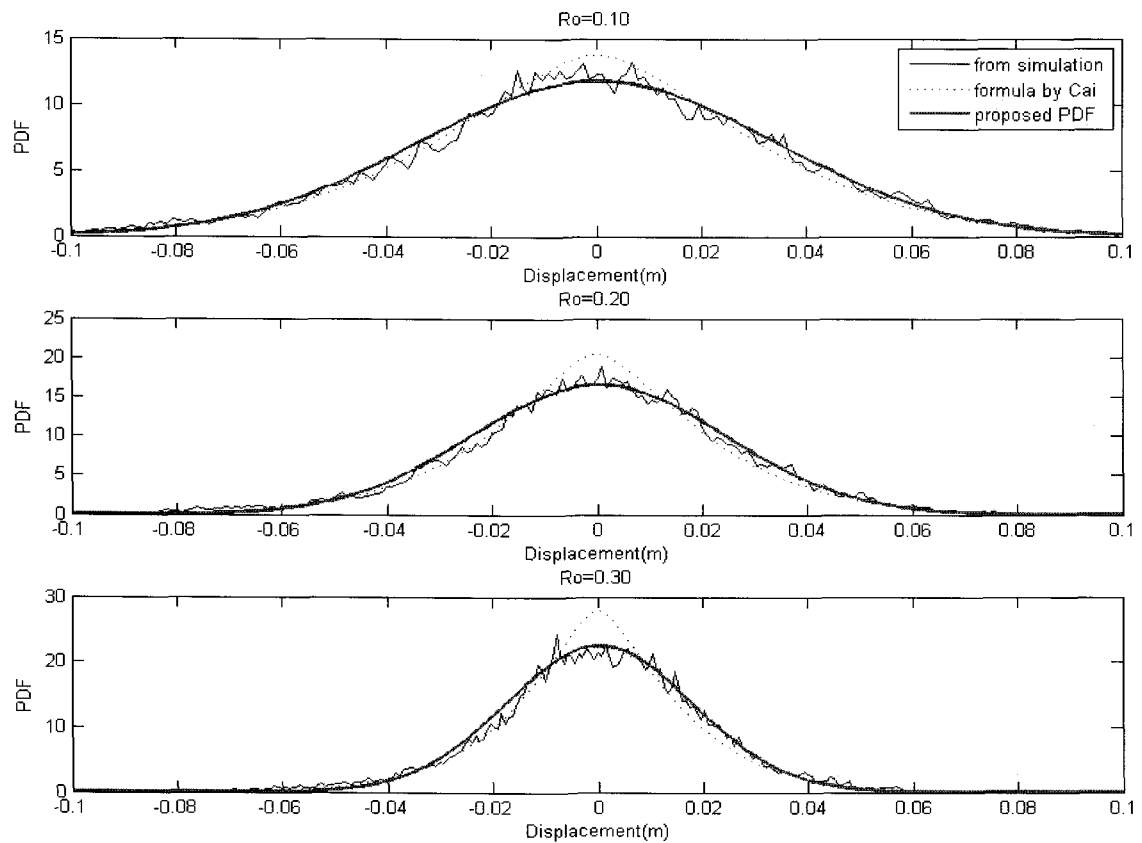


그림 3 마찰형 감쇠장치가 설치된 단자유도 구조물의 변위 확률밀도 함수 비교 그림 ($T_n=1.5$)

표 1 변위 확률밀도 함수 결정계수 비교

		Uncontrolled	$\rho=0.1$	$\rho=0.2$	$\rho=0.3$
주기=0.5초	PDF by Cai	0.9919	0.9812	0.9641	0.9046
	PDF proposed	0.9934	0.9857	0.9871	0.9578
주기=1.5초	PDF by Cai	0.9951	0.9915	0.9866	0.9837
	PDF proposed	0.9956	0.9889	0.9866	0.9882

로 위에서 나타난 수치해석 결과를 정량적으로 분석하였다. 표 1은 구조물을 크게 단주기와 장주기 구조물로 구분하여 각 주기별 ρ 의 변화에 따른 확률밀도함수식들의 결정계수(coefficient of determination)를 나타낸 결과이다. 표 1에서도 본 논문에서 제안한 수정된 정규분포 확률밀도 함수식은 기존 연구에서 Cai and Lin에 의해 제시된 확률 밀도 함수식과 비교하여 특히 단주기 구조물의 경우 ρ 의 변화에 따른 결정계수가 높게 나타나는 것을 알 수 있다. 또한 장주기 구조물의 경우에도 대부분의 본 논문에서 제시된 확률밀도 함수식의 결정계수(coefficient of determination)가 기존에 확률밀도 함수식과 크거나, 동등함을 알 수 있다. 특히 본 논문에서 제시된 확률밀도 함수식이 최대변위 예측에 있어서 다양한 가정과 복잡한 방정식을 풀어 구하는 기존의 확률밀도함수식보다, 비제어 구조물 변위 응답의 RMS값을 이용하여 간단히 구할 수 있는 제안식은 95%이상의 신뢰도를 나타내는 것을 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 확률적으로 정의되는 지진과 같은 가진 입력에 대해 마찰형 감쇠를 갖는 구조물의 변위 응답에 대한 확률밀도함수식을 제안하고, 수치해석 예제를 통해 그 정확성을 검증하였다.

먼저, Kanai-Tajimi 필터를 통과 시킨 백색 잡음을 지반 가속도의 파워 스펙트럼 밀도를 정의한 후, 구조물의 비제어시의 변위응답의 RMS값을 예측하였다. 구조물의 비제어시 변위 응답의 RMS값, 마찰형 감쇠장치의 마찰력 크기, 그리고 구조물의 고유주기를 이용하여 회귀분석을 통해 정규분포를 기반으로한 마찰형 감쇠를 갖는 구조물의 비선형성을 묘사할 수 있는 확률밀도함수식을 제안하였다. 그리고, 제안식의 유효성을 기존의 연구결과와 비교 평가하였다. 그 결과, 주기가 0.5초인 구조물에서는 기존에 제시된 식보다 높은 신뢰도를 나타내었고, 주기가 1.5초인 구조물의 경우에는 거의 동등하거나 약간 높은 신뢰도를 나타내는 것을 확인하였다.

추후로 실제 마찰형 감쇠를 갖는 다자유도 구조물을 등가의 단자유도 구조물로 치환함으로써, 실제 구조물의 내진 및

내풍 성능개선을 위한 마찰형 감쇠장치를 적용하기 위해 지진이나 바람과 같은 외부동적하중에 의한 구조물의 최대 변위 응답을 확률적으로 예측하는 연구가 필요하다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단 기초과학연구지원사업(R01-2007-000-10872-0)의 지원으로 수행되었으며 이에 감사드립니다.

참 고 문 헌

박지훈 (2002) 불규칙 가진에 대한 동적응답의 확률분포에 기초한 건축구조물의 진동제어, 박사학위, 서울대학교.

박지훈, 강경수 (2006) 마찰감쇠기-가새 시스템의 확률분포 기반 등가선형화에 관한 실험적 연구, 한국소음진동공학회 논문집, 16(4), pp.394~403.

이상현, 박지훈, 윤경조, 민경원 (2007) 마찰형 감쇠를 갖는 구조물의 응답스펙트럼, 한국소음진동공학회 논문집, 17(1), pp.88~94.

Cai, G. Q., Lin, Y. K. (1988) A New Approximate Solution Technique for Randomly Excited Non-linear Oscillators, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 23(5/6), pp.409~420.

Clough, R. W., Penzien, J. (1993) Dynamics of Structures, *McGraw-Hill*, Singapore.

Chopra, Anil K. (2001) Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering ; Second Edition, *Prentice Hall*, New Jersey.

Lutes, L. D., Sarkani, S. (1997) Stochastic Analysis of Structural and Mechanical Vibrations, *Prentice Hall*, New Jersey Engineering ; Second Edition, *Prentice Hall*, New Jersey.

Soong, T.T., Dargush, G. F. (1997) Passive Energy Dissipation Systems in Structural Engineering, *John Wiley & Sons*, Chichester.

Soong, T.T., Grigoriu, M. (1993) Random Vibration of Mechanical and Structural System, *Prentice Hall*, New Jersey.