

다중 불확실 인수를 고려한 평판의 응답변화도 산정 정식화

A Formulation for Response Variability of Plates Considering Multiple Random Parameters

노 혁 천†

Noh, Hyuk-Chun

(논문접수일 : 2007년 10월 30일 ; 심사종료일 : 2007년 11월 27일)

요 지

본 논문에서는 구조의 재료물성치와 기하학적 인수의 공간적 불확실성에 의한 구조 응답변화도 산정을 위한 정식화를 제안하였다. 정식화는 추계론적 유한요소해석의 해석법 중의 하나인 가중적분법을 기본으로 하였다. 해석 대상 구조는 전단변형을 포함하는 평판구조로서, 평판구조에 나타날 수 있는 불확실 인수로는 재료적 측면에서는 재료탄성계수와 포아송비가 있으며, 기하학적 인수로는 평판의 두께를 들 수 있다. 선형탄성 영역에서 선형성을 나타내는 재료탄성계수와는 달리 평판의 두께는 3차함수로 강성에 기여하고, 포아송비의 경우 분수의 형태로 강성에 기여하므로 직접적으로는 이를 추계론적 해석에 고려할 수 없다. 따라서 본 연구에서는 적합행렬내의 포아송비를 Taylor 전개하여 사용하였다. 제안된 정식화에 의한 결과는 기존 연구결과와는 물론 몬테카를로 해석에 의한 결과와도 비교하여 제안한 정식화를 검증하였다.

핵심용어 : 추계론적 유한요소해석, 확률변수, 응답변화도, 상관관계

Abstract

In this paper, we propose a stochastic finite element formulation which takes into account the randomness in the material and geometrical parameters. The formulation is proposed for plate structures, and is based on the weighted integral approach. Contrary to the case of elastic modulus, plate thickness contributes to the stiffness as a third-order function. Furthermore, Poisson's ratio is even more complex since this parameter appears in the constitutive relations in the fraction form. Accordingly, we employ Taylor's expansion to derive decomposed stochastic field functions in ascending order. In order to verify the proposed formulation, the results obtained using the proposed scheme are compared with those in the literature and those of Monte Carlo analysis as well.

Keywords : stochastic finite element method, random parameter, response variability, correlation

1. 서 론

구조는 다수의 인수들에 의하여 결정된다. 구조를 결정하는 인수는 구조재료와 관련된 부분과 구조의 기하학적 특성에 연관된 것들로 대별할 수 있다. 일반적으로 이들 인수는 구조영역 내에서 하나의 상수로 가정되며, 이러한 가정에 기초한 해석을 통하여 구조 거동에 대한 유일한 해를 얻게 된다. 이러한 해석을 확정론적해석(deterministic analysis)이라고 한다. 그러나 실제의 구조를 형성하는 각 인수에는 내재적인 불확실성이 존재할 수밖에 없다(Ghanem 등, 1991). 이러한 내재적 불확실성은 자연적인 것일 수도 있

며 인공적인 것일 수도 있다. 문제는 이러한 구조인수의 내재적 불확실성이 구조의 거동을 유일한 해로 얻을 수 있는 확정론적 시스템이 아닌 정확한 예측이 불가능한 어떤 시스템으로 만든다는 것이다. 이러한 상황은 실험실에서 얻는 구조거동과 이론에 의해 예측되는 구조거동에 나타나는 차이를 일부 설명해주고 있다. 따라서 우리는 구조인수에 내재적으로 존재하는 불확실성을 모델링하고, 이를 해석에 고려하여 구조거동의 불확실성을 예측해야 할 필요성을 가지게 되며, 추계론적 해석은 이러한 요구에 상응하여 최근 다수의 연구자들에 의하여 연구되고 있는 역학의 한 분야이다.

추계론적 유한요소해석은 추계론적해석과 유한요소법을 결

† 책임저자, 정회원 · 세종대학교 토목환경공학과 교수
Tel: 02-3408-3292 ; Fax: 02-3408-4332
E-mail: cpebach@sejong.ac.kr

• 이 논문에 대한 토론을 2008년 2월 29일까지 본 학회에 보내주시던 2008년 4월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

합한 해석기법으로서 공학적 문제의 해석에 성공적으로 적용되고 있는 유한요소법을 사용하고 있다는 점에서 그 적용이 매우 유연할 것으로 기대할 수 있다. 일반적으로 추계론적 유한요소해석은 해석 방법론의 관점에서 크게 두 가지로 나눌 수 있다. 하나는 통계학적 방법이며 다른 하나는 비통계학적 방법이다. 통계학적 방법은 몬테카를로 해석(Chakraborty 등, 2002; Schuëuller, 2007)으로 대별되는데, 구조인수의 불확실성을 임의표본(random sample)으로 생성하고 이에 대하여 직접적인 확정론적 해석을 수행하여 구조 거동의 통계적 특성을 얻는 해석이다. 그러나 이 경우 임의표본을 생성해야 하는 어려움과 해석시간의 과다함으로 인한 어려움이 있다. 그러므로 이러한 어려움을 극복하고 문제에 대한 보다 이론적인 접근을 위하여 비통계학적 해석기법들이 연구되어 왔다. 비통계학적 해석기법은 주로 전개에 기초한 기법들로서 Karhunen-Loeve(K-L)전개법(Spanos 등, 2007), Polynomial Chaos전개법(Ghanem 등, 1990), 섭동법(perturbation technique; Kaminski, 2007) 등이 있다. 본 연구에서는 확정론적 함수로 곱해진 추계장에 대한 유한요소내의 적분을 확률변수(random variable)로 택하는 가중적분법(weighted integral method)을 사용하여 평판에 대한 추계론적 해석을 위한 정식화를 수행하고자 한다.

평판구조의 강성에서 공간적인 불확실성을 가질 수 있는 인수로는 재료탄성계수, 포아송비 그리고 평판두께를 들 수 있다. 일반적인 추계론적 유한요소해석에서는 일부 개별적으로 기하학적 인수에 대해 고려한 해석 정식화도 있으나(Lawrence, 1987), 구조의 거동에 그 영향 정도가 가장 큰 재료탄성계수만을 고려한 해석이 주를 이루고 있으며(Vanmarcke 등, 1983; Graham 등, 1998; Deodatis 등, 1991), 새롭게 개발되는 해석기법들도 이 계수에 대한 고려를 주로 대상으로 하고 있다(Noh 등, 2006). 이는 탄성계수의 구조역학적 중요성에도 그 원인이 있으나, 추계론적 유한요소해석에서 새로운 불확실인수의 도입에 어려움이 있기 때문이기도 하다. 본 연구에서는 선형 인수인 재료탄성계수는 물론 3차의 함수로 강성에 기여하는 평판두께와 분수꼴로 나타나는 포아송비에 대한 Taylor전개를 통하여 이들 세 인수를 동시에 불확실인수로 고려하고 이들 사이의 상관관계에 의한 영향을 고려할 수 있는 추계론적 유한요소해석 정식화를 가중적분법의 영역 내에서 수행하고자 한다. 가중적분법은 여타의 중앙점법(Hisada 등, 1989)이나 국부평균법(Vanmarcke 등, 1983; Zhu 등, 1992) 등에 비하여 가장 정확도가 높은 해를 제공하는 것으로 알려져 있으며(Schuëuller, 2001), 반무한영역 등에도 적용된 예가 있다(최창근 등, 1999).

제안한 정식화의 검증을 위하여 단순지지 및 고정지지 정방향 평판을 예제로 택하였다. 제안한 정식화를 따라 예제에 대한 해석을 수행하고, 그 결과를 몬테카를로 해석에 의한 결과와 비교하여 제안한 정식화의 타당성을 제시하고자 한다.

2. 구성관계에서의 불확실인수

2.1 불확실인수

일반적인 연속체에서 응력-변형률관계는 식 (1)과 같이 쓸 수 있다.

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \epsilon_{kl} \tag{1}$$

평판의 경우 특히 전단변형의 고려가 가능한 평판유한요소의 경우 식 (1)의 구성행렬 D_{ijkl} 은 다음과 같이 두 개의 분리된 행렬로 쓸 수 있다.

$$\mathbf{D}_b = D \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_s = \kappa E h \begin{bmatrix} \frac{1}{2(1+\mu)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2(1+\mu)} \end{bmatrix} \tag{2}$$

첫 행렬 \mathbf{D}_b 는 휨에 대한 부분으로 여기에는 이미 휨강성 D 안에 재료탄성계수와 평판의 두께 그리고 포아송비가 모두 포함되어 있으며, 행렬의 내부에는 포아송비가 개입되어 있다. 두번째 부분인 전단에 관련한 구성행렬 \mathbf{D}_s 도 이들 세 불확실 변수가 공히 나타나고 있다. 두 행렬에서 다른 부분은 전단구성행렬의 경우 두께변수가 선형변수로 개입되어 있는 것이다. 따라서 평판두께에 의한 구조강성의 기여는 휨과 전단에서 다르게 나타난다. 이들 세 불확실인수를 평판의 추계론적 거동해석에 고려하는 것은 가능한 모든 불확실 인수를 고려하는 것이라고 할 수 있다. 식 (2)에서 휨강성 D 는 $Eh^3/12(1-\mu^2)$ 으로 주어지며, μ, κ 그리고 h 는 포아송비와 전단수정계수 그리고 평판의 두께를 나타낸다. 전단수정계수 κ 는 5/6의 값을 사용하였다.

상기된 재료탄성계수, 포아송비 그리고 평판두께는 모두 공간적으로 불확실성을 가지는 것으로 가정할 수 있으며, 이러한 공간적 불확실성은 추계장함수의 도입에 의하여 다음과 같이 단순한 형태로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x}) &= E_o[1 + f_E(\mathbf{x})]; \quad \mu(\mathbf{x}) = \mu_o[1 + f_\mu(\mathbf{x})]; \\ h(\mathbf{x}) &= h_o[1 + f_h(\mathbf{x})] \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, 아래첨자 'o'를 포함한 항은 각 인수의 확정론적 값을 나타내며, 세 개의 함수 $f_E(\mathbf{x}), f_\mu(\mathbf{x})$ 그리고 $f_h(\mathbf{x})$ 는 구조계 영역내의 위치벡터 \mathbf{x} 의 함수인 추계장함수(stochastic field function)로서 각각 재료탄성계수, 포아송비 그리고 평판두께의 공간적 불확실성을 표현해 준다. 주지하는 바와 같이 각 추계장 함수는 $-1 + \delta < f_k < 1 - \delta$ 의 범위에 있으며, 여기서 $0 \leq \delta \leq 1$ 이다. 식 (3)에서 불확실인수 p 의 확정론적 값 p_o 는 평균값과는 다른 것으로서 평균값은 본 절 이후에서 '•' 기호로 표기하고자 한다.

2.2 포아송비의 공간적 불확실성

포아송비의 경우 식 (2)에서 보는 바와 같이 분수형태로 구성행렬에 개입되어 있으므로 식 (3)의 추계장 함수를 대입할 경우 응답변화도(response variability) 계산을 위한 직접적인 정식화가 쉽지 않다. 따라서 식 (2)의 분수형태로 표현된 포아송비에 대하여 Taylor 전개를 수행하여 사용한다. 이 경우 분수꼴의 식은 포아송비에 대한 추계장 함수인 f_μ 에 대한 오름차순의 멱항의 함수로 표현된다. 이에 대한 자세한 내용은 참고문헌에서 볼 수 있다(Noh, 2004). 따라서 휨과 전단에 대한 구성행렬은 다음과 같이 전개된다.

$$\mathbf{D}_b = \frac{Eh^3}{12} \sum_{i=0}^{\infty} f_\mu^i \mathbf{d}_b^{(i)}; \quad \mathbf{D}_s = \kappa Eh \sum_{i=0}^{\infty} f_\mu^i \mathbf{d}_s^{(i)} \quad (4)$$

식 (4)의 부행렬 $\mathbf{d}^{(i)}$ 는 모두 포아송비의 확정론적 값인 μ_o 로 표현된다.

2.3 세 불확실 인수를 포함한 구성행렬

식 (4)는 분수꼴로 나타나는 포아송비를 고려하기 위해 포아송비를 포함하는 분수식에 대한 Taylor 전개를 수행한 결과이며 재료탄성계수와 평판의 두께에서 나타나는 불확실성은 고려되지 않은 상태이다. 따라서, 식 (3)의 재료탄성계수와 평판두께에 대한 식을 식 (4)에 대입하여 정리함으로써 추가적인 식을 얻을 수 있으며, 이는 다음과 같다. 여기서, 반복되는 첨자 i 는 합을 의미한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_b &= \frac{E_o h_o^3}{12} (1 + f_E + \tilde{f}_h + \tilde{f}_{Eh}^b) \sum_{i=0}^{\infty} f_\mu^i \mathbf{d}_b^{(i)} \\ &= \mathbf{D}_b^{(0)} + \tilde{f}_b^{(i)} \mathbf{D}_b^{(i)} \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_s &= \kappa E_o h_o (1 + f_E + f_h + f_E f_h) \sum_{i=0}^{\infty} f_\mu^i \mathbf{d}_s^{(i)} \\ &= \mathbf{D}_s^{(0)} + \tilde{f}_s^{(i)} \mathbf{D}_s^{(i)} \end{aligned} \quad (5b)$$

여기서, 최종식의 부행렬은 $\mathbf{D}_b^{(i)} = \frac{E_o h_o^3}{12} \mathbf{d}_b^{(i)}$, $\mathbf{D}_s^{(i)} = \kappa E_o h_o \mathbf{d}_s^{(i)}$ 이다. 또한, 각 부행렬의 곱함수로 제시된 $\tilde{f}_b^{(i)}$, $\tilde{f}_s^{(i)}$ 는 각각 휨과 전단에 대한 곱함수로서 다음의 식과 같이 각 불확실인수의 원래 함수인 f_E, f_h, f_μ 의 함수로 표현된다.

$$\tilde{f}_b^{(0)} = f_E + \tilde{f}_h + \tilde{f}_{Eh}^b, \quad \tilde{f}_b^{(i)} = f_\mu^i (1 + \tilde{f}_b^{(0)}) \quad (6a)$$

$$\tilde{f}_s^{(0)} = f_E + f_h + f_E f_h, \quad \tilde{f}_s^{(i)} = f_\mu^i (1 + \tilde{f}_s^{(0)}) \quad (6b)$$

여기서, $\tilde{f}_h = 3f_h + 3f_h^2 + f_h^3$, $\tilde{f}_{Eh}^b = f_E \tilde{f}_h$ 이다.

3. 추계성을 포함하는 요소강성행렬의 구성

3.1 확정론적 강성행렬과 가감강성행렬

추계성을 포함하는 구성행렬로서 휨과 전단에 대하여 얻어진 두 구성행렬 $\mathbf{D}_b = \mathbf{D}_b^{(0)} + \tilde{f}_b^{(i)} \mathbf{D}_b^{(i)}$, $\mathbf{D}_s = \mathbf{D}_s^{(0)} + \tilde{f}_s^{(i)} \mathbf{D}_s^{(i)}$ 에서 첫 항인 $\mathbf{D}_b^{(0)}, \mathbf{D}_s^{(0)}$ 는 확정론적 구성행렬로서 요소강성행렬의 확정론적 강성행렬 구성에 기여하며, 곱함수 $\tilde{f}^{(i)}$ 를 포함하는 부분은 인수의 추계성에 의해 나타나는 가감강성행렬로 귀결된다. 즉,

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \mathbf{k}_b + \mathbf{k}_s \\ &= \mathbf{k}_b^o + \Delta \mathbf{k}_b + \mathbf{k}_s^o + \Delta \mathbf{k}_s \end{aligned} \quad (7)$$

여기서, 식 (7)의 각 항의 구체적 형태는 다음과 같다. 반복되는 상첨자 (i)는 합을 의미한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_b &= \mathbf{k}_b^o + \Delta \mathbf{k}_b \\ &= \int \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b^{(0)} \mathbf{B}_b dV + \int \tilde{f}_b^{(i)} \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b^{(i)} \mathbf{B}_b dV \\ \mathbf{k}_s &= \mathbf{k}_s^o + \Delta \mathbf{k}_s \\ &= \int \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s^{(0)} \mathbf{B}_s dV + \int \tilde{f}_s^{(i)} \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s^{(i)} \mathbf{B}_s dV \end{aligned} \quad (8)$$

위의 식 (8)에서 상첨자 'o'는 확정론적인 값을 의미하며 평균강성행렬을 나타내는 것은 아니다. 곱함수 $\tilde{f}^{(i)}$ 는 식 (6)에서 보는 바와 같이 원래의 추계장 함수를 변수로 가지는 함수로서 그 평균이 0이 아니므로 식 (8)에 나타난 가감강성행렬의 평균은 0이 되지 않으며, 따라서, $\mathbf{k}_b, \mathbf{k}_s$ 의 평균은 확정론적 결과인 $\mathbf{k}_b^o, \mathbf{k}_s^o$ 와 여기에 더해지는 추가적인 항으로 구성된다.

식 (8)은 다음과 같이 일반적인 형태로 쓸 수 있다.

$$\mathbf{k}_e = \mathbf{k}^o + \sum_{i=0}^{\infty} \Delta \mathbf{k}^{(i)} \quad (9)$$

3.2 가감강성행렬과 확률변수

여기서부터는 휨과 전단에 대한 부분을 따로 표기하지 않고 이를 공통기호인 'c'로 표기하고자 한다. 휨의 경우는 $c = b$ 로, 전단의 경우 $c = s$ 로 대치하면 각 경우에 대한 결과를 얻을 수 있다. 식 (9)에서 정의된 가감강성행렬 $\Delta \mathbf{k}_c^{(i)}$ 는 확정론적 유한요소해석 정식화에서 얻을 수 있는 요소강성행렬 적분식 내에 곱함수 $\tilde{f}_c^{(i)}$ 가 곱해진 형태이다. 즉, $\Delta \mathbf{k}_c^{(i)} = \int \tilde{f}_c^{(i)} \mathbf{B}_c^T \mathbf{D}_c^{(i)} \mathbf{B}_c dV$. 여기서, 변위-변형률 행렬을 행렬 요소에 포함된 다항식 p_k 와 이들 다항식의 계수들로 이루어진 상수행렬 \mathbf{B}_k 의 곱의 합으로 가정하면 가감강성행렬은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{k}_c^{(i)} &= \int \tilde{f}_c^{(i)} \left(\sum_k \mathbf{B}_{ck}^T p_{ck} \right) \mathbf{D}_c^{(i)} \left(\sum_l \mathbf{B}_{cl} p_{cl} \right) dV \\ &= \sum_k \sum_l \mathbf{B}_{ck}^T \mathbf{D}_c^{(i)} \mathbf{B}_{cl} \int \tilde{f}_c^{(i)} p_{ck} p_{cl} dV \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \left(\hat{\mathbf{k}}_c^{(i)} \right)_{\alpha} \left(X_c^{(i)} \right)_{\alpha} \end{aligned} \quad (10)$$

여기서, k, l 은 변위-변형률 행렬 내 다항식에 대한 첨자로서 $k, l = 1, 2, \dots, n_p$ 이며, n_p 는 독립다항식의 수를 나타낸다. $\hat{\mathbf{k}}_c^{(i)} \Delta = \mathbf{B}_{ck}^T \mathbf{D}_c^{(i)} \mathbf{B}_{cl}$ 이다. 식 (10)이 첨자 k, l 에 대하여 대칭이므로 마지막 줄에서 $n = n_p(n_p + 1)/2$ 이다. $(X_c^{(i)})_{\alpha}$ 은 다음의 식으로 표현된 추계론적 적분(stochastic integral), 또는 가중적분(weighted integral)으로서 개별 유한요소에서 정의되는 확률변수를 나타낸다.

$$\left(X_c^{(i)} \right)_{\alpha} = \int \tilde{f}_c^{(i)} p_{ck} p_{cl} dV \quad (11)$$

확률변수 $(X_c^{(i)})_{\alpha}$ 는 휨($c=b$)과 전단($c=s$) 그리고 개입되어 있는 다항식에 따라 개별 유한요소 내에서 정의할 수 있으며 전체구조에 대하여 하나의 벡터로 정의할 수 있다: $\mathbf{X} = (X_c^{(i)})_{\alpha}$. 이 경우 전체 구조에서의 확률변수의 수 n_r 은 개별유한요소 내의 수 $n_{rv} = 2n$ 와 전체 유한요소의 수 n_e 의 곱과 같다.

$$\mathbf{X} = \langle X_1, X_2, \dots, X_{n_r} \rangle^T, \quad n_r = n_e \times n_{rv} \quad (12)$$

추후의 사용을 위하여 확률변수 벡터의 평균을 $\boldsymbol{\mu} = E[\mathbf{X}]$ 로 표기한다.

4. 변위의 확률적 특성치 산정

4.1 변위벡터에 대한 1차 Taylor 전개

전 절에서는 구조 인수들의 공간적 불확실성에 따라 가감강성행렬이 확률변수 X_r 의 함수로 표현됨을 기술하였다. 이에 따라, 전체 구조강성행렬과 변위벡터 또한 확률변수 X_r 의 함수가 되며, 따라서 변위벡터는 평균확률변수 \bar{X}_r 를 중심으로 한 Taylor전개가 가능하다. 확률변수의 평균을 중심으로 한 변화량을 $\Delta X_r = X_r - \bar{X}_r$ 이라고 하면, 변위에 대한 1차 Taylor 전개는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{U} \cong \mathbf{U}_{\boldsymbol{\mu}} + \sum_{r=1}^{n_r} \Delta X_r \left. \frac{\partial \mathbf{U}_r}{\partial X_r} \right|_E \quad (13)$$

여기서, 변위의 확률변수에 대한 편미분은 $\left. \frac{\partial \mathbf{U}_r}{\partial X_r} \right|_E = \left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial X_r} \right]_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\mu}}$ 이다. 평균확률변수벡터인 $\boldsymbol{\mu}$ 는 단순히 탄성계수만을 불확실인수로 보는 경우에는 그 값이 0이 되지만, 본 연구에서와 같이 다중 확률변수를 고려할 경우에는 일반적으로 0이 되지 않는다. 그러므로 $\Delta X_r = X_r - \bar{X}_r$ 에서 평균항인 \bar{X}_r 는 단순히 제거될 수 없다.

식 (13)에서 변위에 대한 편미분은 평형방정식에 대한 편미분을 통하여 다음과 같이 구조강성행렬에 대한 편미분으로 수정된다.

$$\mathbf{U} \cong \mathbf{U}_{\boldsymbol{\mu}} - \sum_{r=1}^{n_r} \mathbf{K}_{\boldsymbol{\mu}}^{-1} \Delta X_r \left. \frac{\partial \mathbf{K}_r}{\partial X_r} \right|_E \mathbf{U}_{\boldsymbol{\mu}} \quad (14)$$

식 (14)에서 평균강성행렬 $\mathbf{K}_{\boldsymbol{\mu}}$ 는 평균확률변수 상태에서 얻어지는 강성행렬로서 본 연구에서 대상으로 하는 불확실인수의 상태에서는 확정론적 강성행렬 \mathbf{K}_o 와는 다른 것이다. 이는 식 (8)에 나타나는 요소강성행렬을 통하여 알 수 있다. 식 (8)에서 보는 바와 같이 요소 강성행렬에 평균연산을 취할 경우 평균강성행렬은 첫 항인 확정론적 강성행렬 $\mathbf{k}_b^o, \mathbf{k}_s^o$ 에 $E[\Delta \mathbf{K}_b + \Delta \mathbf{K}_s]$ 의 항이 추가됨을 알 수 있다. 평균강성행렬에 추가되는 부분은 다음과 같다.

$$E[\Delta \mathbf{K}_c] = \int E \left[\tilde{f}_c^{(i)} \right] \mathbf{B}_c^T \mathbf{D}_c^{(i)} \mathbf{B}_c dV \quad (15)$$

식 (14) 우변의 첫 항 역시 평균강성행렬을 이용하여 계산하며, $\mathbf{U}_{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{K}_{\boldsymbol{\mu}}^{-1} \mathbf{F}$ 로 얻을 수 있다.

4.2 변위의 평균

평균을 중심으로 한 확률변수의 변화량에 대한 평균은 $E[\Delta X_r] = \bar{X}_r - \bar{X}_r = 0$ 이므로, 변위의 1차 모멘트인 평균은 다음과 같이 간단히 얻을 수 있다.

$$E[\mathbf{U}] = \mathbf{U}_\mu \quad (16)$$

4.3 변위의 공분산

공분산의 정의에 따라, 먼저 변위의 평균에 대한 변화량을 얻으면 다음과 같다.

$$\Delta \mathbf{U} = \mathbf{U} - E[\mathbf{U}] = -\sum_{r=1}^{n_r} \mathbf{K}_\mu^{-1} \Delta X_r \partial \mathbf{K}_r \Big|_E \mathbf{U}_\mu \quad (17)$$

여기서, $\Delta X_r = X_r - \bar{X}_r$ 임과 강성행렬이 식 (5)에 나타낸 바와 같이 부행렬 $\mathbf{D}^{(i)}$ 에 의한 기여가 있음을 고려하면, 변위의 평균중심변화량은 다음과 같이 성분별로 나누어 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{U} &= -\mathbf{K}_\mu^{-1} \left(\sum_{r=1}^{n_r} X_r \partial \mathbf{K}_r - \sum_{r=1}^{n_r} \bar{X}_r \partial \mathbf{K}_r \right) \mathbf{U}_\mu \\ &= -S_{(T)} + \sum_{i=0}^m \bar{S}_{(i)} \end{aligned} \quad (18)$$

여기서, 아래첨자 '(T)'는 전체 확률변수의 기여를 의미하며, '(i)'는 식 (5)의 부행렬 $\mathbf{D}^{(i)}$ 에 의한 강성행렬에 관한 것임을 나타낸다. m 은 식 (5)의 부행렬에서 계산에 고려하고자 하는 최고차수를 나타낸다. 본 연구에서는 3차항 ($m=3$)까지 사용하였다. 실제로 식 (2)에서 보는 바와 같이 추계장 함수는 (-1, +1) 범위내의 작은 값을 가지므로 3차 이상에서는 그 영향이 그렇게 크지 않음을 예상할 수 있다.

따라서, 변위의 공분산은 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\mathbf{U}, \mathbf{U}] &= E \left[\left(-S_{(T)} + \sum_{i=0}^m \bar{S}_{(i)} \right) \left(-S_{(T)} + \sum_{i=0}^m \bar{S}_{(i)} \right)^T \right] \\ &= E \left[S_{(T)} S_{(T)}^T \right] - \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m E \left[\bar{S}_{(i)} \bar{S}_{(j)}^T \right] \end{aligned} \quad (19)$$

공분산 연산을 완성하기 위해서는 식 (19) 마지막 줄에 나타난 두 항을 산정하여야 한다. 먼저 첫 평균연산은 다음과 같다.

$$E \left[S_{(T)} S_{(T)}^T \right]$$

$$\begin{aligned} &= E \left[\left(\mathbf{K}_\mu^{-1} \sum_{r=1}^{n_r} X_r \partial \mathbf{K}_r \mathbf{U}_\mu \right) \left(\mathbf{K}_\mu^{-1} \sum_{r=1}^{n_r} X_r \partial \mathbf{K}_r \mathbf{U}_\mu \right)^T \right] \\ &= \mathbf{K}_\mu^{-1} \left(\sum_e^{n_e} \sum_f^{n_e} E \left[\Delta \mathbf{f}_e \Delta \mathbf{f}_f^T \right] \right) \mathbf{K}_\mu^{-T} \end{aligned} \quad (20)$$

위의 식에서 마지막 줄은 공분산 연산이 하중과 등가인 $\Delta \mathbf{f}_e = \Delta \mathbf{k}_e \mathbf{U}_\mu$ 에 대한 연산으로 귀결됨을 보여주고 있다.

공분산의 두번째 연산은 아래와 같이 간단히 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} &E \left[\bar{S}_{(i)} \bar{S}_{(j)}^T \right] \\ &= \mathbf{K}_\mu^{-1} \left(\sum_e^{n_e} \int_V \left(R_b^{(i)}(\xi) \tilde{\mathbf{k}}_{be}^{(i)} + R_s^{(i)}(\xi) \tilde{\mathbf{k}}_{se}^{(i)} \right) dV \mathbf{U}_\mu \right) \\ &\quad \left(\sum_e^{n_e} \int_V \left(R_b^{(j)}(\xi) \tilde{\mathbf{k}}_{be}^{(j)} + R_s^{(j)}(\xi) \tilde{\mathbf{k}}_{se}^{(j)} \right) dV \mathbf{U}_\mu \right)^T \mathbf{K}_\mu^{-T} \end{aligned} \quad (21)$$

적분식 안의 $R_c^{(i)}$ 는 곱함수 $\tilde{f}_c^{(i)}$ 에 대한 평균으로 얻어지는 자기상관함수(auto-correlation function)이며, $\tilde{\mathbf{k}}_{ce}^{(i)} = \mathbf{B}_c^T \mathbf{D}_c^{(i)} \mathbf{B}_c$ 이다(휨의 경우 $c=b$, 전단의 경우 $c=s$).

식 (20)의 마지막 줄에 나타난 하중과 등가인 항에 대한 평균연산은 고려하고자 하는 두 개의 유한요소 e 와 f 에 대하여 아래의 식으로 얻을 수 있으며,

$$\begin{aligned} &E \left[\Delta \mathbf{f}_e \Delta \mathbf{f}_f^T \right] \\ &= E \left[\Delta \mathbf{k}_e \mathbf{U}_\mu \mathbf{U}_\mu^T \Delta \mathbf{k}_f \right] \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m E \left[\left(\Delta \mathbf{k}_{be}^{(i)} + \Delta \mathbf{k}_{se}^{(i)} \right) \mathbf{U}_\mu \mathbf{U}_\mu^T \left(\Delta \mathbf{k}_{bf}^{(j)} + \Delta \mathbf{k}_{sf}^{(j)} \right) \right] \end{aligned} \quad (22)$$

식 (22) 마지막 줄의 평균연산은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} &E \left[\left(\Delta \mathbf{k}_{be}^{(i)} + \Delta \mathbf{k}_{se}^{(i)} \right) \mathbf{U}_\mu \mathbf{U}_\mu^T \left(\Delta \mathbf{k}_{bf}^{(j)} + \Delta \mathbf{k}_{sf}^{(j)} \right) \right] \\ &= \int_{V_e} \int_{V_f} E \left[\tilde{f}_\alpha^{(i)} \tilde{f}_\beta^{(j)} \right] \tilde{\mathbf{k}}_{\alpha e}^{(i)} \mathbf{U}_\mu \mathbf{U}_\mu^T \tilde{\mathbf{k}}_{\beta f}^{(j)} dV_f dV_e \end{aligned} \quad (23)$$

여기서, $\tilde{\mathbf{k}}_{ce}^{(i)} = \mathbf{B}_c^T \mathbf{D}_c^{(i)} \mathbf{B}_c$ 이며, 식 (23)에서 반복되는 첨자 α, β 는 $\alpha, \beta = b$ or c 에 대한 합을 의미한다. 따라서, 총 4개의 중적분으로 이루어진다.

식 (23)의 연산에서 곱함수에 대한 평균연산 $E \left[\tilde{f}_\alpha^{(i)} \tilde{f}_\beta^{(j)} \right]$ 은 세 개의 불확실인수 f_e, f_u, f_h 사이의 연산으로서 서로 같은 함수사이의 연산이 될 수도 있으며 다른 함수사이의 연산이 될 수도 있다. 전자의 경우 얻어지는 함수는 자기상관함수가 되며, 후자의 경우 상호상관함수(cross-correlation function)가 된다. 상호상관함수의 경우 두 인수 사이의 상관관계가 결정이 되어야 하며, 해석에서는 상관관계계수

(correlation coefficient) ρ_{ij} 를 도입하여 적용하였다. 본 연구의 경우 세 개의 서로 다른 인수에 대하여 고려하고 있으므로 상관관계 계수는 $\rho_{E\mu}, \rho_{Eh}, \rho_{\mu h}$ 의 세 가지가 있을 수 있으며, 각 상관관계 계수는 $[-1, +1]$ 내의 값을 가진다.

5. 예제 해석 및 수치검증

본 연구에서 제안한 평판구조에 대한 추계론적 유한요소 해석을 위한 정식화는 강성행렬에 개입되는 세 개의 구조인수에 대한 공간적 불확실성을 고려한다. 이들 인수들의 공간적 불확실성은 식 (23)의 산정과정에서 유도되는 자기상관함수 또는 상호상관함수를 통하여 고려할 수 있다. 본 연구에서는 재료탄성계수의 불확실성 모델링에 자주 사용되고 있는 지수함수형태의 상관함수를 사용하고자 한다. 이 함수는 구조영역 내 두 점 사이의 상대거리벡터 ξ 의 크기에 따라 지수함수적으로 감소하는 상관관계를 가정하며, 식 (24)와 같다.

$$R_{ff}(\xi) = \sigma_{ff}^2 e^{-\left\{ \frac{|\xi_x|}{d_x} + \frac{|\xi_y|}{d_y} \right\}}, \quad R_{fg}(\xi) = \rho_{fg} \sigma_f \sigma_g e^{-\left\{ \frac{|\xi_x|}{d_x} + \frac{|\xi_y|}{d_y} \right\}} \quad (24)$$

첫 함수인 $R_{ff}(\xi)$ 는 단일 추계장 f 에 대한 자기상관함수이며, 두번째 함수 $R_{fg}(\xi)$ 는 두 추계장 f, g 에 대한 상호상관함수를 나타낸다. 여기서, σ_{ff}^2 추계장 f 의 분산을, ξ_i 와 d_i 는 상대거리벡터와 상관관계거리(correlation length)의 직교좌표축 방향의 성분을 나타낸다. 상호상관함수의 인수들도 동일한 의미를 나타내며, 상관관계계수 ρ_{fg} 는 $[-1, +1]$ 범위 내의 값을 가진다. 식 (24)의 함수에서는 d_x, d_y 를 독립적으로 표기하였으나 예제에 대한 수치해석에서는 이들이 양방향으로 같은 값을 가지는 것으로 가정하였다. 공분산 산정을 위한 식 (23)에서 자기 및 상호상관함수에 대한 수치적분은, 지수함수에 대한 적분능력이 우수한 것으로 알려진 Lobatto 적분을 적용하였고, 적분차수는 10×10 을 사용하였다.

5.1 세 인수 사이의 상관관계

세 개의 개별적인 불확실인수 사이의 상관관계는 셋 중 어느 두 인수의 상관관계가 결정되면 다른 하나는 이들 두 인수 사이의 상관관계에 의해 의존적으로 결정된다. 정성적 관계에 대한 예를 들면, 재료탄성계수 E 와 포아송비 μ 사이의 상관관계계수 $\rho_{E\mu}$ 가 양이고 포아송비와 평판두께 h 사이의 상관관계계수 $\rho_{\mu h}$ 가 음이라면, 재료탄성계수와 평판두께 사이의 상관관계 ρ_{Eh} 는 음으로 결정된다. 이러한 방식으로 세 인수 사이의 상관관계를 고려하면 세 인수 사이의 상

표 1 불확실인수 사이의 상관관계상태

상관관계계수	$\rho_{E\mu}$	ρ_{Eh}	$\rho_{\mu h}$
(i)	+	+	+
(ii)	+	-	-
(iii)	-	+	-
(iv)	-	-	+
(v)	0	0	0

관관계가 모두 0인 경우를 포함하여 표 1과 같이 5가지의 상관관계가 성립된다.

제안된 정식화는 상관관계계수가 -1 또는 +1 등의 완전 상관관계 외에 특정의 값을 가지는 경우에도 적용이 가능하지만, 완전상관관계의 경우가 불확실인수 사이의 상관관계에 따른 영향을 명확히 보여주므로 완전상관관계에 대한 해석 결과를 주로 제시하고자 한다.

5.2 상관관계 거리에 따른 응답변화도

구조에 대한 추계론적 해석은 구조 해석인수의 공간적 불확실성을 고려하여 이들 불확실성이 구조의 거동에 미치는 영향을 평가하는 것으로서, 일반적으로 이 영향은 분산계수 (coefficient of variation: COV)로 제시되며, 응답변화도로 표현되기도 한다. 구조응답 R 에 대한 분산계수는 식 (25)로 나타낸다.

$$COV = \frac{\sqrt{Var(R)}}{\bar{R}} \quad (25)$$

즉, 분산계수는 구조응답의 불확실 정도를 응답 표준편차의 평균에 대한 비율로 제시해 준다.

예제로 사용된 평판은 20×20 의 크기를 가지는 정방형 평판이다(그림 1). 경계조건으로는 단순지지(simple support)와 고정지지(clamped support)를 가정하였다. 작용하중은 구조의 상부에 가해진 등분포하중이다. 재료탄성계수의 확정론적 값은 $E_0 = 10.92 \times 10^3$, 확정론적 평판두께는 $h_0 = 1.0$, 포아송비는 $\mu_0 = 0.30$ 이다. 이들 값을 사용할 경우 평판의 휨강성 D 는 1000.0이 된다. 예제평판은 6×6 개의 평판요소로 모델링하였고, 이 요소망은 제안된 정식화에 의한 수치해석은 물론 몬테카를로 해석에서 동일하게 사용하였다. 몬테카를로 해석의 경우 국부평균법(local average scheme)을 적용하였다. 변위의 분산계수는 그림 1의 점 A에 대하여 제시하며, 불확실인수의 분산계수는 모두 0.1로 설정하였다: $\sigma_{EE} = \sigma_{\mu\mu} = \sigma_{hh} = 0.1$. 분산계수를 나타내고자 하는 변위 성

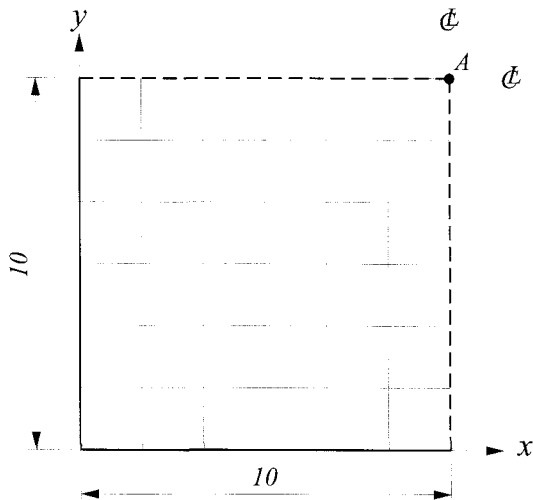


그림 1 예제 평판의 제원과 수치해석에 사용된 요소망

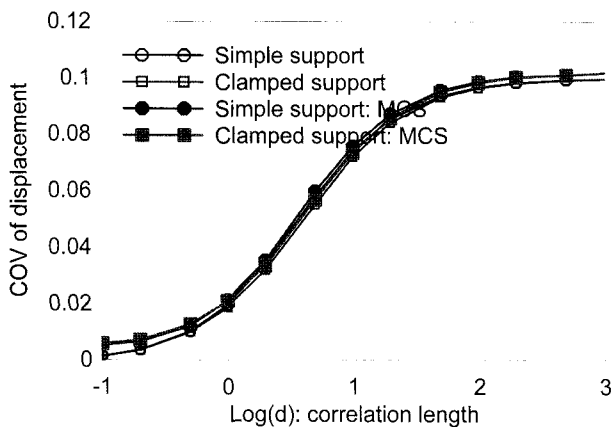


그림 2 불확실 탄성계수에 의한 응답변화도

분은 평면에 수직인 방향의 변위이다.

5.2.1 개별 불확실인수에 대한 검증: 몬테카를로 해석과의 비교

세 불확실인수와 그들 사이의 상관관계가 응답변화도에 미치는 영향에 대한 고찰 이전에, 먼저 개별 불확실인수에 의한 거동에 대하여 알아볼 필요가 있다. 이를 통하여 개별 불확실인수에 의한 응답변화도의 정도를 파악하고 나아가 이에 근거하여 이들 인수들 사이의 상관관계를 고려한 다중 불확실인수에 따른 거동의 특성을 파악하는 데에도 도움이 될 것이다.

그림 2는 재료탄성계수의 공간적 불확실성에 의한 변위의 분산계수를 상관관계거리 d 에 대하여 나타낸 것이다. 상관관계거리 d 가 1000인 경우, 즉 $\text{Log}(d)=3$ 에서 변위의 분산계수는 재료탄성계수의 분산계수인 0.1 정도의 값을 나타낼 수 있으며, 제안된 해석법에 의한 결과는 몬테카를로 해석 결과와 유사하게 나타나고 있다. 구조 변위의 분산계수가 재료탄성계수의 분산계수와 거의 동일하게 나타난 것은 재

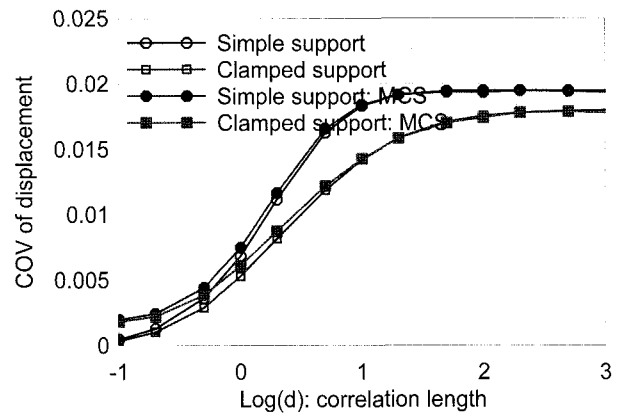


그림 3 불확실 포아송비에 의한 응답변화도

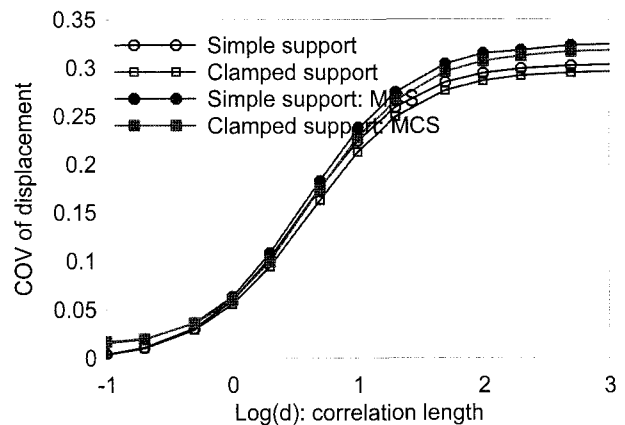


그림 4 불확실 평판두께에 의한 응답변화도

료탄성계수가 강성행렬에 1차의 함수로 작용하기 때문이다 (Noh 등, 2006). 이러한 사실은 아래에 제시된 포아송비와 평판 두께의 개별적 영향에 의한 응답변화도가 이들 개별적인 추계장의 분산계수와 다르게 나타나는 것에서도 알 수 있다.

구조 응답에 대한 불확실 포아송비의 독립적 영향은 그림 3에 나타난 바와 같이 구조의 경계조건에 영향을 받고 있으며, 재료탄성계수에 비하여 적은 응답변화도를 유발함을 알 수 있다. 이 경우 역시 제안된 해석법과 몬테카를로 해석이 유사한 결과를 보이고 있으며, 특징적으로 상관관계거리 d 가 큰 경우에 있어서는 재료탄성계수에 비하여 두 결과가 서로 잘 일치함을 알 수 있다. 이러한 결과는 포아송비가 재료탄성계수에 비하여 상대적으로 낮은 차수로 강성에 기여함에 의한다.

평판두께의 경우 인수의 공간적 불확실성이 구조의 응답변화도에 미치는 영향이 가장 크게 나타나고 있다. 그 이유는 평판두께가 식 (2)에서 보는 바와 같이 3차의 함수로 강성에 기여하기 때문으로 1차 Taylor 전개에 근거한 가중적분법이 고차의 함수에 대한 근사화에서 상대적으로 높은 오류를 가짐을 나타낸다. 그러나 평판두께의 불확실성은 다른 불확실인수에 비하여 그 정도가 낮다고 볼 수 있으며, 실제로

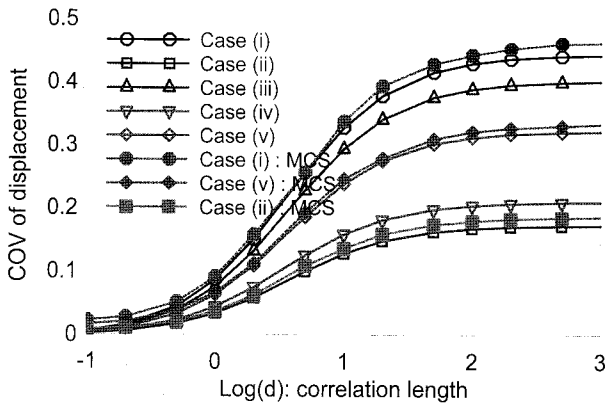


그림 5 단순지지 평판의 응답변화도

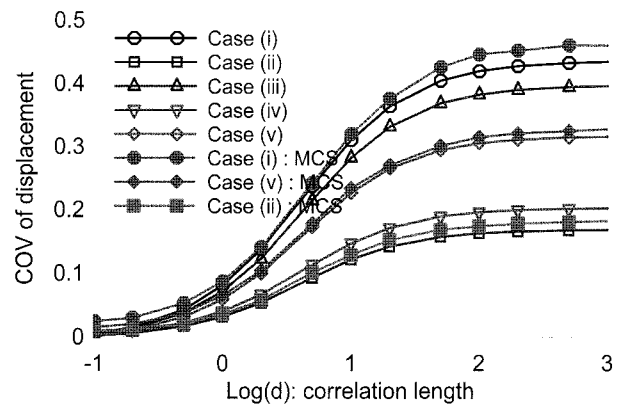


그림 6 고정지지 평판의 응답변화도

$-0.3 > f_h$ 또는 $f_h > 0.3$ 의 값을 가질 수 있는 0.1의 분산계수 가정은 매우 높은 정도의 불확실성이다. 그러므로 평판두께에 대하여, 실제적이라고 할 수 있는 0.1 이하의 낮은 분산계수를 가정할 경우 가중적분법은 유용한 결과를 줄 수 있음을 예상할 수 있다.

5.2.2 세 인수의 상관관계를 고려한 해석

그림 5는 단순지지평판에 대한 수치해석 결과로서 표 1의 5가지 상관관계상태에 대한 해석 결과를 추계장 상관관계거리 d 의 함수로 보여주고 있다. 본 논문에서 제안한 정식화에 의한 결과는 실선으로 나타내었으며, 몬테카를로 해석(그림에 MCS로 표기)은 점선으로 나타내었다(상관관계상태 (iii), (iv)의 경우 결과 제시의 복잡성을 피하기 위하여 몬테카를로 해석 결과는 제시하지 않았다). 그림에서 보는 바와 같이 제안한 정식화에 의한 해석과 몬테카를로 해석이 서로 근접한 결과를 제시하고 있음을 알 수 있다.

불확실인수 사이의 상관관계에 따른 영향을 보면 양의 상관관계의 경우 분산계수가 증가함에 음의 상관관계에서는 감소함을 알 수 있다. 상관관계상태 (i)의 경우 가장 큰 분산계수를 나타내고 있는데, $d=1000$ 에서 변위의 분산계수는 0.444로 나타났다. 이 경우에 대한 몬테카를로 해석 결과는 0.463이다. 제안한 해석법에 의한 결과는 몬테카를로 해석에 비하여 다소 적은 값을 나타내고 있으나 매우 근사한 값을 제시해 주고 있다. 몬테카를로 해석은 일반적으로 추계론적 해석의 정확해로 간주되고 있는 해석으로서 불확실인수의 추계장을 직접 생성하여 해석에 이용한다. 제안된 해석법과 몬테카를로 해석 결과의 차이는 제안 해석법이 변위에 대한 1차 Taylor 전개에 근거한 근사해법이라는 데에 있으며, 이러한 결과는 가중적분법은 물론 전개방식에 기본을 둔 기타의 해석법과 섭동법(perturbation technique) 등 근사해법의 일반적 현상이다.

그림 6은 고정지지 평판에 대한 해석 결과로서 이 경우에서도 제안한 해석법은 몬테카를로 해석에 근접한 결과를 제시하고 있다. 경계조건에 따라 분산계수는 단순지지 평판의 경우와 다소 다르게 나타나고 있으나 전체적으로 그 경향은 동일하다고 할 수 있다. 고정지지 평판에서 상관관계 상태 (i)에 대한 분산계수는 제안 방법과 몬테카를로 해석에서 각각 0.434, 0.460으로 산정되었다.

주목할 것은, 경계조건과는 무관하게 구조응답의 분산계수가 세 불확실인수 사이에 상관관계가 없는 경우(상관관계상태(v))에도 독립적인 인수에 의한 분산계수의 최대값보다 크게 나타난다는 것이다. 이는 구조 거동에 대한 추계론적 해석에서 가능한 한 다수의 불확실인수를 고려해야 할 필요성이 있음을 제시해 준다. 상관관계상태(v)에 해당하는 분산계수는 0.323이며($d=1000$), 재료탄성계수만 고려할 경우 0.0997, 포아송비의 경우 0.0195, 그리고 평판두께의 경우 0.304이다.

5.3 전단뒤틀림 현상과 추계론적 해석의 안정성

평판과 셸의 경우 두께가 얇아질수록 전단변형에 대한 에너지가 과대하게 평가되어 구조거동이 비정상적으로 감소하는 현상이 발생하는데 이를 전단뒤틀림(shear locking)현상이라고 한다. 이를 개선하기 위하여 감차적분(reduced integration), 선택적분(selective integration), 대체전단변형률장(substitute shear strain field), 비적합변형(non-conforming modes) 적용 등의 기법들이 사용되고 있다.

그림 7은 형상계수 L/h 에 따른 평판의 거동으로서 평판 유한요소해석 결과를 이론해에 대하여 정규화한 값을 형상계수에 대하여 나타낸 것이다. 그림에서 보는 바와 같이 사용한 평판요소는 형상계수 7정도까지 평판이론에 따른 이론해와 유사한 거동을 보여주고 있다.

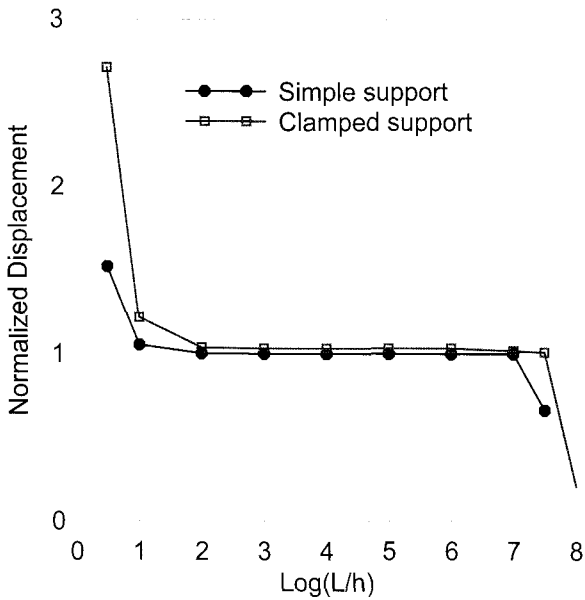
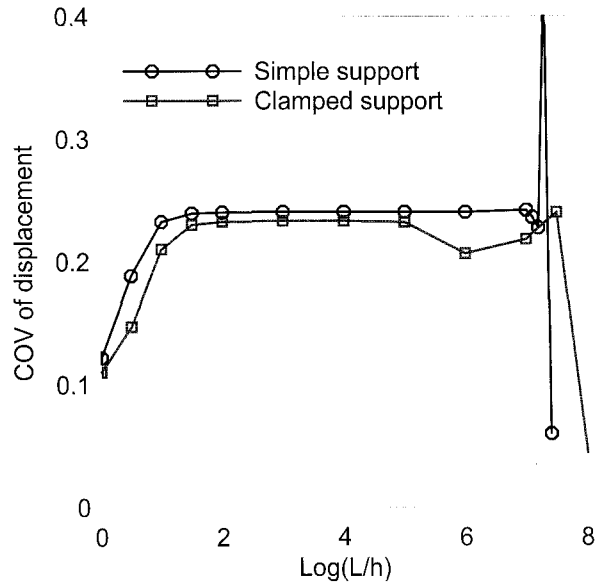


그림 7 형상계수 L/h 에 따른 평판의 거동

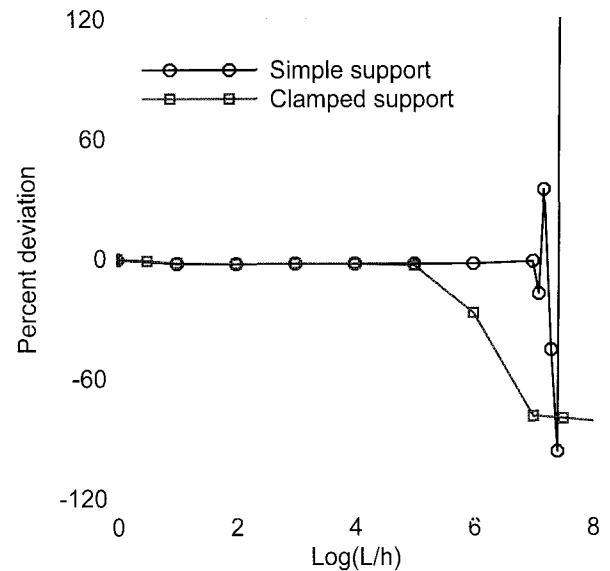
형상계수에 따른 평판의 추계론적 거동은 그림 8에 나타내었다. 그림 8(a)는 형상계수에 따른 분산계수를 나타낸 것이다. 확정론적 해석에서 안정적 해가 얻어진 형상계수 7까지의 범위에서 분산계수는 안정된 값을 나타내고 있다. 경계조건과 상관없이 형상계수 7 이후에는 확정론적 해석자체의 불안정에 의하여 분산계수가 진동하는 결과를 나타내고 있다. 그러나 고정지지 평판의 경우 형상계수 5 이후에도 조금의 변동이 있는 것으로 나타났다. 그 이유는 평균변위와 확정론적 변위의 비율을 형상계수에 따라 나타낸 그림 8(b)로부터 알 수 있다. 그림에서 보는 바와 같이 형상계수 5이상에서 고정지지 평판의 경우 급격한 평균강성의 증가가 나타남을 보여주고 있다. 그러므로 그림 8(a)에 보여진 고정지지 평판에서 나타난 분산계수의 불규칙적인 변동은 평균강성의 비정상적 증가에 의한 것임을 알 수 있다. 그러나 단순지지 평판의 경우에는 이런 현상이 관찰되지 않았으며 전 범위에서 안정적 분산계수가 산정되었다.

5.4 분산계수에 대한 상관관계계수의 영향

그림 9는 불확실인수 사이의 상관관계계수 ρ_{ij} 를 변화시키면서 분산계수의 변화를 살펴본 것이다. 이 결과는 단순지지 평판에서 상관관계거리 d 를 10(즉, $\text{Log}(d)=1.0$)으로 설정하여 얻은 것이며, E, μ 사이의 상관관계계수를 cf1으로, E, h 사이를 cf2, μ, h 사이의 상관관계계수를 cf3으로 나타내었다. 일점쇄선으로 나타낸 결과는 초기 변화도에 대한 선형의삽결과이다.



(a) 형상계수에 따른 구조응답의 분산계수



(b) 중앙점 평균변위와 확정론적 변위의 비교 (백분율)
그림 8 형상계수에 따른 평판의 추계론적 응답

그림에서 보듯이 분산계수는 상관관계계수의 변화에 따라 비선형적으로 증가하는 것을 알 수 있다. 이러한 경향은 재료탄성계수와 평판의 두께 인수 사이의 상관관계에서 특히 뚜렷하게 나타났다. 영향이 가장 적게 관찰된 경우는 재료탄성계수와 포아송비 사이의 상관관계계수에 의한 결과이다. 그러나 이들 상관관계계수가 보여주는 분산계수에 대한 영향은 그 경향이 서로 다른데, 그림 9에서 보는 바와 같이 재료탄성계수와 평판두께 사이의 상관관계계수의 증가에 따른 분산계수 증가율이 음인 반면 나머지 두 경우에는 작으나마 양의 증가율을 보임을 알 수 있다.

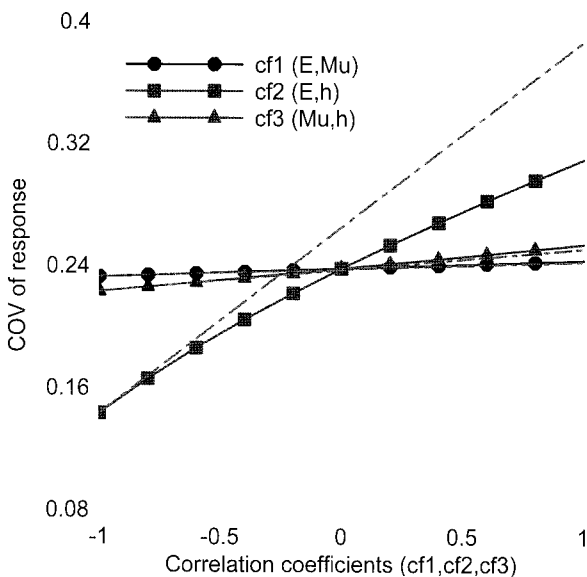


그림 9 상관관계계수와 응답의 분산계수: $\text{Log}(d)=1.0$

6. 결 론

본 연구에서는 평판유한요소해석에 개입되어 있는 세 인수인 재료탄성계수, 포아송비 그리고 평판두께를 공간적 불확실성을 가지는 인수로 가정하고 이들 인수들에 나타나는 공간적 불확실성이 구조의 거동에 미치는 영향을 산정하기 위한 체계론적 유한요소해석 정식화를 수행하였다. 이들 세 인수의 공간적 분포는 독립적인 추계장 함수를 부여하여 모델링 하였으며, 따라서 각 인수들은 확정론적 항과 추계장함수에 의한 변동성분의 합으로 표현된다.

응답의 평균과 공분산 산정을 위하여 유도된 결과식은 개별 추계장함수의 함수로 구성되는 곱함수가 개입되며, 이들 곱함수에 대한 평균연산을 통하여 자기상관함수와 상호상관함수를 유도하였다. 특기할 사항은 개별적 추계장 함수의 경우 평균이 0인 반면, 곱함수는 0의 평균을 가지지 않는다는 것이다. 이에 따라 평판의 평균응답은 확정론적 응답과는 다르게 나타난다.

개별 불확실인수 사이의 상관관계는 상호상관함수와 상관관계계수를 통하여 고려하였다. 문제의 단순화를 위하여 상호상관함수는 자기상관함수와 동일한 형태를 사용하였고(그 외의 함수 사용에 대한 이론적 제한은 없음), 세 개별인수 사이의 상관관계계수에 따른 구조 응답변화도를 고찰하였다. 세 불확실인수의 분산계수를 모두 0.1로 가정할 경우 최대 분산계수는 상관관계거리 $d=1000$ 에서 0.444(단순지지)와 0.463(고정지지)로 나타났는데, 이들 분산계수는 개별 불확실인수에 대한 해석결과의 합보다 크게 나타남을 알 수 있었다. 제안한 정식화에 의한 결과는 임의의 추계장에 대하여

몬테카를로 해석에 상당하는 결과를 나타내어 제안한 정식화가 타당함을 알 수 있었으며, 나아가, 제안한 정식화는 사용 평판요소가 전단목입에 대하여 안정적인 영역 내에서 안정적인 분산계수를 제시하고 있음을 보여주었다.

참 고 문 헌

최창근, 노혁천 (1990) 가중적분법을 이용한 반무한영역의 추계론적 유한요소해석, 한국전산구조공학회 논문집, 12(2), pp.129~140.

Chakraborty, S., Bhattacharyya, B. (2002) An efficient 3D stochastic finite element method, *International Journal of Solids and Structures* 39, pp.2465~2475.

Deodatis, G., Wall, W., Shinozuka, M. (1991) Analysis of two-dimensional stochastic systems by the weighted integral method, In Spanos, P.D. and Brebbia, C.A. editors, *Computational Stochastic Mechanics*, pp.395~406.

Ghanem, R. Spanos, P.D. (1990) Polynomial chaos in stochastic finite-elements, *Journal of applied Mechanics-Transactions of the ASME*, 57(1), pp. 197~202.

Ghanem, R. Spanos, P.D. (1991) *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*, Springer-Verlag, New York.

Graham, L., Deodatis, G. (1998) Variability response functions for stochastic plate bending problems, *Structural Safety*, 20, pp.167~188.

Hisada, T., Noguchi, H. (1989) Development of a nonlinear stochastic FEM and its application, In Ang AH-S, Shinozuka M, Schuëller GI, editors. *Structural Safety and Reliability*, Proc of the 5th ICOSSAR. San Francisco: ASCE.

Kaminski, M. (2007) Generalized perturbation-based stochastic finite element method in elastostatics, *Computers & Structures*, 85(10), pp.586~594.

Lawrence, M.A. (1987) Basis random variables in finite element analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24, pp.1849~1863.

Noh, H.C. (2004) A formulation for stochastic finite element analysis of plate structures with uncertain Poisson's ratio, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(45-47), pp.4857~4873.

- Noh, H.C., Park, T.** (2006) Monte Carlo simulation-compatible stochastic field for application to expansion-based stochastic finite element method, *Computers and Structures*, 84(31-32), pp. 2363~2372.
- Schuëuller, G.I.** (2001) Computational Stochastic Mechanics-Recent Advances, *Computers and Structures*, 79, pp.2225~2234.
- Schuëuller, G.I.** (2007) On the treatment of uncertainties in structural mechanics and analysis, *Computers and Structures*, 85(5-6), pp.235~243.
- Spanos P.D., Beer M., Red-Horse J.** (2007) Karhunen-loeve expansion of stochastic processes with a modified exponential covariance kernel, *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, 133 (7), pp.773~779.
- Vanmarcke E.H., Grigoriu, M.** (1983) Stochastic finite element analysis of simple beams, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 109(5), pp.1203~1214.