

대수학 부구조법을 이용한 내부 고유치 계산

Interior Eigenvalue Computation Using Algebraic Substructuring

고진환*

변도영*

Ko, Jin-Hwan

Byun, Do-Young

(논문접수일 : 2007년 7월 23일 ; 심사종료일 : 2007년 10월 17일)

요지

대수학 부구조법은 대형 문제들의 고유치 계산에 최고 성능을 지닌 방법이지만 근본적으로 최소 고유치만을 계산하기 위해 설계되었다. 본 논문에서는 이동값을 이용하여 특정범위 안의 내부 고유치를 계산하기 위해 대수학 부구조법의 갱신된 버전을 제안하고, 이를 이동 대수학 부구조법이라 명명한다. 그리고 구조문제의 유한요소모델에 대한 수치실험을 통해 제안된 방법이 다수의 내부고유치를 계산하는데 란초스방법보다 월등한 효율성을 가지고 있음을 보였다.

핵심용어 : 내부 고유치, 대수학 부구조법, 이동값

Abstract

Algebraic substructuring (AS) is a state-of-the-art method in eigenvalue computations, especially for large size problems, but, originally, it was designed to calculate only the smallest eigenvalues. In this paper, an updated version of AS is proposed to calculate the interior eigenvalues over a specified range by using a shift value, which is referred to as the shifted AS. Numerical experiments demonstrate that the proposed method has better efficiency to compute numerous interior eigenvalues for the finite element models of structural problems than a Lanczos-type method.

Keywords : interior eigenvalue, algebraic substructuring, shift value

1. 서론

구조 역학에서 고유치는 기계·건축구조의 공진주파수를 의미하며, 고유벡터는 해당되는 고유한 모드형상(mode shape)을 표현하게 된다. 또한 고유벡터들은 외부 조하하중에 대한 기계·건축구조의 동적응답을 근사하는 기저벡터로 사용되기도 한다(Craig, 1981).

이 경우 동적응답의 원하는 정확성을 얻기 위해서는 조하하중의 주파수 영역에 해당되는 다수의 고유벡터들이 요구된다. 다수의 고유치/벡터 계산은 컴퓨터의 성능이 크게 향상된 현재에서도 부담이 되는 작업이다.

구조 설계에서 일차적인 관심 주파수는 대부분의 에너지를 가지고 있는 저주파에 대한 동적응답들이며, 이를 위해서는

다수의 최저 고유치들이 이용된다. 하지만 최근에는 제품의 질을 높이기 위해 자동차의 에어컨 팬과 같은 이차적인 진동 근원에서 발생하는 고주파에 대한 동적응답에 대한 고려가 요구되고 있다. 그래서 고주파수에 해당되는 내부 고유치들이 필요하며, 역시 원하는 정확성을 만족하기 위해 다수가 요구된다. 더불어 유한요소법으로 수치모델을 하는 경우, 고주파 모드를 근사하기 위해서 더욱 세밀한 모델이 필요하기 때문에 해당 수치방정식의 개수(혹은 시스템의 크기)도 증가하여 계산량이 급격히 증가하게 된다. 이런 이유로 효율적인 수치해석기의 개발이 필요하게 된다.

기존의 수치해석기로는 란초스방법(Lanczos method)의 이동-역(shift-and-inverse) 버전(Bai 등, 2000)이 주로 사용이 된다. 그러나 이 방법은 구하고자 하는 개수가 증가

* 책임저자, 정회원 · 건국대학교 항공우주정보시스템공학과 연구교수
Tel: 02-2049-6080 ; Fax: 02-444-6106
E-mail: jhko@aero.konkuk.ac.kr

* 건국대학교 항공우주정보시스템공학과 교수

* 이 논문에 대한 토론을 2008년 2월 29일까지 본 학회에 보내주시면 2008년 4월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

되는 경우에 계산량이 급격히 증가하며 시스템 크기에 증가도 역시 계산 부담이 늘어나게 된다.

이 중, 시스템의 크기에 대한 부담을 줄이기 위해 개발된 방법이 부구조법이다. 부구조법은 이른 1960년대에 처음으로 개발된 방법으로 최근 몇 년 동안 다시 부각 되었으며, 고성능 동적해석기인 자동 다수준 부구조법(auto-mated multilevel substructuring: AMLS)이 제안되었다(Bennighof 등, 1992; Bennighof 등, 2004; Kaplan, 2001). 이는 구조를 반복적으로 다수의 부구조로 분할하고 부구조들은 효율적으로 혹은 병렬적으로 처리가 된다. 이 AMLS방법의 대수학 접근법인 대수학 부구조법(algebraic substructuring: AS)은 그 이후의 연구들(Gao 등, 2006; Yang 등, 2005)에서 소개되었다. AMLS은 최소 고유치에 해당되는 고유 벡터들을 필요로 하는 저주파 응답해석에서 성공적으로 적용되어 왔다(Kaplan, 2001).

그러나 AMLS/AS방법들은 다수의 최소 고유치들을 구하는 경우에 맞추어 개발이 되었기 때문에 내부 고유치를 구하는 경우에는 가지고 있는 장점이 감소되는 경우가 발생하게 된다. 본 연구에서는 란초스방법에서 사용된 이동(shift)개념을 부구조법에 수정·적용하였고, 이로서 AS방법의 장점은 유지하면서 다수의 내부 고유치를 효율적으로 계산할 수 있게 되었다. 본문에서는 부구조법에 이동 개념 적용과 정확성 예측 그리고 수치실험을 통한 제안한 방법의 성능평가에 대해 기술하였다.

2. 대수학 부구조법(AS)

저주파 영역에서 동적 응답을 구하는 경우, 행렬 쌍(K, M)의 다음 고유치 문제에서 최소 고유치/벡터를 추출한다.

$$Kq_k = \lambda_k Mq_k \quad (1)$$

여기서 $q_k^T Kq_k = \lambda_k$ 그리고 $q_k^T Mq_k = 1$ 이다. 그러나 고주파 응답에 대해서는 관심 영역에 근접한 공진 주파수들에 해당되는 고유치/벡터가 더욱 중요하다(Craig, 1981). 즉 특정 범위 $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ 에 속하는 다수의 고유치들과 그에 해당되는 고유벡터들을 구하는 문제가 된다. 그래서 다음의 이동된 고유치 문제에서 시작한다.

$$K^\sigma q = \lambda^\sigma Mq \quad (2)$$

여기서 $K^\sigma = K - \sigma M$ 이고 $\lambda^\sigma = \lambda - \sigma$ 이다. σ 는 주어진 고유치 범위에 관련해서 결정되는 이동값이다. 이동값을 정하는 기준에 대해서는 나중에 논의된다.

먼저 행렬 쌍(K^σ, M)은 영역분할 알고리즘에 의해 다음과 같이 재정렬된다.

$$K^\sigma = \begin{matrix} & N_1 & N_2 & N_3 \\ N_1 & K_{11}^\sigma & & K_{13}^\sigma \\ N_2 & & K_{22}^\sigma & K_{23}^\sigma \\ N_3 & K_{31}^\sigma & K_{32}^\sigma & K_{33}^\sigma \end{matrix} \quad M = \begin{matrix} & N_1 & N_2 & N_3 \\ N_1 & M_{11} & & M_{13} \\ N_2 & & M_{22} & M_{23} \\ N_3 & M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{matrix} \quad (3)$$

여기서 $\{K_{11}^\sigma, M_{11}\}$ 와 $\{K_{22}^\sigma, M_{22}\}$ 는 경계 블록 $\{K_{33}^\sigma, M_{33}\}$ 로 연결되는 두 개의 부구조들이다. 시스템의 크기는 N 이며 $N = N_1 + N_2 + N_3$. 단순성을 위해 단일 수준의 부구조를 기술하였고 다수준의 경우는 Gao(2006)의 논문에서 나타나 있는 동일한 방법으로 이동된 행렬에 적용 가능하다. 다음은 K^σ 의 블록 LDL^T 행렬분할에 의해서 이동된 고유치 문제는 다음과 같이 변환된다.

$$K^\sigma \hat{q} = \lambda^\sigma M \hat{q} \quad (4)$$

여기서 K^σ 와 M 는 Craig-Bampton형태(Craig 등, 1968)로 나타내어진다.

$$K^\sigma = L^{-T} K^\sigma L^{-1} = \begin{bmatrix} K_{11}^\sigma & & \\ & K_{22}^\sigma & \\ & & K_{33}^\sigma \end{bmatrix} \quad M = L^{-T} M L^{-1} = \begin{bmatrix} M_{11} & & M_{13} \\ & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \quad (5)$$

위 식들에서 사용된 변환행렬과 변환된 각 요소들은 다음과 같다.

$$L = \begin{bmatrix} I & (K_{11}^\sigma)^{-1} K_{13}^\sigma \\ & I & (K_{22}^\sigma)^{-1} K_{23}^\sigma \\ & & & I \end{bmatrix} \quad K_{33}^\sigma = K_{33}^\sigma - \sum_{i=1}^2 (K_{i3}^\sigma)^T (K_{ii}^\sigma)^{-1} K_{i3}^\sigma$$

$$M_{i3} = M_{i3} - M_{ii} (K_{ii}^\sigma)^{-1} K_{i3}^\sigma$$

$$M_{33} = M_{33} - \sum_{i=1}^2 \{ (K_{i3}^\sigma)^T (K_{ii}^\sigma)^{-1} M_{i3} + M_{i3}^T (K_{ii}^\sigma)^{-1} K_{i3}^\sigma \}$$

$$-(K_{13}^\sigma)^T (K_{ii}^\sigma)^{-1} M_{ii} (K_{ii}^\sigma)^{-1} K_{13}^\sigma \}$$

이 변환은 동일변환(congruence transformation)으로 양정치, 대칭과 같은 기존 행렬의 특성들이 그대로 유지되고 계산되는 고유치들도 동일하다(Bai 등, 2000).

AS의 다음 과정은 각 블록들의 강성, 질량행렬들(K_{ii}^σ , M_{ii}) ($i=1,2$) 와 (K_{33}^σ , M_{33})을 이용하여 상대적으로 작은 크기의 고유치 문제들을 구성한 후 AS 컷오프값(cutoff values), μ_{\min} 과 μ_{\max} 안에 있는 고유벡터를 추출한다. 이를 AS 모드라고 명명한다. 추출된 AS 모드를 열로 사용하여 구성되는 사영행렬(project matrix)은 다음과 같다.

$$S = \begin{matrix} & m_1 & m_2 & m_3 \\ \begin{matrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} S_1 & & \\ & S_2 & \\ & & S_3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (6)$$

여기서 S_1, S_2 그리고 S_3 는 각 부구조와 경계에서 추출된 고유벡터들로 구성된다. 최소, 최대 컷오프값에 의해 하부와 상부에 탈락된 고유벡터들이 존재하는 것이 기존 AS방법과 구분되는 특징이다. 기존의 고유치 문제를 사영행렬의 열 벡터들로 이루어진 부공간에 사영을 하게 되면, $m = m_1 + m_2 + m_3$ 으로 축소된 고유치 문제가 구성된다.

$$K_m^\sigma \phi = \theta^\sigma M_m \phi \quad (7)$$

여기서 K_m^σ 과 M_m 는 다음과 같은 $m \times m$ 행렬로 정의된다.

$$K_m^\sigma = S^T K^\sigma S, \quad M_m = S^T M S \quad (8)$$

표준 Rayleigh-Ritz이론에 근거하여 θ^σ 는 고유치 λ^σ 에 대한 근사값이 되고 $q = L^{-1} S \phi$ 으로 구해지는 벡터는 해당되는 고유치 벡터를 근사한다(Parlett, 1980). 이와 같이 이동값을 이용한 AS방법을 이동 AS라고 명명하고 사용한다.

특히 이동이 0으로 주어지게 되면, 하부의 탈락 고유벡터들이 없게 된다. 이 때 이 장의 일련 과정들은 기존의 AS 방법과 동일하게 된다.

3. 정확성

추출된 AS 모드가 정확성이 미치는 영향은 AS 알고리즘 연구의 중요한 이슈이다(Bennighof 등, 2004; Yang, 2005). 여기서는, 이동 AS의 경우에 추출된 AS 모드를 이용하여 정확성에 영향을 주는 인자들을 알아보려 한다.

먼저 i 번째 블록 고유치 문제의 j 번째 해를 $((\mu^\sigma)_j^i, v_j^i)$ 이라 하고, 경계 블록의 고유치 문제의 해를 $((\mu^\sigma)_j^3, v_j^3)$ 이라 다음과 같이 지정한다.

$$K_{ii}^\sigma v_j^i = (\mu^\sigma)_j^i M_{ii} v_j^i, \quad i=1,2, \quad K_{33}^\sigma v_j^3 = (\mu^\sigma)_j^3 M_{33} v_j^3 \quad (9)$$

탈락된 AS 모드의 영향을 해석하기 위해 먼저 식 (4)의 \hat{q} 을 다음과 같이 나타낸다.

$$\hat{q} = \begin{bmatrix} V_1 & & \\ & V_2 & \\ & & V_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

여기서 $V_i = \{v_1^i, \dots, v_{N_i}^i\}$, $i=1,2,3$. 이고 $y = \{y_1^T, y_2^T, y_3^T\}^T \neq 0$. V^T 를 곱함으로써 V 의 각 열로 이루어진 부공간에 해당하는 사영 고유치 문제를 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} N_1^\sigma & & \\ & N_2^\sigma & \\ & & N_3^\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \lambda^\sigma \begin{bmatrix} I_1 & & G_{13} \\ & I_2 & G_{23} \\ G_{13}^T & G_{23}^T & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (11)$$

여기서 $N_i^\sigma = \text{diag}((\mu^\sigma)_1^i, (\mu^\sigma)_2^i, \dots, (\mu^\sigma)_{N_i}^i)$, $i=1,2,3$ 이고 $G_{i3} = V_i^T M_{i3} V_3$, $i=1,2$. $N_i^\sigma - \lambda^\sigma I_i$ 이 비 특이성(non-singularity)이라 가정하면 식 (11)의 각 블록들은 다음과 같이 나타내진다.

$$y_i = (N_i^\sigma - \lambda^\sigma I_i)^{-1} \lambda^\sigma G_{i3} y_3, \quad i=1,2, \\ y_3 = (N_3^\sigma - \lambda^\sigma I_3)^{-1} \lambda^\sigma (G_{13}^T y_1 + G_{23}^T y_2) \quad (12)$$

결과적으로, y 의 j 번째 성분은 다음과 같이 표현된다.

$$|e_j^T y_i| = \rho_{\lambda^\sigma}((\mu^\sigma)_j^i) g_j^i, \quad (13)$$

여기서

$$\rho_{\lambda^\sigma}((\mu^\sigma)_j^i) = |\lambda^\sigma / ((\mu^\sigma)_j^i - \lambda^\sigma)|, \quad g_j^i = |e_j^T G_{i3} y_3|, \quad i=1,2$$

그리고 $g_j^3 = |e_j^T (G_{13}^T y_1 + G_{23}^T y_2)|$.

일정 크기의 상수 $\gamma_1 < \gamma_2$ 에 대해 $|g_i^j| \in [\gamma_1, \gamma_2]$ 이 만족하면, $|e_j^T y_i|$ 크기는 기본적으로 $\rho_{\lambda^\sigma}((\mu^\sigma)_j^i)$ 에 의해 결정된다(Gao 등, 2006; Yang 등, 2005). $\rho_{\lambda^\sigma}((\mu^\sigma)_j^i)$ 형태는 처음 Yang(2005)에 의해 제안되었고 ρ -인자로 명명되었다. $(\mu^\sigma)_j^i$ 가 구하고자 하는 λ^σ 에 가까우면 $\rho_{\lambda^\sigma}((\mu^\sigma)_j^i)$ 는 커지며 멀어지게 되면 $\rho_{\lambda^\sigma}((\mu^\sigma)_j^i)$ 는 작아진다. 원하는 정확성에 효율성을 동시에 만족하려면, $\rho_{\lambda^\sigma}((\mu^\sigma)_j^i)$ 가 작은

AS 모드들은 탈락시키는 것이 유리하다.

4. 알고리즘

$(\mu^\sigma)_j - \lambda^\sigma$ 이 고정되었을 때 식 (13)에 근거하여 이동과 구하는 고유치가 가까워 질수록 λ^σ 가 감소하기 때문에 ρ -인자가 최소가 된다. 즉 주어진 고유치 범위에 대해 중간 위치의 고유치를 정확성을 최대로 하기 위해서 역시 중간 위치로 이동을 정한다.

$$\sigma = \frac{1}{2}(\lambda_{\max} + \lambda_{\min}) \quad (14)$$

또한, 고유치의 원하는 정확성을 획득하기 위해서는 ρ -인자가 큰 순서대로 AS 모드들이 필요하게 된다. 따라서 AS 컷오프 값인 μ_{\min}^σ 과 μ_{\max}^σ 는 일반적으로 주어진 고유치 영역 λ_{\min}^σ 과 λ_{\max}^σ 에 비례해서 결정된다. 즉

$$\mu_{\min}^\sigma = c_l \lambda_{\min}^\sigma, \quad \mu_{\max}^\sigma = c_u \lambda_{\max}^\sigma \quad (15)$$

여기서 c_l 와 c_u 는 확장 계수(relaxation coefficients)로 명명한다. c_l 와 c_u 가 증가하게 되면 고유치의 정확성이 일반적으로 향상된다. 확장 계수들은 최근의 연구결과에서 주로 사용한 값을 내정값(default)으로 사용하였다. 즉 $c_l = c_u = 10$ (Kaplan, 2001).

이동 AS는 ASEIG 코드(Gao 등, 2006)를 기반으로 개발된 알고리즘으로 단순히 AS라고 표기한다. 다수준 부구조는 MeTiS(Karypis, 2006)의 부 함수로 구현되었다. 사영 시스템 (7)의 고유치/벡터와 다수의 부구조의 AS 모드들은 ARPACK(Lehoucq, 1998)와 SuperLU(Demmel 등,

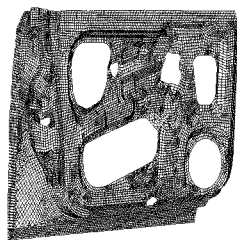
1999)에 의해 계산되었고 경계 블록의 AS 모드들은 밀집된 행렬특성에 의해 LAPACK(Anderson 등, 1999)에 의해 구해졌다.

현재 state of art 란초스방법은 블록 버전으로 Grimes (1994)에 의해 처음 제안되었고, 그 이후 대부분의 상용코드들에 적용되어 왔다. 또한 대형 문제들에서 블록 란초스의 성능은 ARPACK의 란초스보다 2배 이상으로 빠른 것으로 알려져 있다(Arbenz, 1999). 반면, ARPACK의 이동-역 란초스(SIL)는 최적의 코드는 아니지만 공개되어 있어서 AS 코드에 쉽게 적용 가능하였고, 이 SIL를 AS방법의 비교 대상으로 정하여 수치실험을 하였다. 이동을 0으로 부여한 AS는 AS^0 로 표기하며, 이전 연구에서 발표된 기존 AS방법과 동일하다(Gao 등, 2006).

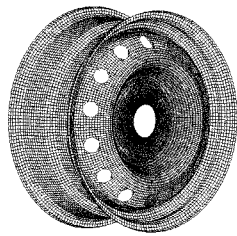
5. 수치 실험

최근 자동차 설계에서 경쟁력 향상을 위해 이차적인 진동 근원인 에어컨 팬, 스피커 등에 의한 고주파 가진 하중에 대한 동적 응답을 해석하고 제어하려는 노력이 요구되고 있다. 또한 환기 장치가 장착된 건축 구조물에서는 작동하는 팬의 회전율에 근접한 내부 고유치들이 요구된다. 이 외에도 기계, 건축 구조에서 이차적인 진동에 대한 응답을 해석하기 위해 다수의 내부 고유치 계산을 필요하게 된다.

본 논문에서 동력 전달, 구조 지지와 같은 각각의 기능을 가지고 자동차를 구성하는 자동차 부품들에 대해 최소 고유치 및 내부 고유치들을 구해보고자 한다. 사용된 예제들은 유한요소로 수치 모델되었으며, 그림 1에는 형상이 자세한 정보는 표 1에 있다. 유한요소로 구성되었기 때문에 수치 모



(a) Door



(b) Wheel



(c) Blade



(d) Shaft

그림 1 각 자동차 부품의 유한 요소 모델

표 1 각 예제들의 자세한 정보 (nnz: 0이 아닌 항의 개수, D.O.F: 자유도)

Examples	Description	Finite Element Type	D.O.F.	nnz (K)
Door	Inner panel of a car door	4 node shell	72,402	3,546,564
Wheel	Wheel frame of a car	4 node shell	95,592	5,092,042
Blade	Blade of a Turbine	4 node solid	37,755	1,381,671
Shaft	Crankshaft of an engine	4 node solid	90,954	3,623,652

델들의 강성행렬 K 와 질량행렬 M 은 양정치, 비 특이성, 대칭성을 만족한다. 쉘 요소는 DKMQ(Katili, 1993)이고 솔리드 요소는 기본 변위요소이다. 모든 수치실험은 1.6 GHz Itanium II processor 워크스테이션에서 진행되었다. 이 컴퓨터의 사양으로는 메모리가 15 기가바이트, 하드디스크가 100 기가바이트의 공간을 가지고 있으며 운영체제는 Red Hat Linux 3.2.3-42이다.

5.1 최소 고유치

각 예제들에 대해 최소 고유치 수를 50, 100, 200으로 증가하면서 계산 시간과 정확성에 대해 알아보았다. 부구조법의 수준은 MeTiS에서 자동적으로 결정되며 Door, Wheel, Blade, 그리고 Shaft에 대해 각각 9, 10, 8, 그리고 10이다. 이동값이 0인 AS^0 방법이 이용되었고, 완화 계수 c_u 는 내정값 10을 주어졌다. SIL에서도 역시 이동값이 0으로 주어졌다. 이 때 AS^0 에 의해 계산된 고유치의 정확성은 SIL에 구해진 고유치와의 상대오차로 나타내었다. 두 방법들의 계산 시간은 그림 2(a)에 상대오차는 그림 2(b)에서 확인할 수 있다.

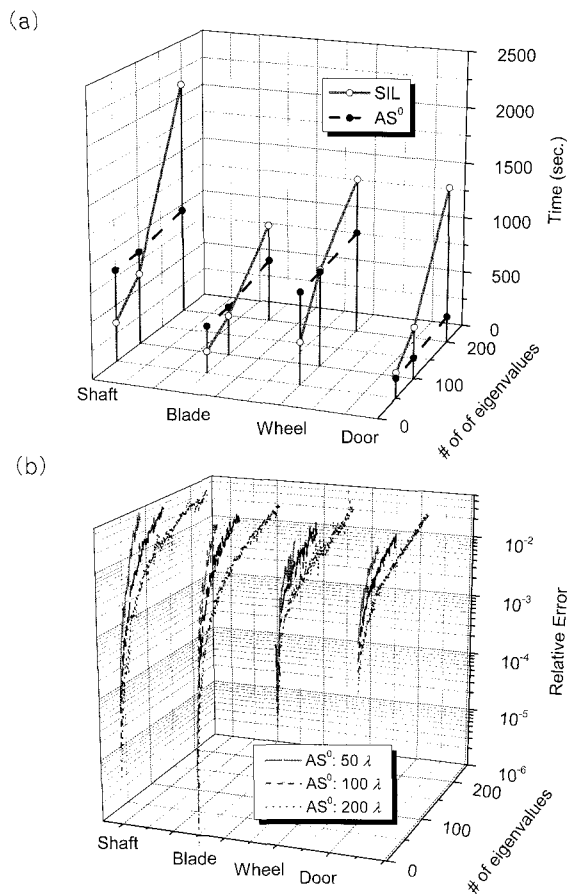


그림 2 최소 고유치 개수 증가에 따른 (a) SIL, AS^0 의 계산 시간과 (b) AS^0 의 상대오차

그림 2(a)에서 최소 고유치 50개의 경우 Door를 제외하고 AS^0 의 계산 시간이 SIL에 비교하여 더 요구되었으나 계산 시간 증가 폭이 상대적으로 매우 작기 때문에 200개의 경우 모든 예제들에서 AS^0 경우가 계산 시간이 적게 소모되었다. 그림 2(b)에서 완화계수가 같은 경우에 상대 오차가 모든 경우에 $O(10^{-2})$ 정도로 조정되었고, 이동값 0에 가까울수록 정확성이 우수하고 멀어질수록 정확성이 떨어지는 것을 볼 수 있다. 이런 정확성 분포는 ρ -인자에 의해 예측 가능하며 기존 연구에서와 같은 결과를 나타낸다(Bennighof 등, 2004; Gao 등, 2006).

5.2 내부 고유치

각 예제들에 대해 내부 고유치 수를 50, 100, 200으로 증가하면서 계산시간과 정확성에 대해 알아보았다. 이 때 201번째 최소 고유치를 첫 번째 내부 고유치로 이용하였다. 부구조법의 수준은 수치실험 (1)과 동일하게 결정된다. AS 방법이 사용되었고 이동값은 식 (14)에 의해서 결정되며 완화 계수 $c_i = c_u$ 는 내정값 10으로 주어졌다. SIL에서 이동값은 200과 201번째 고유치 사이 값으로 주어졌다. 이 때

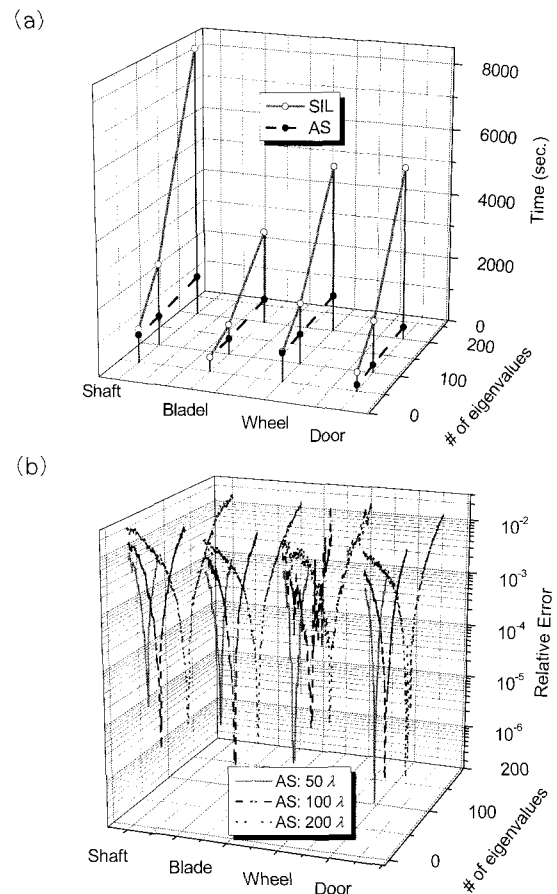


그림 3 내부 고유치 개수 증가에 따른 (a) SIL, AS 의 계산 시간과 (b) AS 의 상대오차

표 2 내부 고유치 개수 증가에 따른 성능 수치

	AS / SIL Computing Time (sec.)			Maximum Relative Error (%)		
	50	100	200	50	100	200
Door	191 / 559	224 / 1555	375 / 5283	0.61	1.2	2.6
Wheel	845 / 883	904 / 1840	1096 / 5113	0.91	3.4	2.9
Blade	428 / 425	474 / 911	724 / 2861	0.64	1.4	2.4
Shaft	831 / 1006	891 / 2492	1182 / 8324	1.1	1.7	3.1

상대 오차는 수치실험 (1)과 동일하게 구하였다. 두 방법들의 계산 시간은 그림 3(a)에 상대 오차는 그림 3(b)에서 확인할 수 있다.

먼저 그림 3(a)를 그림 2(a)와 비교해보면 SIL 경우는 이동에 의한 계산시간 증가 폭이 큰 반면 AS의 경우는 계산 시간들이 거의 비슷한 것을 확인할 수 있다. 또한 AS는 AS^0 와 같은 경향으로 내부 고유치 개수 증가에 따른 계산 시간 증가 폭이 매우 작다. 그래서 AS의 계산 시간이 SIL에 비해 상당히 적게 소모됨을 알 수 있다. 그림 3(b)에서 주어진 완화계수에 대해서 상대 오차가 $O(10^{-2}) \sim O(10^{-3})$ 에 위치하고 수치실험 (1)보다는 다소 작다. 최소 오차는 이동이 위치한 범위 중간 부분이고, ρ -인자에 의해 예측되는 오차 분포를 따르는 수치 결과를 보이고 있다.

AS 성능을 자세히 분석하기 위해 수치실험 (2)의 수치 자료를 표 2에 나타내었다. 50, 100, 그리고 200 내부고유치 개수 변화에 대해 AS와 SIL의 계산 시간을 초 단위로 최대 상대 오차를 퍼센티지로 정리하였다.

먼저 SIL와 비교하여 AS의 계산시간 단축(speedup)은 200인 경우가 가장 크며 Door, Wheel, Blade, 그리고 Shaft에 대해 각각 14.1, 4.7, 4.0 그리고 7.0이다. 즉, 본 논문의 수치예제들에 대해 AS를 적용하는 경우 SIL에 비해 4배 이상의 효율성 향상이 있었다. 최대 상대 오차의 경우는 같은 완화계수를 이용하는 경우 개수 증가에 대해 다소 증가하는 경향을 가지고 있으며, 각 예제들에 대해서는 비슷한 수준의 정확성을 보이고 있다. 이전 연구들에 근거하여 완화계수 증가에 따른 정확성 향상은 가능하다(Gao 등, 2006; Kaplan, 2001). 따라서 개수 증가에 대한 정확성의 차이는 완화계수 증가로 조절이 가능하며, 각 예제들에 대해서는 같은 완화계수를 설정함으로써 비슷한 수준의 정확성을 기대할 수 있다.

해석 모델의 자유도 개수가 많아지는 경우, AS/AMLS형태의 방법들은 부구조법에 근거하고 있기 때문에 기존 란초스방법에 대한 상대적인 효율성이 더욱 향상되는 것으로 알려져 있다(Kropp, 2002). 그러므로 예제들에 대해 유효요소로 더 세밀하게 모델링 하는 경우, AS 방법의 효율성이 더 우수하게 나타날 것으로 예측할 수 있다.

6. 결 론

건축, 기계 구조의 이차적인 진동 근원에 대한 동적 응답에 대한 해석이 필요하며 이를 위해 다수의 내부 고유치 계산이 요구된다. 본 연구에서는 부구조법에 근거한 내부 고유치 계산 알고리즘을 제안하였고 기존 란초스방법보다 효율성이 상당히 향상된 것을 수치 실험을 통해 확인하였다. 제안한 대수학 부구조법은 기존 대수학 부구조법의 장점을 그대로 유지하면서 내부 고유치 계산으로 성공적으로 확장되었으며, ρ -인자에 근거한 완화계수를 이용함으로써 정확성을 조절할 수 있다. 앞으로의 연구로는 주파수, 과도 응답 해석으로의 확장 적용이나 분산 처리 알고리즘 개발 등이다.

감사의 글

본 연구는 한국학술진흥재단(KRF-2006-005-J03301)과 BK 21 ST-IT 융합공학 인력양성 사업단의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

참 고 문 헌

Anderson, E., Bai, Z., Bischof, C., Blackford, S., Demmel, J., Dongarra, J., Du Croz, J., Greenbaum, A., Hammarling, S., McKenney, A., Sorensen, D. (1999) *LAPACK Users' Guide 3-rd*, SIAM.

Arbenz, P., Geus, R. (1999) A comparison solvers for large eigenvalue problems occurring in the design of resonant cavities, *Numer. Linear Algebra Appl.*, 6, pp.3~16.

Bai, Z., Demmel, J., Dongarra, J., Ruhe, A., van der Vorst, H. (2000) *Templates for the solution of Algebraic Eigenvalue Problems: A Practical Guide*, SIAM, Philadelphia.

Bennighof, J. K., Kim, C. K. (1992) An adaptive multi-level substructuring method for efficient modeling of complex structures, *Proceedings of the*

- AIAA 33rd SDM Conference*, Dallas, Texas, pp. 1631~1639.
- Bennighof, J. K., Lehoucq, R. B.** (2004) An Automated Multilevel Substructuring Method for Eigenspace Computation in Linear Elasto Dynamics. *SIAM J. Sci. Comput.*, 25(6), pp.2084~2106.
- Craig, Jr. R. R.** (1981) *Structural Dynamics: An Introduction to Computer Methods*, John Wiley and Sons, Inc. Publishers.
- Craig, Jr. R. R., Bampton, M.C.C.** (1968) Coupling of substructures for dynamic analysis, *AIAA Journal*, 6(7), pp.1313~1319.
- Demmel, J.W., Eisenstat, S. C., Gilbert, J. R. , Li, X. S., Liu, J. W. H.** (1999) A supernodal approach to sparse partial pivoting, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 20(3), pp.720~755.
- Gao, W., Li, X.S., Yang, C., Bai, Z.** (2006) An implementation and evaluation of the AMLS method for sparse eigenvalue problems, *Technical Report LBNL-57438, Lawrence Berkeley National Laboratory*.
- Grimes, R. G., Lewis, J. G., Simon H. D.** (1994) A shifted block Lanczos algorithm for solving sparse symmetric generalized eigenproblems, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 15(1), pp.228~272.
- Kaplan, M. F.** (2001) Implementation of automated multilevel substructuring for frequency response analysis of structures, PhD thesis, University of Texas at Austin.
- Karypis, G.** (2006) METIS, Department of Computer Science and Engineering at the University of Minnesota, <http://www-users.cs.umn.edu/~karypis/metis/metis/index.html>.
- Katili, I.** (1993) A new discrete Krichhoff-Mindlin element based on Mindlin-Reissner plate theory and assumed shear strain field: Part II, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36, pp.1884~1908.
- Kropp, A., Heiserer, D.** (2002) Efficient Broadband Vibro-Acoustic Analysis of Passenger Car Bodies Using an FE-based Component Mode Synthesis Approach, *Fifth World Congress on Computational Mechanics*, Vienna, Austria.
- Lehoucq, R., Sorensen, D. C., Yang, C.** (1998) *ARPACK User's Guide: Solution of Large-Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods*, SIAM, Philadelphia.
- Parlett, B. N.** (1980) *the symmetric eigenvalues problems*, Prentice-Hall.
- Yang, C., Gao, W., Bai, Z., Li, X., Lee, L., Husbands, P., Ng, E.** (2005) An algebraic substructuring method for large-scale eigenvalue calculations, *SIAM J. Sci. Comput.*, 27(3), pp. 873~892.