

# 충격압축하중을 받는 횡등방성 중실축의 과도 동적해석

## Transient Dynamic Stress Analysis of Transversely Isotropic Cylinders Subject to Longitudinal Impact

오 근\*      심 우 진†  
Oh, Guen      Sim, Woo-Jin

(논문접수일 : 2007년 1월 23일 ; 심사종료일 : 2007년 3월 27일)

### 요 지

원형축이 축방향으로 충격하중을 받으면 외경에서 반사된 파가 축의 중앙으로 집중되어 순간적으로 큰 응력이 발생하게 된다. 본 연구에서는 여러 가지 충격 축하중을 받는 횡등방성 반-무한 원형축을 대상으로 중실축 내의 축방향 응력전파를 축대칭 유한요소법과 Houbolt 시간적분법을 이용하여 프로그램을 작성하고 수치적으로 해석하여 그 결과를 횡등방성 재료의 재료구성비에 따라 자세히 설명한다. 제시된 해법의 타당성은 본 논문의 수치 결과와 기 해석된 다른 해법에 의한 수치 결과의 비교를 통해 검증된다. 여러 종류의 충격하중들에 따른 파동의 결과를 2차원, 3차원적으로 제시하여 축응력 전파를 이해하는데 기본 자료가 되도록 하였다. 또한 유한요소법을 이용하여 수치해석을 함에 있어 정확한 수치결과를 얻기 위한 무차원 동특성 시간변수에 대해 기술하였다.

**핵심용어** : 충격하중, 횡등방성 중실축, 응력전파, 유한요소법

### Abstract

Elastic wave propagations in the semi-infinite transversely isotropic cylinder under various kinds of longitudinal impact loads are analyzed using the axisymmetric finite element method and Houbolt time-integration scheme. For which the finite element program is newly constructed and verified through the comparison of present numerical results with those by other researchers. E-type glass-epoxy composite cylinders with different fiber volume fractions are adopted and studied in detail with dynamic responses of the isotropic cylinder. Three dimensional wave motions are given in graphic form to show the realistic view of the wave propagation. Nondimensionalized dynamic characteristic variables which relate the size of finite element mesh, the time step, and the wave speed are presented for obtaining accurate and stable numerical results.

**Keywords** : impact load, transversely isotropic cylinder, stress propagation, finite element method

## 1. 서 론

일반적으로 탄성 원형축이 축방향으로 충격하중을 받게 되면 반경방향의 반사파 영향으로 축의 중심부에서 응력이 증폭되고 축방향의 종파와 중첩되어 정적인 경우에는 예측할 수 없는 응력분포와 큰 응력이 발생한다. 이 현상은 특히 하중이 가해지는 자유단 근처에서 그 영향력이 두드러져서 축의 파괴와 마모에 주원인이 된다. 그리고 이러한 충격 축하중을 받는 원형축은 건설, 광업 등 산업제반 분야에서 많이 사용되고 있으므로 그에 대한 연구는 필수적이다.

중실축이 등방성인 경우에 축방향 충격하중에 따른 응력과 해석은 많은 연구자들에 의해 이론적으로나 수치해석적으로 연구가 행해져 왔으며, 자세한 내용은 Lin 등(1995)을 참조하며, 국내의 경우에는 유사한 해석으로 김경수 등(1997), 황갑운 등(1995)이 있다.

중실축이 횡등방성일 경우에는 integral transform method (Shindo 등, 1997), method of characteristic(Mengi 등, 1971 ; Miklowitz 등, 1956), 그리고 method of finite differences along bicharacteristics(Liu 등, 1997) 해법들이 있으며, 국내의 경우에는 관련 논문을 찾을 수 없었다.

† 책임저자, 정회원 · 금오공과대학교 기계공학부 교수  
Tel: 054-478-7371 ; Fax: 054-478-7319  
E-mail: wjsim@kumoh.ac.kr

\* 금오공과대학교 기계설계공학과 대학원 박사과정

• 이 논문에 대한 토론을 2007년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2008년 2월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

본 연구에서는 이전의 충격내압을 받는 복합적층 중공구에 대한 1차원적인 동적해석(오근 등, 2005) 연구를 바탕으로, Houbolt 시간적분법을 이용한 유한요소해법을 이용하여 2차원적인 종방향 축대칭 동적해석을 수행한다. 제시된 해법의 정확성과 타당성을 보이기 위해 처음 예제는 다른 연구자들에 의해 기 해석되었던 문제를 풀었으며, 다음에는 여러 가지 다른 충격하중에 따른 수치결과들을 처음으로 제시하고 논의한다. 특히, 자유단 근처에서 파의 발생과 진행과정을 3차원 파동그래프로 제시하고, 반경방향 반사파가 종방향 파에 끼치는 영향을 상세히 밝힌다. 또한 유한요소수와 무차원 동특성 시간변수들이 수치결과에 미치는 영향이 조사된다.

## 2. 유한요소방정식

충격하중을 받는 선형 탄성 재료에 대한 편미분방정식을 반-변수분리법을 사용하여 공간상에서 이산화하면 다음과 같은 유한요소방정식이 얻어진다.

$$[M^{(e)}]\{\ddot{u}^{(e)}\} + [K^{(e)}]\{u^{(e)}\} = \{F^{(e)}\} \quad (1)$$

여기서,  $[M^{(e)}]$ ,  $[K^{(e)}]$ 와  $\{F^{(e)}\}$ 은 각 요소의 질량행렬, 강성행렬과 하중벡터이다. 그리고  $\{\ddot{u}^{(e)}\}$ ,  $\{u^{(e)}\}$ 은 각 절점의 가속도벡터, 변위벡터이다.

초기조건 및 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_i(r, z, 0) &= u_0, & \dot{u}_i(r, z, 0) &= \dot{u}_0 \\ u_i(r, z, t) &= \hat{u}_i, & T_i(r, z, t) &= \hat{T}_i \quad \text{on } S \end{aligned} \quad (2)$$

여기서,  $T_i$ 는 표면력 벡터이며,  $S$ 는 경계면을 의미한다.

식 (1)과 식 (2)로 구성된 초기치 문제를 풀기위한 Houbolt method는 다음과 같은 식들로 표현된다(Bathe, 1996).

$$[\hat{K}^{(e)}]\{u^{(e)}\}^{t+\Delta t} = \{\hat{F}^{(e)}\}^{t+\Delta t} \quad (3a)$$

여기서,  $[\hat{K}^{(e)}]$ 와  $\{\hat{F}^{(e)}\}$ 는 요소의 유효강성계수행렬과 유효절점력벡터이다.

$$[\hat{K}^{(e)}] = [K^{(e)}] + \frac{2}{\Delta t^2} [M^{(e)}] \quad (3b)$$

$$\begin{aligned} \{\hat{F}^{(e)}\}^{t+\Delta t} &= \{F^{(e)}\}^{t+\Delta t} + [M^{(e)}] \left\{ \frac{5}{\Delta t^2} \{x\}^t \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{\Delta t^2} \{x\}^{t-\Delta t} + \frac{1}{\Delta t^2} \{x\}^{t-2\Delta t} \right\} \end{aligned} \quad (3c)$$

식 (3)의 각 요소의 변위 및 질량행렬, 강성행렬을 축대칭 변수( $r, \theta, z$  좌표)로 정의하면 다음과 같다.

$$\{u(r, z)^{(e)}\} = [N^{(e)}]\{u^{(e)}\} \quad (4)$$

$$[M^{(e)}] = 2\pi \oint_{\Omega^{(e)}} \rho [N]^T [N] r dr dz \quad (5)$$

$$[K^{(e)}] = 2\pi \oint_{\Omega^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] r dr dz \quad (6)$$

$$\{F^{(e)}\} = 2\pi \int_{\Gamma_i} p(r, z, t) r dr \quad (7)$$

여기서,  $u$ 와  $w$ 는 반경방향변위와 축방향변위이고,  $[N]$ 은 요소의 형상함수 행렬이다. 그리고  $[B^{(e)}]$ 는 각각 요소의 변형률-변위 행렬로 다음과 같이 정의된다.

$$[B^{(e)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & \dots & \frac{\partial N_k}{\partial r} & 0 \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \dots & \frac{N_k}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \dots & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial r} & \dots & \frac{\partial N_k}{\partial z} & \frac{\partial N_k}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (8)$$

식 (3)으로부터 변위벡터  $\{u^{(e)}\}$ 를 구한 후, 다음 식을 이용하여 각 절점에서의 응력을 계산한다.

$$\{\sigma^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_r^{(e)} \\ \sigma_\theta^{(e)} \\ \sigma_z^{(e)} \\ \tau_{rz}^{(e)} \end{Bmatrix} = [D^{(e)}]\{\epsilon^{(e)}\} = [D^{(e)}][B^{(e)}]\{u^{(e)}\} \quad (9)$$

횡등방성 재료는 화이버와 매트릭스의 체적 비율로 공학적 탄성 계수들을 표현할 수 있다(Shindo 등, 1987).

(a)  $E_L$  : 종방향 영률계수

$$E_L = E_f v_f + E_m v_m \quad (10a)$$

(b)  $E_T$  : 횡방향 영률계수

$$E_T = E_m \frac{E_f + E_m + (E_f - E_m)v_f}{E_f + E_m - (E_f - E_m)v_f} \quad (10b)$$

(c)  $\mu_{LT}$  : 주 프와송비

$$\mu_{LT} = \mu_f v_f + \mu_m v_m \quad (10c)$$

(d)  $\mu_{TL}$  : 부 프와송비

$$\mu_{TL} = \mu_f v_f + \frac{1 + \mu_m - \Delta}{1 - \mu_m^2 + \Delta v_m} \mu_m v_m \quad (10d)$$

(e)  $G$  : 전단계수

$$G = G_m \frac{G_f + G_m + (G_f - G_m)v_f}{G_f + G_m - (G_f - G_m)v_f} \quad (10e)$$

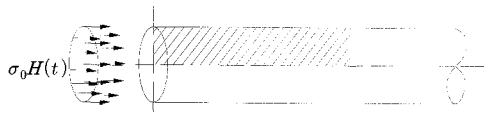


그림 1 충격 하중을 받는 반-무한 중실축의 기하학적 형상

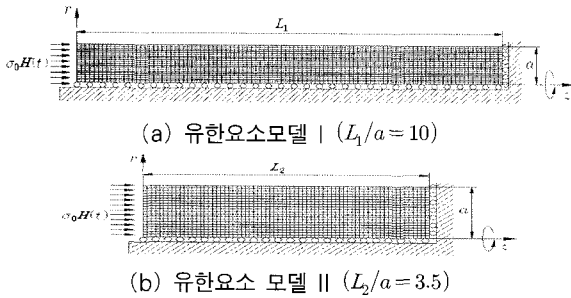


그림 2 중실축 해석을 위한 유한요소 모델

(f)  $v$  : 단위 체적

$$v_f + v_m = 1 \tag{10f}$$

(g)  $\rho_c$  : 밀도

$$\rho_c = \rho_f v_f + \rho_m v_m \tag{10g}$$

여기서,

$$\Delta = \frac{(\mu_f v_f + \mu_m v_m) E_m}{E_f v_f + E_m v_m}$$

여기서,  $E_f$ 은 화이버의 영률계수,  $E_m$ 은 매트릭스의 영률계수,  $\mu_f$ 은 화이버의 프와송비,  $\mu_m$ 은 매트릭스의 프와송비,  $G_f$ 는 화이버의 전단계수,  $G_m$ 은 매트릭스의 전단계수,  $v_f$ 는 화이버의 단위체적,  $v_m$ 은 매트릭스의 단위체적이다.

식 (10)을 이용하여 횡등방성 축대칭 중실축에 대한 요소의 물성행렬  $[D^{(e)}]$ 는 다음과 같이 정의된다(Zienkiewicz, 1991).

$$[D^{(e)}] = \frac{E_T}{(1 + \mu_{TL})(1 - \mu_{TL} - 2\mu_{LT}^2 m)} \times \begin{bmatrix} 1 - \mu_{LT}^2 m & \mu_{TL} + \mu_{LT}^2 m & \mu_{LT}(1 + \mu_{TL}) & 0 \\ & 1 - \mu_{LT}^2 m & \mu_{LT}(1 + \mu_{TL}) & 0 \\ & & (1 - \mu_{TL}^2)/m & 0 \\ \text{Symm.} & & & G \end{bmatrix} \tag{11}$$

여기서,  $m = E_T/E_L$ 이다.

### 3. 수치해석 예

횡등방성 재료로 구성된 축대칭 원형축에 대한 과도 동탄성 문제를 풀기 위한 시간적분법으로 Houbolt method를 사용하였다(오근 등, 2005).

표 1 재료의 물성값

Material	Young's modulus	Shear modulus	Poisson ratio	Density
unit	(GPa)	(GPa)	-	(kg/m <sup>3</sup> )
E-type glass	72.5	30.4	0.20	2.55×10 <sup>3</sup>
Epoxy	3.11	1.17	0.35	1.214×10 <sup>3</sup>

표 2 단위체적당 재료구성비

		$c_3/c_1$	$v_f$	$v_m$
Isotropic material	Material 1	1.0	0.000	1.000
	Material 2	1.5	0.101	0.899
Transversely Isotropic material	Material 3	1.8	0.2185	0.7815
	Material 4	2.0	0.435	0.565

표 3 유한요소 모델에 대한 동특성 시간변수

$c_3/c_1$	$L_1/a=10$		$L_1/a=3.5$	
	$\lambda_1^i$	$\lambda_3^i$	$\lambda_1^i$	$\lambda_3^i$
1.0	0.201	0.100	0.253	0.253
1.5	0.237	0.917	0.237	0.356
1.8	0.229	0.206	0.229	0.413
2.0	0.220	0.220	0.220	0.441

그림 1과 같은 반-무한 원형축이 축방향으로 충격압축하중을 받을 경우 원형축 내에서 시간의 경과에 따라 탄성파의 진행 과정을 해석하기 위해 그림 2에서처럼 두 가지 유한요소 모델을 이용하여 수치해석을 수행하였다.

그림 2(a)는 충격압축하중을 받는 반-무한 횡등방성 중실축의 장시간이 경과하여 정적인 해로 수렴하기까지 충격하중이 중실축에 미치는 영향을 보기 위한 유한요소모델로서 중실축의 두께와 축방향 길이의 비를  $L_1/a=10$  ( $L_1=324\text{mm}$ )으로 하였다. 해석에 사용된 요소의 개수는 반경방향으로 20개, 길이방향으로는 100개로 균등하게 분할하여 전체 2000개이며, 중횡비가 2인 등매개 2차요소를 사용하였다.

그림 2(b)는 자유단에서 가해진 충격압축하중에 의해 중실축의 물성값에 따른 파의 진행 과정을 3차원적인 입체파형으로 나타내기 위해 축방향 길이와 중실축의 두께의 비를  $L_2/a=3.5$  ( $L_2=113.4\text{mm}$ )으로 하였다. 해석에 사용된 요소의 개수는 반경방향으로 20개로 분할하였으며, 길이방향으로는 70개의 균등한 요소로 세분하여 전체 1400개이며, 좀더 자세한 3차원 파형을 얻기 위해 중횡비가 1인 등매개 2차요소를 사용하였다.

유한요소해석을 위한 경계조건으로는 반경  $r=0$ 인 곳과 축방향 길이  $z=L_1$ (or  $L_2$ )인 곳에서는 롤러지지를 하였다. 그리고 본 해석에서 사용된 축대칭 유한요소방정식에서는  $r=0$ 에서 면적적분이 무한대가 되어 응력이 무한대가 된다. 따라서  $r=0$ 에서의 응력은 중실축의 중심에 접한 요소의 중

간 절점( $r=0.025a$ )에서의 값으로 근사하였다.

수치해석에 사용된 횡등방성 중실축의 재질은 E-type glass-epoxy composite으로서 화이버와 매트릭스의 물성값은 표 1과 같으며, 단위체적당 화이버와 매트릭스의 구성비가 표 2에서와 같은 4가지 재료에 대해 수치해석을 수행하였다. 여기서  $c_3/c_1$ 는  $z$ 방향과  $r$ 방향으로의 전파속도의 비이며 단위체적당 재료구성비라고 정의한다(식 (13)참조).  $v_f, v_m$ 은 각각 단위체적당 화이버와 매트릭스의 체적이다.

표 3은 유한요소의 크기와 시간증분이 결합된 무차원 동특성 시간변수로서 표 2에서 선정된 4가지 재료에 대한 동특성 시간변수 값이다.

유한요소법으로 수치해석을 수행함에 있어 시간증분의 크기는 수치결과에 지대한 영향을 미치므로 적절한 시간증분의 선정이 중요하다. 요소의 한번의 길이  $l_j^{(e)}$ 에 대한 시간증분  $\Delta t$  동안 파가 진행한 거리의 비인 무차원 동특성 시간변수  $\lambda_j^i$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\lambda_j^i = \frac{c_j^i \Delta t}{l_j^{(e)}} \quad (j=1,2,3) \quad (12)$$

여기서,  $l_1^{(e)}$ 은  $r$ 방향으로 가장 작은 요소의 크기이고,  $l_3^{(e)}$ 은  $z$ 방향으로 가장 작은 요소의 크기이고,  $i=1\sim 4$ 는 표 2에 있는 각 재료의 번호이다.

각 재료에 대한  $r, \theta, z$ 방향으로의 전파속도  $c_k^i$ 는 다음과 같다.

$$c_r^i = \sqrt{D_{11}^i / \rho} \quad (13a)$$

$$c_\theta^i = \sqrt{D_{22}^i / \rho} \quad (13b)$$

$$c_z^i = \sqrt{D_{33}^i / \rho} \quad (13c)$$

여기서,  $D_{kk}^i$ 는 횡등방성 강성행렬 식 (11)의 성분이다.

### 3.1 Ramp step function

그림 3~6은 횡등방성 중실축의 자유단에 가해진 충격압축하중에 의해 중실축의 중심과 자유단 부근에서의 축방향 응력과 반경방향 응력의 계산결과들을 bicharacteristic 이론과 유한차분법을 이용하여 해석한 Liu 등(1997)의 결과와

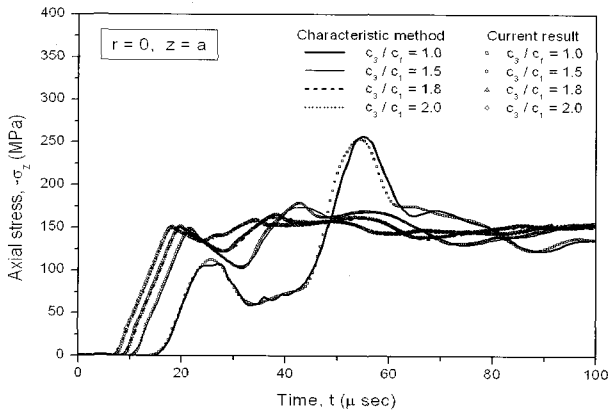


그림 3 중실축의  $r=0, z=a$ 에서 시간의 경과에 따른 축방향 응력분포 (Ramp step function)

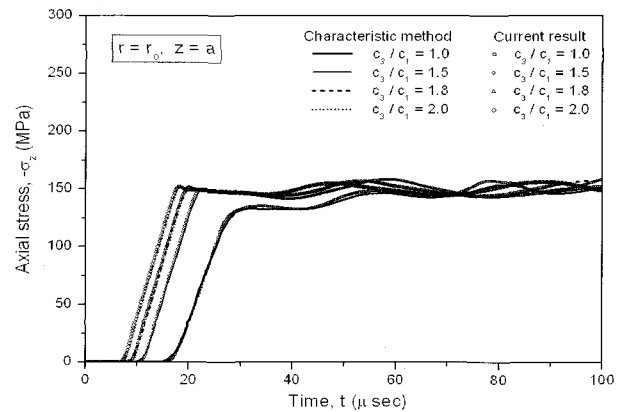


그림 4 중실축의  $r=a, z=a$ 에서 시간의 경과에 따른 축방향 응력분포 (Ramp step function)

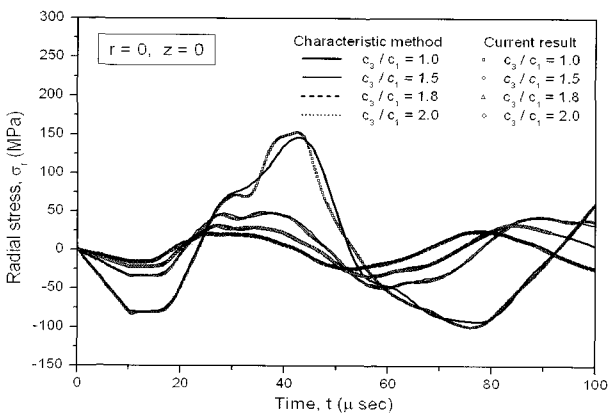


그림 5 중실축의  $r=0, z=0$ 에서 시간의 경과에 따른 반경방향 응력분포 (Ramp step function)

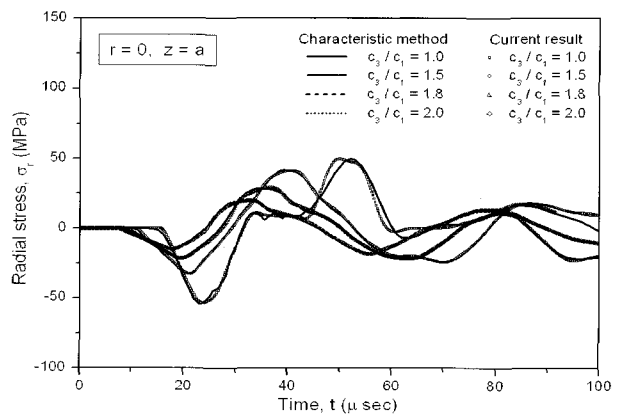


그림 6 중실축의  $r=0, z=a$ 에서 시간의 경과에 따른 반경방향 응력분포 (Ramp step function)

본 논문의 수치결과들과 비교이다. 이때 해석에 사용된 하중 함수는 다음과 같다.

$$F(t) = \begin{cases} \sigma_0 t / t_r & (0 < t \leq t_r) \\ \sigma_0 H(t) & (t > t_r) \end{cases} \quad (14)$$

여기서, 하중전환시간  $t_r = 10 \mu\text{sec}$ 이고,  $\sigma_0 = 150 \text{MPa}$ 이다(Liu 등, 1997).

두 수치해가 횡등방성 재료( $c_3/c_1 = 1.5, 1.8, 2.0$ )인 경우에는 전구간에서 잘 일치하고 있으나, 등방성 재료( $c_3/c_1 = 1.0$ )의 결과에서는 약간의 차이(그림 3의 전시간 구간에서 최대오차 4.5%)를 보이고 있다. 또한 등방성 중실축과 횡등방성 중실축의 거동에는 확연한 차이가 있음을 알 수 있다. 즉, 등방성 재료의 경우에는 응력의 상하 진폭의 차가 심하게 나타난다. 예를 들어 그림 3의 경우에 수치결과의 최대치는  $-254.25 \text{MPa}$ 로서 외부하중의 최대치  $\sigma_0$ 에 비해 거의 1.7배나 되고 있다. 결과적으로 횡등방성 재료를 사용하는 것이 더 유리함을 알 수 있다. 또한, 자유단보다는 자유단에

서 멀어질수록 응력의 진폭이 작아지므로 손상이 발생하게 되면 자유단 부근이 될 것이다.

### 3.2 Heaviside step function

그림 7~그림 10은 중실축의 자유단에서 충격하중으로 Heaviside step function이 작용하는 경우에 대한 수치해석 결과로서 3.1절의 예제와 동일조건하에서 수치해석을 수행하였다. 해석에 사용된 하중함수는 다음과 같다.

$$F(t) = \sigma_0 H(t) \quad (15)$$

그림 7은 원형축의  $r=0, z=a$ 에서의 축방향응력을 도시한 것으로 등방성 중실축( $c_3/c_1 = 1.0$ )의 경우는 ramp step function이 충격하중으로 주어진 경우와는 달리 충격하중이 도달하는 순간에 최대외부하중( $\sigma_0 = 150 \text{MPa}$ )에 도달한 후 약간의 응력의 감소를 보이다가 외경에서 반사된 파의 영향으로 인해 축방향응력은  $t = 46.07 \mu\text{sec}$ 에서  $\sigma_0$ 의 3.11배에

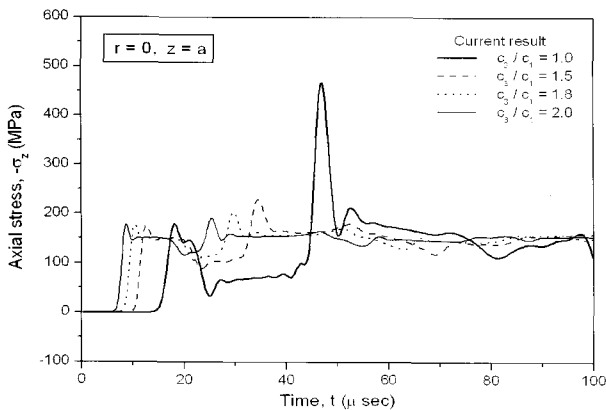


그림 7 중실축의  $r=0, z=a$ 에서 시간의 경과에 따른 축방향 응력분포 (Heaviside step function)

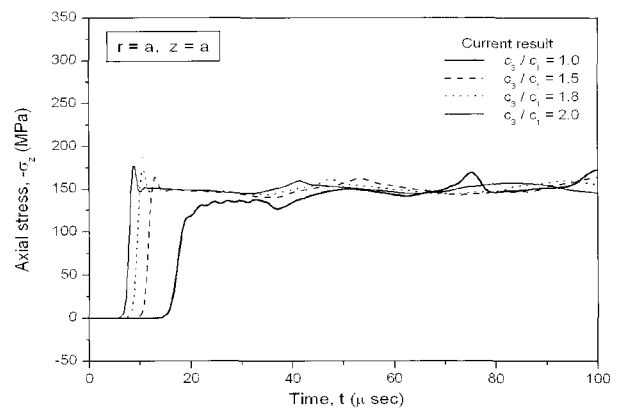


그림 8 중실축의  $r=a, z=a$ 에서 시간의 경과에 따른 축방향 응력분포 (Heaviside step function)

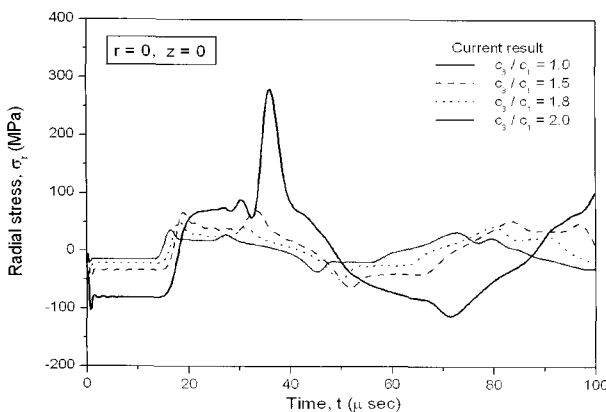


그림 9 중실축의  $r=0, z=0$ 에서 시간의 경과에 따른 반경방향 응력분포 (Heaviside step function)

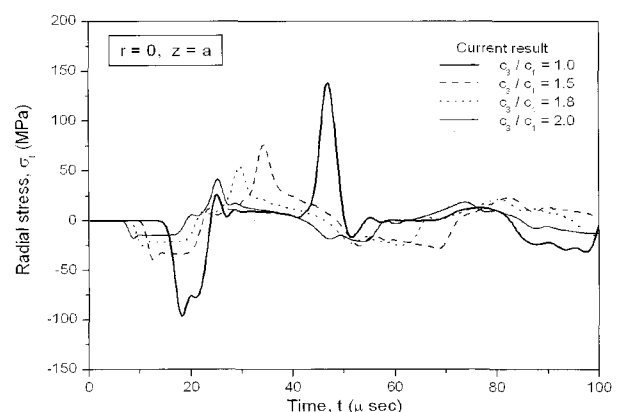


그림 10 중실축의  $r=0, z=a$ 에서 시간의 경과에 따른 반경방향 응력분포 (Heaviside step function)

도달하고 있으며, 횡등방성 중실축( $c_3/c_1 = 1.5, 1.8, 2.0$ )의 경우는 각각  $t=34.53\mu\text{sec}$ 에서 1.53배,  $t=29.829\mu\text{sec}$ 에서 1.36배,  $t=25.438\mu\text{sec}$ 에서 1.27배로 단위체적당 재료구성비가 커질수록 순간적인 최대응력에 도달하는 크기가 작아지고 있음을 보이고 있다.

그림 8은 원형축의  $r=a, z=a$ 에서 축방향 응력을 도시한 것으로 횡등방성 중실축인 경우는 파가 도달한 후 바로  $\sigma_0$ 로 수렴하고 있음을 확인할 수 있는 반면에, 등방성 중실축의 경우에는 충격파가 도달하는 순간 바로  $\sigma_0$ 에 도달하지 못하고 있음을 확인할 수 있다. 이는 등방성인 경우에는 외경에서 반사된 파에 의한 영향이 더 큼을 알 수 있다.

그림 9는 원형축의  $r=0, z=0$ 에서의 반경방향응력을 도시한 것으로 그림 5의 ramp step function에서 일정한 하중  $\sigma_0$ 가 발생하는 시간( $t_r=10\mu\text{sec}$ )만큼 최대응력이 발생하는 위치가 달라졌을 뿐만 아니라, 파의 분포에서도 유사한 경향(주기와 진폭의 크기)을 보이고 있다. 단지 등방성 중실축의 경우는 외경에서 반사된 압축파의 영향으로 인하여 시간  $t=35.956\mu\text{sec}$ 에서 최대외부하중  $\sigma_0$ 의 1.862배로 상대

적으로 큰 응력의 분포를 보이고 있다.

그림 10은 원형축의  $r=0, z=a$ 에서의 반경방향응력을 도시한 것으로 그림 9와의 비교를 통해 횡등방성 중실축인 경우의 최대반경방향응력의 크기는 큰 차이를 보이지 않으나, 등방성 중실축인 경우는 자유단으로부터의 거리에 비례하여 그 크기가 비례적으로 감소하고 있음을 확인했다.

### 3.3 Rectangular function

그림 11 ~ 그림 14는 중실축의 자유단에 충격하중으로 rectangular function이 작용하는 경우에 대한 수치해석 결과이다. 해석에 사용된 하중함수는 다음과 같다.

$$F(t) = \begin{cases} \sigma_0 H(t) & (0 < t \leq t_r) \\ 0 & (t > t_r) \end{cases} \quad (16)$$

여기서, 하중전환시간  $t_r=20\mu\text{sec}$ 이다.

횡등방성 중실축은 충격파가 도달하는 순간에 바로  $\sigma_0$ 에 도달한 후 빠르게 영에 수렴하고 있다. 반면에 등방성 중실축

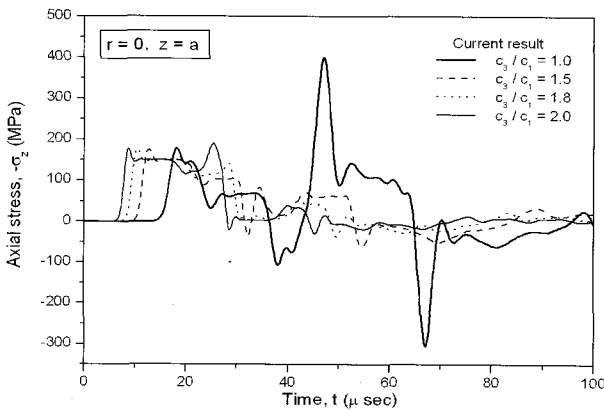


그림 11 중실축의  $r=0, z=a$ 에서 시간의 경과에 따른 축방향 응력분포 (Rectangular function)

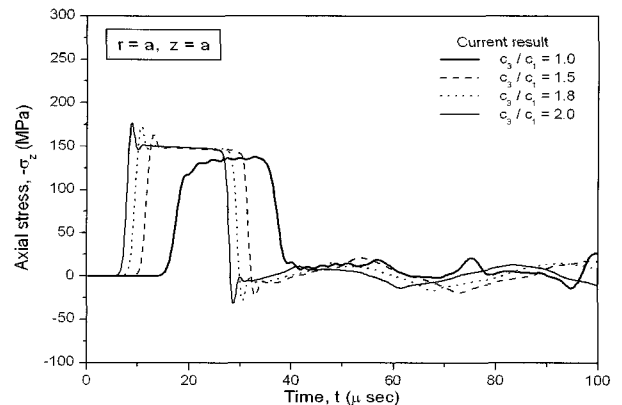


그림 12 중실축의  $r=a, z=a$ 에서 시간의 경과에 따른 축방향 응력분포 (Rectangular function)

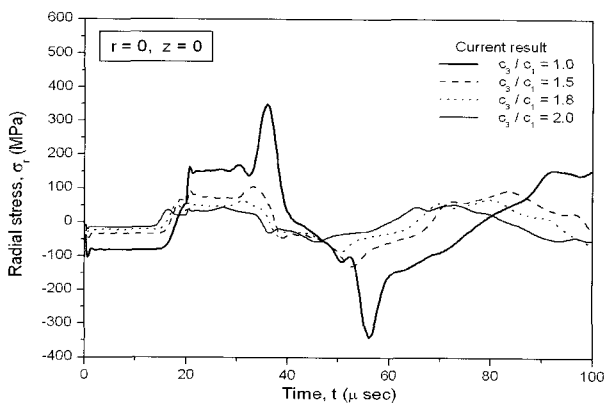


그림 13 중실축의  $r=0, z=0$ 에서 시간의 경과에 따른 반경방향 응력분포 (Rectangular function)

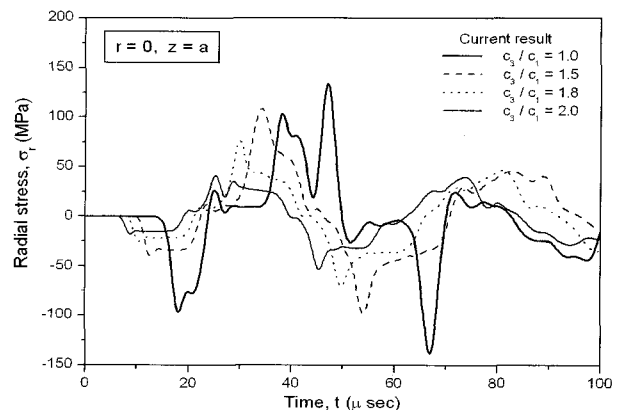


그림 14 중실축의  $r=0, z=a$ 에서 시간의 경과에 따른 반경방향 응력분포 (Rectangular function)

의 경우에는  $r=0, z=a$ 에서의 최대 축방향응력(그림 11)이  $\sigma_0$ 의 2.53배에 이르고, 최소 축방향 응력은 약 -1.8배로써 큰 응력의 진폭 차이를 보이고 있으며,  $r=a, z=a$ 에서 최대 축방향응력(그림 12)이  $\sigma_0$ 에 이르지 못하고 있음을 알 수 있다.  $r=0, z=0$ 인 곳에서 등방성 중실축의 반경방향응력(그림 13)은 최대 350MPa에 이르고, 최소 -337MPa에 이르는 큰 응력의 진폭을 보이고 있으며, 자유단으로부터 멀어질수록(그림 13, 14) 응력의 주기는 짧아지며 응력의 진폭이 작아지고 있음을 알 수 있다.

이와 같이 급격한 충격하중식 (15), (16)이 도달하는 곳에서는 그림 7~그림 14에서와 같이 수치적인 오차에 의한 매우 작은 떨림현상이 발생함을 볼 수 있다. 이러한 수치 오차의 떨림현상은 중실축의 물성비가 클수록 그 진폭이 작게 나타나고 있다. 이러한 수치오차의 떨림현상은 해석 모델에 대한 유한요소수와 적절한 동특성 시간변수를 선정함으로써 줄일 수 있다.

### 3.4 Sine function

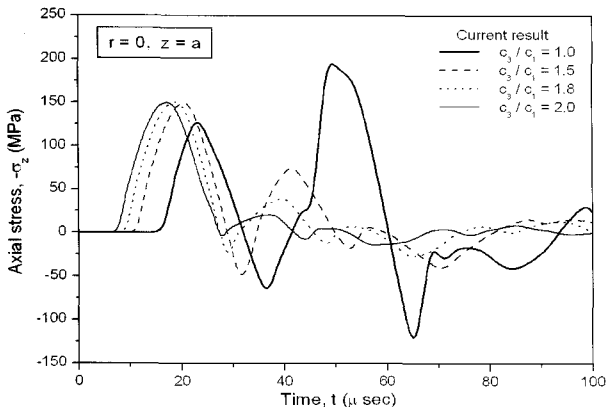


그림 15 중실축의  $r=0, z=a$ 에서 시간의 경과에 따른 축방향 응력분포 (Sine function)

그림 15~그림 18은 중실축의 자유단에서 충격하중으로 sine function이 작용하는 경우에 대한 수치해석 결과이다. 해석에 사용된 하중함수는 다음과 같다.

$$F(t) = \begin{cases} \sigma_0 \sin(\pi t/t_r) & (0 < t \leq t_r) \\ 0 & (t > t_r) \end{cases} \quad (17)$$

여기서, 하중전환시간  $t_r=20\mu\text{sec}$ 이다.

횡등방성 중실축은 물성비가 클수록 응력의 진폭이 작아지며 정적하중으로 빠르게 수렴하는 반면에, 등방성 중실축인 경우에는 응력분포가 상이한 결과를 보여주고 있다.

그림 15는 원형축의  $r=0, z=a$ 에서의 축방향응력을 도시한 것으로 등방성 중실축인 경우는 외부 충격하중이  $\sigma_0=150\text{MPa}$ 에 도달할 때, 첫 번째 극값에서는 그 값이  $0.85\sigma_0$ 에 이르고 두 번째 극값  $t=50\mu\text{sec}$ 에서는  $1.29\sigma_0$ 에 도달한 후 불규칙한 파형을 보이는 반면에, 횡등방성 중실축인 경우에는 파가 지난 간 후에는 정적인 해로 수렴하는 경향을 보이고 있다. 이러한 수렴성의 정도는 단위체적당 재료구성비가 클수록 매우 빠르게 수렴됨을 알 수 있다.

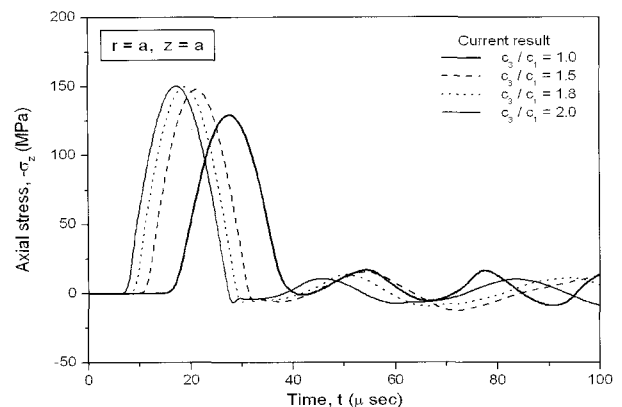


그림 16 중실축의  $r=a, z=a$ 에서 시간의 경과에 따른 축방향 응력분포 (Sine function)

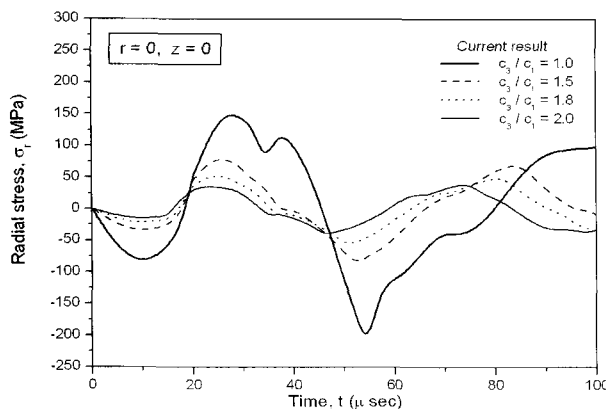


그림 17 중실축의  $r=0, z=0$ 에서 시간의 경과에 따른 반경방향 응력분포 (Sine function)

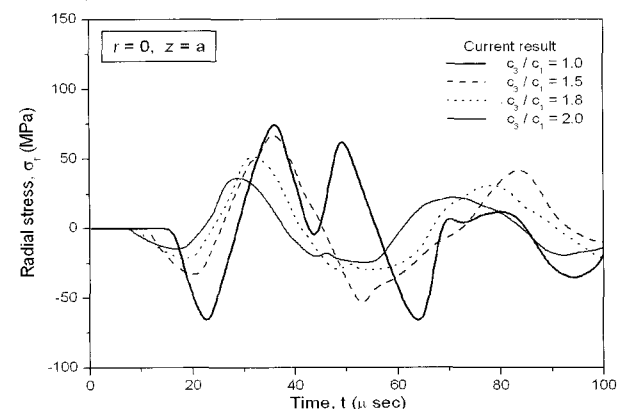


그림 18 중실축의  $r=0, z=a$ 에서 시간의 경과에 따른 반경방향 응력분포 (Sine function)

그림 16은 원형축의  $r=a, z=a$ 에서 축방향 응력을 도시한 것으로 외부 충격하중이  $\sigma_0$ 에 도달할 때 횡등방성 중실축의 경우( $c_3/c_1=1.5, 1.8, 2.0$ )는 최대 반경방향응력이 각각  $0.986\sigma_0, 0.997\sigma_0, 1.000\sigma_0$ 로 외부하중과 거의 일치하고 있으나, 등방성 중실축( $c_3/c_1=1.0$ )의 경우 최대치가 약  $0.865\sigma_0$ 로서 외경에서의 축방향 에너지 손실이 매우 크게 발생하고 있음을 알 수 있다. 또한 이들 값들은 중심에서의 응력의 구배와 유사하나 충격하중이 지나간 이후에는 정적인 해로 수렴하고 있다.

그림 17과 그림 18은 ( $r=0, z=0$ )와 ( $r=0, z=a$ )인 곳에서의 반경방향응력을 나타낸 것으로, 횡등방성인 경우는 응력분포의 주기와 크기에서 약간의 변화를 보이는 반면에, 등방성인 경우는 중실축의 중심(그림 17)보다 외경(그림 18)에서 응력의 크기는 작아지고 급격한 응력분포의 변화를 보이고 있다.

### 3.5 Triangular function

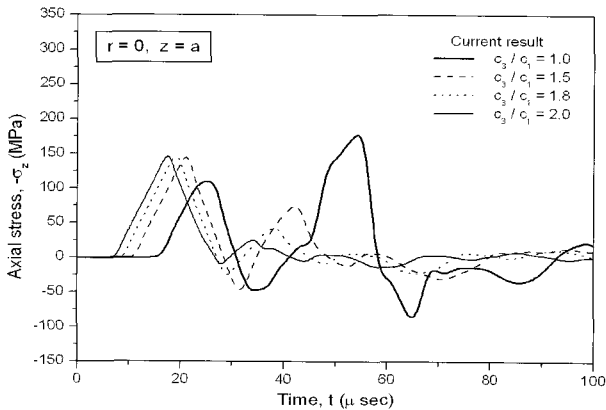


그림 19 중실축의  $r=0, z=a$ 에서 시간의 경과에 따른 축방향 응력분포 (Triangular function)

그림 19 ~ 그림 22는 중실축의 자유단에서 충격하중으로 triangular function이 작용하는 경우에 대한 수치해석 결과이다. 해석에 사용된 하중함수는 다음과 같다.

$$F(t) = \begin{cases} 2\sigma_0 t/t_r & (0 < t \leq t_r/2) \\ 2\sigma_0(1-t/t_r) & (t_r/2 < t \leq t_r) \\ 0 & (t > t_r) \end{cases} \quad (18)$$

여기서, 하중전환시간  $t_r=20\mu\text{sec}$ 이다.

sine function이 충격하중으로 작용하는 경우와 유사한 응력분포를 보이고 있다. 횡등방성 중실축의 축방향 응력은 물성비가 클수록 자유단에서 가해진 충격하중과 거의 유사한 분포를 형성하며 파가 진행하고 있음을 알 수 있다. 그러나 그림 19에서( $r=0, z=a$ ) 등방성 중실축의 축방향 응력은 최대하중  $\sigma_0=150\text{MPa}$ 의 약 1.32배에 이르고,  $r=a, z=a$ 인 곳(그림 20)에서는 최대하중의 약 0.79배로 충격이 감소됨을 알 수 있다. 반경방향 응력분포(그림 21과 그림 22)는 등방성 중실축인 경우는 자유단에서 멀어질수록 응력파의 주기가 짧아지고 진폭의 크기가 작아지나, 횡등방성 중실축의 경우에는 자유단으로

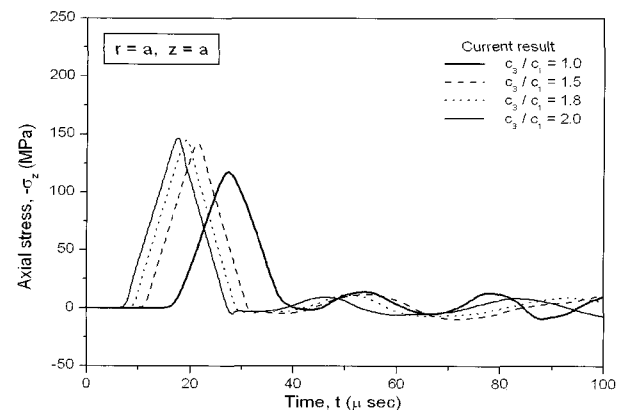


그림 20 중실축의  $r=a, z=a$ 에서 시간의 경과에 따른 축방향 응력분포 (Triangular function)

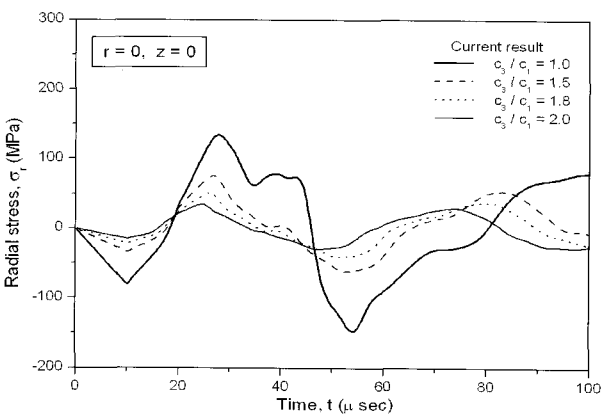


그림 21 중실축의  $r=0, z=0$ 에서 시간의 경과에 따른 반경방향 응력분포 (Triangular function)

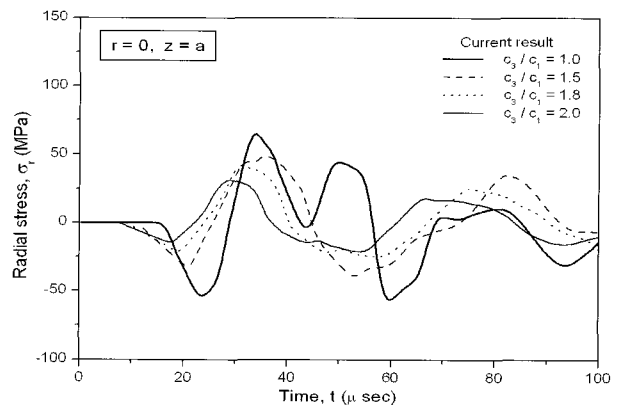


그림 22 중실축의  $r=0, z=a$ 에서 시간의 경과에 따른 반경방향 응력분포 (Triangular function)



부터의 거리에 큰 영향을 받지 않음을 알 수 있다.

3.6 충격파의 3차원 영상

그림 23 ~ 그림 26은 앞선 예제들의 단위체적당 재료구성비에 따른 파동전면이  $z=100mm$ 에 도달할 때의 축방향 응력의 3차원적 영상을 도시한 것이다.

그림 23은 Heaviside step function이 충격하중으로 가해지는 경우에 대한 축방향 응력분포로 등방성 중실축과 횡등방성 중실축이 서로 유사한 경향의 응력분포를 보이고 있다. 갑작스런 충격하중에 의해 파동전면 바로 뒤에는 파형의 골이 형성되어 파동전면을 따라 움직이고 있다. 또한 파동전면에 의해 중실축의 외경에서 반사된 파가 파형의 산을 형성

하고 진행하고 있으며 단위체적당 재료구성비가 클수록 그 산의 높이가 작아지고 있음을 알 수 있다.

그림 24는 rectangular function이 충격하중으로 가해지는 경우에 대한 축방향 응력분포로, 파동전면의 형상은 Heaviside step function이 충격하중으로 가해지는 경우와 동일하나 파가 완전히 통과한 후에는 중실축의 외경에서 반사된 파에 의해 중실축의 중심에서 최대값을 가짐을 알 수 있으며 단위체적당 재료물성비가 클수록 중실축 중심에서의 최대치가 작아지고 있음을 알 수 있다.

그림 25는 triangular function이 충격하중으로 가해지는 경우에 대한 축방향 응력분포로, 외부충격하중이 전환되는 시간  $t_0$ 에서 중실축의 외경에서부터 3개의 파가 형성되고 있음을 볼 수 있다. 이들 3개의 파에 의해 중실축의 중심에

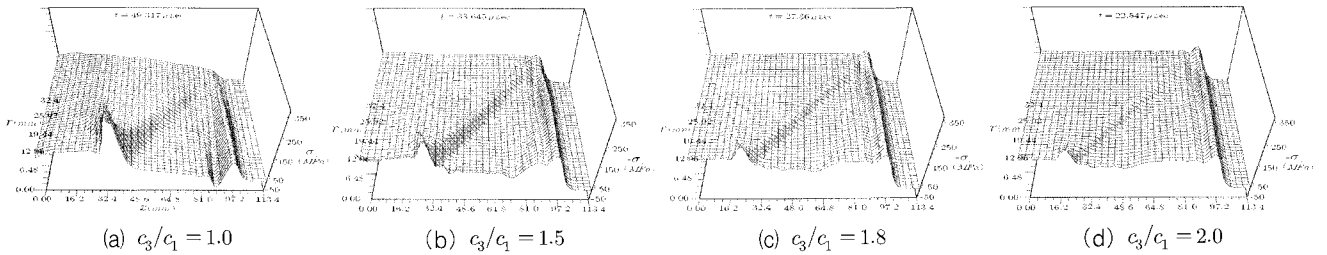


그림 23 중실축의 물성비에 따른 파동전면이  $z=100mm$ 에 도달하는 곳에서의 축방향 응력분포 (Heaviside step function)

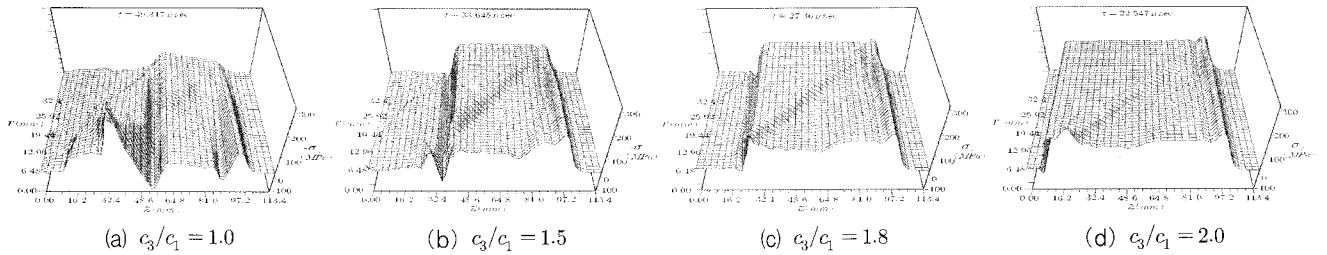


그림 24 중실축의 물성비에 따른 파동전면이  $z=100mm$ 에 도달하는 곳에서의 축방향 응력분포 (Rectangular function)

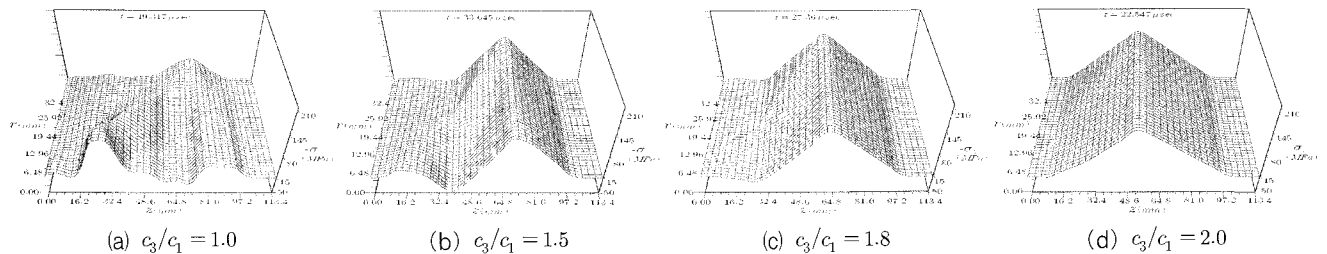


그림 25 중실축의 물성비에 따른 파동전면이  $z=100mm$ 에 도달하는 곳에서의 축방향 응력분포 (Triangular function)

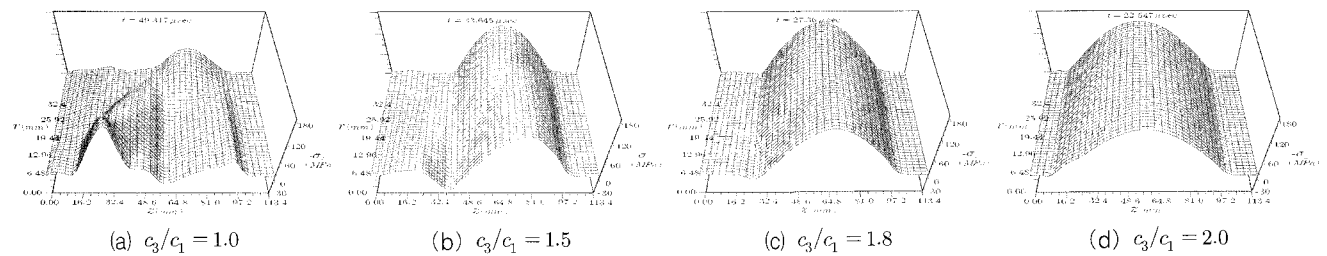


그림 26 중실축의 물성비에 따른 파동전면이  $z=100mm$ 에 도달하는 곳에서의 축방향 응력분포 (Sine function)

서 파의 산과 골을 형성하고 있으며, 단위체적당 재료구성비가 클수록 외부 충격하중과 유사한 형태의 파형을 형성하고 있음을 알 수 있다.

그림 26은 sine function이 충격하중으로 가해지는 경우에 대한 축방향 응력분포로, triangular function이 충격하중으로 가해지는 경우와 유사한 파형을 형성하며 진행하고 있으며, 최대치는 triangular function의 경우보다 더 작은 값을 보이고 있다.

### 3.7 원형축 단면의 일부가 충격하중을 받을 때

그림 27 ~ 그림 30은 중실축의 중심에서 반경  $r=0.25a$ 인 영역에 rectangular function(식 (16))의 작용에 의한 파동전면이  $z=100\text{mm}$ 에 도달할 때의 축방향 응력  $\sigma_z$ (그림 27과 29)와 von Mises 등가응력(그림 28과 30)  $\kappa$ 를 도시한 것이다. 여기서, von Mises 등가응력은 다음과 같다.

$$\kappa^2 = \frac{1}{6} \{ (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 \} + \tau_{rz}^2 \quad (19)$$

그림 27과 그림 28은 단위체적당 재료구성비가  $c_3/c_1=1.0$ 인 등방성 중실축의 파형으로 충격하중이 가해진 영역에서 발생한 파의 파동전면은 시간이 경과하면서 중실축의 외경까지 확장되고 파동전면의 크기는 점차 작아진다. 또한 중실축의 자유단에 가해진 rectangular function 충격파가 완전히 통과하면서 새로이 발생한 인장파(B점에서 시작되는 파)와 외경에서 반사된 압축파(A점에서 시작되는 파)가 중첩되면서 심한 굴곡을 갖는 파형을 형성하고 있음을 볼 수 있다. 이들 두 개의 파에 의해 축방향 응력(그림 27)은  $r=0.00\text{mm}$ ,  $z=19.44\text{mm}$ 인 곳에서 극값  $\sigma_z = -38.15\text{MPa}$ 이며, 해석된 시간영역( $t=100\mu\text{sec}$ )에서는  $t=9.292\mu\text{sec}$ 일때  $r=0.00\text{mm}$ ,  $z=9.292\text{mm}$ 에서  $\sigma_{z,\text{max}} = -315.178\text{MPa}$ 이다. 또한, von Mises 등가응력(그림 28)은  $r=0.00\text{mm}$ ,  $z=19.44\text{mm}$ 인 곳에서 극값  $\kappa = 16.4\text{MPa}$ 이며, 해석된 시간영역에서는  $t=10.302\mu\text{sec}$ 일때  $r=0.00\text{mm}$ ,  $z=6.48\text{mm}$ 에서  $\kappa_{\text{max}} = 130.83\text{MPa}$ 로서 중실축의 중심에서 최대치를 보이고 있음을 알 수 있다.

그림 29와 그림 30은 단위체적당 재료구성비가  $c_3/c_1=2.0$ 인 횡등방성 중실축으로 자유단에서 가해진 충격하중에 의해 파동전면이 축방향으로 매우 빠르게 진행하고 있는 중

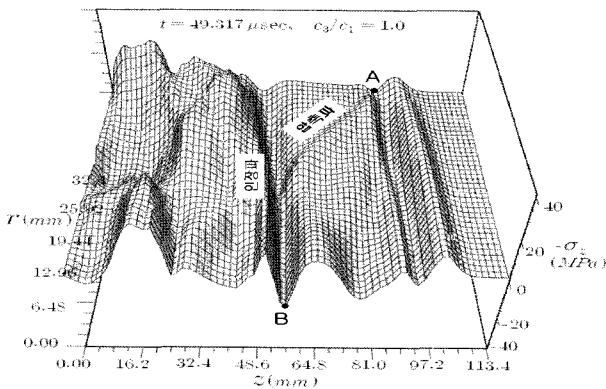


그림 27 등방성 중실축( $c_3/c_1=1.0$ )의 축방향응력(Rectangular function)

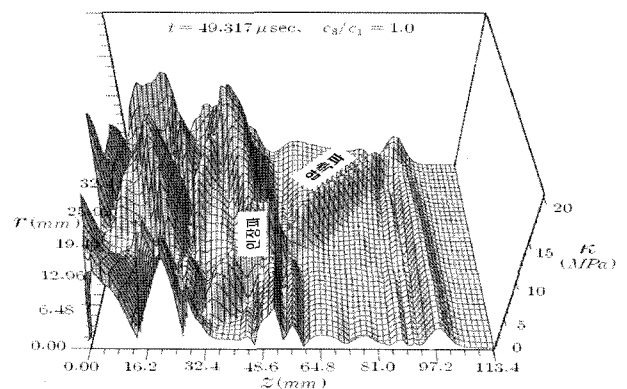


그림 28 등방성 중실축( $c_3/c_1=1.0$ )의 von Mises 등가응력(Rectangular function)

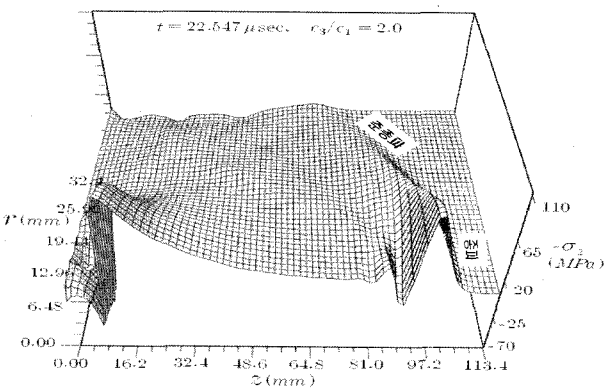


그림 29 횡등방성 중실축( $c_3/c_1=2.0$ )의 축방향응력(Rectangular function)

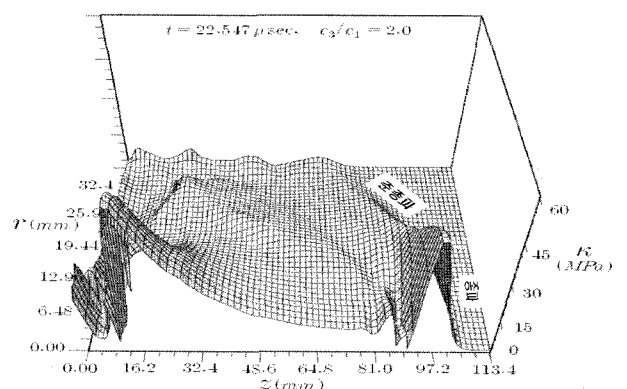


그림 30 횡등방성 중실축( $c_3/c_1=2.0$ )의 von Mises 등가응력(Rectangular function)

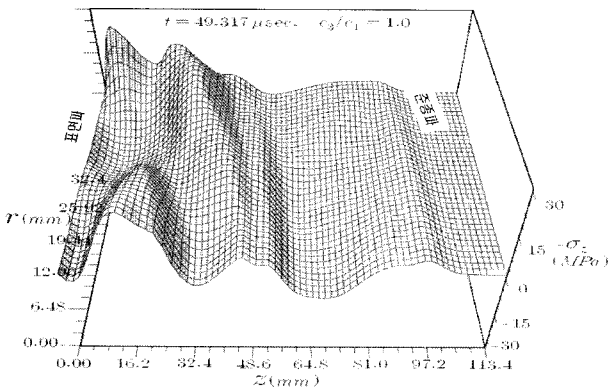


그림 31 등방성 중실축의 축방향 응력분포(Sine function,  $r=0.25a, c_3/c_1=1.0$ )

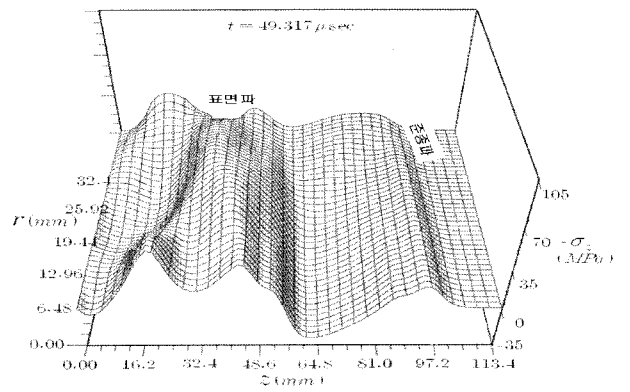


그림 32 등방성 중실축의 축방향 응력분포(Sine function,  $r=0.5a, c_3/c_1=1.0$ )

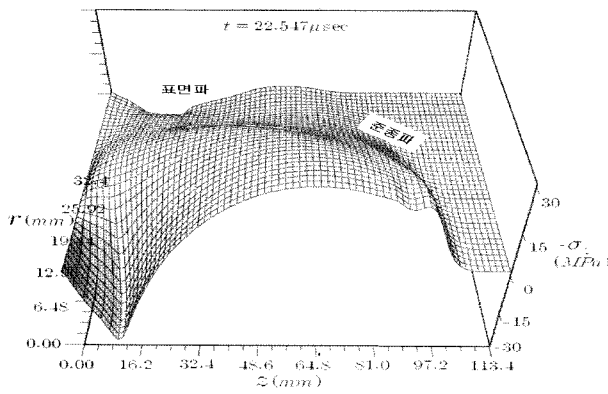


그림 33 횡등방성 중실축의 축방향 응력분포(Sine function,  $r=0.25a, c_3/c_1=2.0$ )

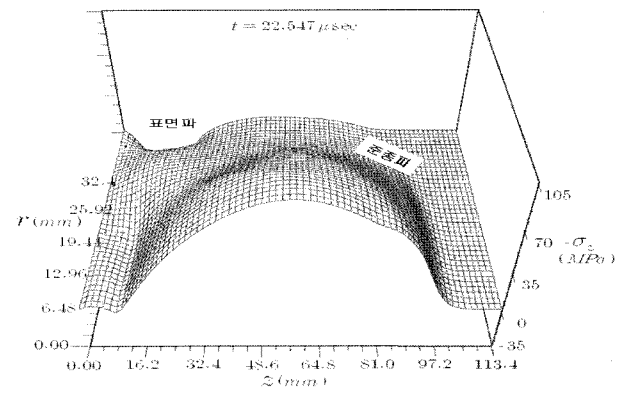


그림 34 횡등방성 중실축의 축방향 응력분포(Sine function,  $r=0.5a, c_3/c_1=2.0$ )

파와 파동전면에서 중실축의 외경으로 향하고 있는 준종파의 진행을 볼 수 있다. 이러한 현상은 축방향과 반경방향으로 전파속도의 차에 의해서 발생하는데, 축방향으로 상대적으로 빠른 전파속도를 갖는 종파는 파동전면의 크기가 등방성 중실축에 비해 상대적으로 에너지 손실이 적고 매우 빠르게 진행하고 있으며, 파동전면에서 중실축의 외경으로 향하는 준종파는 등방성 중실축에 비해 미미한 영향을 미치고 있음을 알 수 있다.

그림 31과 그림 32는 단위체적당 재료구성비가  $c_3/c_1=1.0$ 인 등방성 중실축의 중심에서 반경이  $r=0.25a$ (그림 31)과  $r=0.5a$ (그림 32)인 영역에 sine function(식 (17))에 의해 파동전면이  $z=100\text{mm}$ 에 도달할 때의 축방향 응력분포를 도시한 것이다. 이들 두 파의 비교로부터 중실축의 중심에서는 매우 유사한 형태의 종파가 진행하고 있음을 볼 수 있으며, 부분 영역에서 가해지는 외부 충격하중에 의해 자유단과 중실축의 외경에서 표면파가 발생하고 있음을 볼 수 있다. 원형축에 가해지는 외부 충격하중의 영역이 작은 경우(그림 31)는 파가 진행하면서 파동전면의 크기가 작아지고, 이로 인해 중실축의 외경으로 향하는 준종파의 영향이 작아져 주로 자유단에서 발

생한 표면파에 의해 자유단의 외경에서 큰 진폭의 응력이 발생되고 있음을 알 수 있다. 반면에 원형축에 가해지는 외부 충격하중의 영역이 큰 경우(그림 32)는 자유단에서 발생한 표면파의 영향보다 파동전면에서 발생한 준종파에 의해 중실축의 외경에서 심한 진폭을 가지는 표면파를 발생시키고 있음을 알 수 있다.

그림 33과 그림 34는 단위체적당 재료구성비가  $c_3/c_1=2.0$ 인 횡등방성 중실축의 중심에서 반경비가  $r=0.25a$ (그림 33)과  $r=0.5a$ (그림 34)인 영역에 sine function(식 (17))에 의해 파동전면이  $z=100\text{mm}$ 에 도달할 때의 축방향 응력분포를 도시한 것이다. 원형축에 가해지는 외부 충격하중의 영역이 작은 경우(그림 33)는 준종파에 의한 외경에서 발생하는 표면파의 크기가 작으며 중실축의 중심에서 준종파의 영향이 크게 미쳐 중실축의 자유단 근처 중심에서 매우 큰 응력의 진폭이 발생함을 알 수 있으며, 원형축에 가해지는 외부 충격하중의 영역이 큰 경우(그림 34)는 파동전면에서 발생한 준종파가 중실축으로 외경으로 향하고 있음을 볼 수 있다. 따라서 부분 영역에 외부 충격하중을 가하는 경우의 횡등방성 중실축을 설계함에 있어 적절한 영역을 고려함으로써 파의 중첩과 간섭에 의한 응력증폭을 막을 수 있을 것으로 사료된다.

#### 4. 결 론

반-무한 횡등방성 중실축이 자유단에서 여러 가지 종방향 충격하중을 받을 경우에, 중실축 내부에서의 파의 전파과정을 축대칭 유한요소법과 Houbolt 시간적분법을 이용하여 정밀하게 수치해석을 수행, 분석하여 다음과 같은 결과들을 얻었다: (1) 횡등방성 중실축에서 단위체적당 재료구성비가 클수록 응력파가 빠르게 전파되고, 응력파의 진폭도 등방성 중실축 보다 상대적으로 작았다. (2) 파의 전파 과정을 3차원 그래프로 도시하여 반경방향 전파속도가 축방향 전파속도에 미치는 영향을 시각적으로 보였다. 즉, 단위체적당 재료구성비가 클수록 외경에서의 반사파가 축방향 파에 미치는 영향이 작았다. (3) 여러 종류의 충격하중이 가해진 경우에 대한 수치결과를 제시하였다. (4) 동특성 시간변수의 크기는  $\lambda_j = 0.25 \sim 0.4$  일 경우가 가장 안정적이고 엄밀한 수치결과를 보였다.

#### 후 기

위 논문은 2006년도 금오공과대학교 학술연구비 지원을 받아 연구하였음.

#### 참 고 문 헌

김경수, 박준범, 정배훈 (1997), 응력파에 의한 구조부재의

- 동적파괴해석, 한국전산구조공학회, 10(4), pp.195~203.
- 오근, 심우진 (2005), 충격내압을 받는 복합적층 중공구의 수치해, 대한기계학회논문집 A권, 29(2), pp.293~302.
- 황갑운, 조규종 (1995), 충격하중이 작용하는 평판의 동적 응력해석, 한국전산구조공학회, 8(1), pp.137~146.
- Bathe K.J. (1996), *Finite Element Procedures*, Prentice-Hill, Englewood Cliffs.
- Lin X., Ballmann J. (1995), A numerical scheme for axisymmetric elastic waves in solids, *Wave Motion*, 21, pp.115~126.
- Liu K., Li X., Tanimura S. (1997), Two-dimensional stress wave propagation in a transversely isotropic cylinder, *JSME*, 40(2), pp.128~134.
- Miklowitz J., Calif P. (1956), The propagation of compressional waves in a dispersive elastic rod, Part I-Results from the theory, *Trans. ASME, J. Appl. Mech. Div.*, 16, pp.231~239.
- Mengi Y., McNiven H.D. (1971), Analysis of the transient excitation of a transversely isotropic rod, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 50(1), pp.258~265.
- Shindo Y., Nozaki H. (1987), Impact response of a transversely isotropic cylinder with a penny-shaped crack, *Int. J. Solid Structures*, 23(1), pp.187~199.
- Zienkiewicz O.Z., Taylor R.L. (1991), *The Finite Element Method*, 4th Edn, McGraw-Hill.