

강성등가하중을 이용한 새로운 비선형해석 알고리즘

New Nonlinear Analysis Algorithm Using Equivalent Load for Stiffness

김 영 민* 김 태 진† 김 치 경**

Kim, Yeong-Min Kim, Taejin Kim, Chee-Kyeong

(논문접수일 : 2007년 7월 10일 ; 심사종료일 : 2007년 10월 4일)

요 지

본 연구에서는 새로운 비선형해석 알고리즘인 적응형 Newton-Raphson 반복기법을 제안한다. 제안된 기법은 기존 Newton-Raphson 기법을 근간으로 적응형 부구조물화 기법을 이용하여 강성등가하중을 구하고, 이미 역행렬이 계산되어 있는 초기강성행렬에 강성등가하중을 적용하여 보정변위를 구하는 것으로 요약된다. 제안된 알고리즘의 가장 큰 특징은 하중 구간의 수에 관계없이 구조물 강성행렬에 대한 역행렬 계산을 단 한번만 수행한다는 것이다. 제안된 기법의 효율성은 강성행렬 및 역행렬 계산 후 부재강성행렬이 변경된 부재들이 연결된 자유도 수와 전체 자유도 수의 비율에 직접 관계된다. 이 비율에 따라 제안된 기법을 기존 비선형해석 기법과 보완적으로 사용함으로써 전체 비선형해석 효율을 향상시킬 수 있다.

핵심용어 : 강성등가하중, 비선형해석, 적응형 Newton-Raphson 반복기법, 적응형 부구조물화

Abstract

This paper presents a new nonlinear analysis algorithm, that is, adaptive Newton-Raphson iteration method. The presented algorithm is based on the existing Newton-Raphson method, and the concept of it can be summarized as calculating the equivalent load for stiffness(ELS) and adapting this to the initial global stiffness matrix which has already been calculated and saved in initial analysis and finally calculating the correction displacements for the nonlinear analysis. The key characteristics of the proposed algorithm is that it calculates the inverse matrix of the global stiffness matrix only once irrespective of the number of load steps. The efficiency of the proposed algorithm depends on the ratio of the active Dofs - the Dofs which are directly connected to the members of which the element stiffness are changed - to the total Dofs, and based on this ratio by using the proposed algorithm as a complementary method to the existing algorithm the efficiency of the nonlinear analysis can be improved dramatically.

Keywords : *equivalent load for stiffness, nonlinear analysis, adaptive Newton-Raphson iteration method, adaptive substructuring*

1. 서 론

과거 비선형해석은 해석 시 소요되는 방대한 계산양이나 비균형하중의 보정 과정에서 발생하는 발산 문제 등으로 인하여 제한적인 영역에 한하여 사용되었다. 그러나 최근 들어 지진하중 등 극한하중에 대한 구조물 거동해석이나 성능기반 설계의 실용화 등과 같이 비선형해석의 필요성이 증가하고 있으며, 비선형해석의 효율성과 신뢰성을 높이기 위한 연구

와 프로그램 개발이 활발히 이루어지고 있다(Chen, 2005; Cheng, 2004; Deng, 2001; Fafitis, 2005; Huang, 2000; Kirsch, 1997; Makode, 1999; Wu 2001). 비선형해석은 응력상태나 변형이력에 따라 구조물의 강성이 변하는 경우에 구조물 거동을 해석하기 위하여 사용된다.

매트릭스 해석법 또는 유한요소법을 이용한 비선형해석의 기본 개념은 전체 하중을 여러 단계로 나누어 각 하중 구간에 대하여 선형해석을 수행한 후 그 결과를 누적하는 것이

† 책임저자, 정희원 · 성균관대학교 건축공학과 조교수
Tel: 031-290-7552 ; Fax: 031-290-7570
E-mail: taejin@skku.edu

* 정희원 · (주)마이다스아이티 기술연구소 책임연구원

** 정희원 · 선문대학교 건축학부 부교수

• 이 논문에 대한 토론을 2008년 2월 29일까지 본 학회에 보내주시면 2008년 4월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

다. 이론적으로 하중 구간을 무한히 잘게 나누면 구간 내 선형거동 가정에 의한 오차도 0에 수렴하게 되지만 계산의 효율을 고려하여 하중 구간의 크기를 결정한다. 각 구간 내에서의 비선형거동은 설정된 오차범위 이내에 비균형하중이 들어오도록 선형해석 결과를 보정하는 여러 가지 반복기법으로 반영한다(Bathe, 1996).

선형해석의 반복은 방대한 계산량을 의미한다. 즉 매 하중 구간마다 당시의 응력상태에 따른 구조물 강성행렬의 구성과 역행렬 계산을 수행하여야 하며, 여기에는 자유도 수의 3제곱에 비례하는 계산량이 필요하다. 또한 비균형하중 보정에 많은 계산량이 필요하며, 수렴하지 않고 발산하는 문제가 발생할 수 있다. 그리고 설정된 비균형하중의 오차범위 크기에 따라서는 오차 누적에 의하여 신뢰할 수 없는 해석 결과가 도출될 수도 있다.

본 연구는 전술한 기존 비선형해석 패러다임을 벗어난 새로운 비선형해석 알고리즘을 제안한다. 본 알고리즘의 가장 중요한 특징은 하중 구간 수에 관계없이 구조물 강성행렬에 대한 역행렬 계산을 단 한번만 수행한다는 것이다. 또한 하중을 여러 구간으로 나누어 작용시키는 점증적 재하가 필요 없고, 각 하중 단계에서 비균형하중이 발생하거나 누적되지 않으므로 이에 대한 반복보정도 필요하지 않다. 또한 본 알고리즘은 기존 기법에 의한 비선형해석 시 수렴문제가 발생되었던 콘크리트 재료의 압축강도 이후 응력이완 구간이나, 인장 균열 발생 후 응력 상실 구간, 좌굴 이후 거동 등도 일관된 절차에 의하여 해석 가능하다.

반면 각 요소의 힘-변형관계 또는 재료의 구성방정식을 몇 개의 선형관계로 이상화하여야 하며, 비선형 거동 요소수가 많아질수록 계산량이 증가하여 모든 요소가 비선형거동을 하는 구간에서는 기존 비선형해석 기법에 비해 2~3배 정도의 계산량이 소요되는 단점도 있다.

본 알고리즘의 핵심 개념은 각 하중 구간에서 발생하는 비선형거동, 즉 강성 변화를 증가의 하중으로 치환하여 초기 구조물에 추가 작용시켜 해석함에 있다. 이와 같이 강성 변화가 전체 구조물의 거동에 미치는 영향을 강성 변화 전 구조물에 재현할 수 있는 하중을 강성증가하중이라 정의하였다(김치경, 2006). 여기에서 주목할 점은 강성증가하중을 이용한 해석이 모든 하중 구간에서 초기 구조물을 대상으로 수행되며, 그 결과 구조물 강성행렬 구성과 역행렬 계산이 초기 구조물에 대하여 단 한번만 수행되고 이후 각 하중 구간에서는 강성증가하중에 의한 추가 변형을 역대입만으로 계산할 수 있다는 점이다.

본 논문에서는 우선 단자유도 재료비선형 스프링 구조물을 이용하여 강성증가하중에 의한 비선형해석 개념과 가능성을

제시한다. 다음으로 일반적인 다자유도 구조물에서 요소 강성 변화에 따른 강성증가하중을 산정하는 알고리즘을 제시하고, 간단한 골조 구조물을 대상으로 강성증가하중에 의한 해석 결과를 이용하여 강성증가하중을 이용한 비선형해석 알고리즘을 검증한다.

2. 기본 개념

본 장에서는 단자유도 비선형 구조물을 이용하여 강성증가하중의 개념을 정의하고 강성증가하중을 이용한 비선형해석의 가능성을 검토한다. 대상 구조물은 그림 1에서 보는 바와 같이 2N/mm의 강성을 갖는 선형 스프링 A와 2N/mm의 초기강성을 가지다가 8N에서 항복 후 강성이 1N/mm로 바뀌는 비선형 스프링 B로 구성되고 40N의 축력이 작용한다.

2.1 강성증가하중의 정의

대상 구조물을 비선형해석한 결과는 그림 1(b)와 같다. 이 경우 초기 탄성계수를 이용한 선형해석 결과 10mm의 탄성변위가 발생하고, 그림 1(d)에서 보듯 B 스프링에 6N의 비균형하중이 발생하게 된다. 비균형하중을 반복 보정하면 2mm의 소성변위가 추가 발생하고, 이 때 A 스프링에는

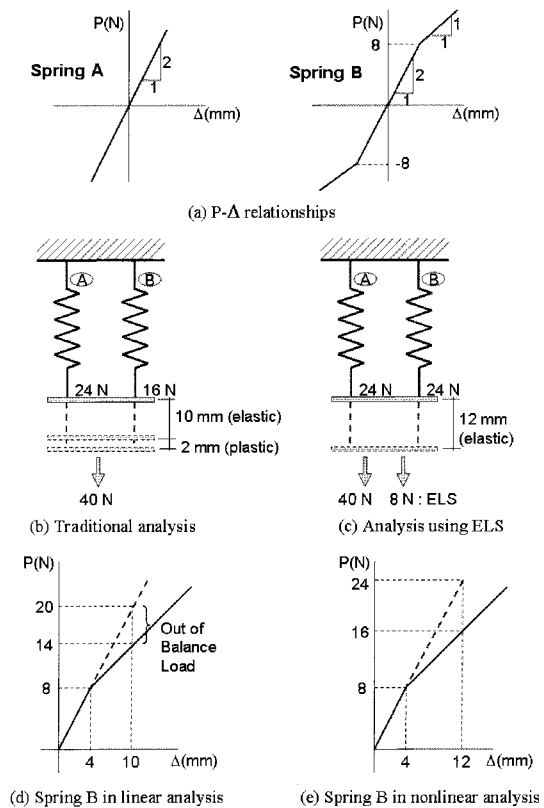


그림 1 단자유도 비선형 구조물의 강성증가하중

24N, B 스프링에는 그림 1(e)에서 보듯 16N의 축력이 발생한다.

한편, 그림 1(c)는 동일한 구조물에 8N의 하중을 추가하여 초기강성을 이용하여 선형해석한 결과로서 전술한 비선형 해석 결과와 동일한 최종변위가 발생한 것을 보여준다. 이때 탄성거동을 하는 A 스프링의 축력은 바로 계산되고, 비선형 거동을 하는 B 스프링의 축력은 최종 변위를 이용하여 그림 1(e)의 P-Δ 관계로부터 계산할 수 있다.

이상의 예에서 보듯 적절한 하중을 구하여 초기하중에 추가한다면 초기강성 만으로도 비선형거동을 하는 구조물의 변형을 계산할 수 있다. 즉 재하과정에서 구조물의 강성변경이 발생한 경우, 기존 비선형해석 기법처럼 전체 구조물의 강성을 다시 계산하거나 비균형하중에 대한 반복보정 없이, 강성변경이 거동에 미치는 영향을 재현할 수 있는 하중을 초기 구조물에 추가함으로써 구조물의 변형을 계산할 수 있다. 그림 1(c)에서 8N은 주어진 구조물과 하중조건 하에서 B 스프링의 강성변화량 1N/mm에 대한 강성등가하중이다.

2.2 강성등가하중의 계산 원리

2.1절에서 비선형해석을 구조물의 강성을 재산정하거나 비균형하중에 대한 반복보정 없이 강성등가하중을 이용하여 수행할 수 있음을 보았다. 강성등가하중을 이용한 비선형해석이 실용성을 갖기 위해서는 일반적인 경우에 대하여 강성등가하중을 계산할 수 있어야 하며, 또한 기존 비선형해석 기법에 비하여 계산량면에서 효율적이어야 한다.

그림 1의 구조물에서 강성등가하중 8N을 구하는 절차를 요약하면 다음과 같다. 우선 초기강성과 하중을 이용하여 선형해석을 수행하면 10mm의 변위가 계산된다. 그림 1(d)에서 보듯 10mm 변위에 의한 B 스프링의 축력을 구하면, 초기강성에 대하여 20N, 비선형거동을 고려하면 14N이 계산된다. 그러므로 6N의 비균형하중이 발생하며 이는 강성변경 후 남은 강성에 재분배된다. 이 상황은 강성변경 전 초기구조물에서 다음과 같이 재현될 수 있다.

- 1) 초기구조물 강성 : 4N/mm
- 2) 강성변경 후 잔류강성 : 3N/mm
- 3) 잔류강성에 재분배되어야 할 비균형하중 : 6N
- 4) 절점하중의 잔류강성에 대한 분배율 : 3/4
- 5) 비균형하중 6N을 잔류강성에 분배하기 위한 절점하중
 $R : R \times 3/4 = 6N \rightarrow R = 8N$

이상의 과정을 통하여 8N을 강성변경 전 초기구조물에 추가 재하하면, B 스프링의 비선형거동으로 발생한 비균형하중 6N은 강성변경 후 잔류강성에 재분배된다. 이러한 과정을

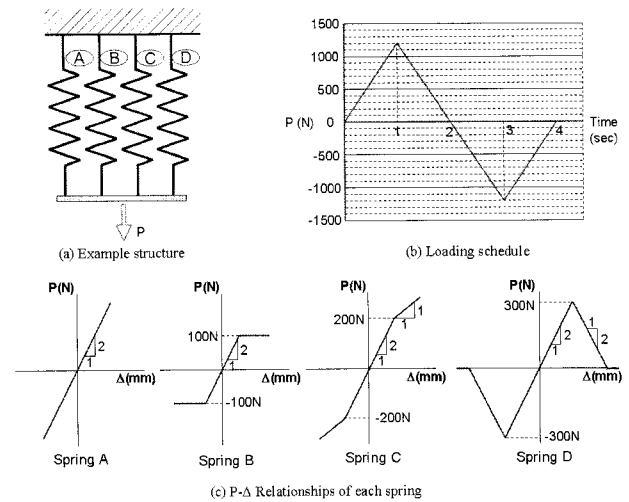


그림 2 단자유도 구조물 비선형해석 예

통하여 B 스프링의 비선형거동에 의한 응력재분배 상황을 초기구조물에 대한 탄성해석으로 재현할 수 있다. 이 경우 8N이 B 스프링의 항복 후 상실된 1N/mm의 강성에 대한 강성등가하중이다.

2.3 단자유도 구조물의 비선형해석 예

본 절에서는 다양한 특성의 비선형거동을 하는 4개의 스프링으로 구성된 단자유도 구조물을 대상으로 강성등가하중을 이용하여 일괄 재하 후 반복보정 없이 해석한 예를 제시한다. 그림 2는 해석 대상 구조물의 형상과 재하이력, 그리고 각 스프링의 P-Δ관계를 보여준다.

첫번째 하중스텝으로 그림 2(b)와 같이 1200N을 재하하여 해석한 결과와 중간과정을 표 1에 제시하였다. 이 때, 각 해석과정에 대하여 간단히 기술하면 다음과 같다.

1) 초기 탄성해석

8N/mm의 초기강성을 이용하여 탄성해석한 결과 150mm의 탄성변위와 각 부재 탄성부재력이 계산되었다.

2) 1차 강성등가하중 산정과 재하

그림 2(c)에 주어진 각 부재의 P-Δ관계를 이용하여 150mm 변위 상태에서의 각 부재 강성과 비균형하중을 계산하였다. 그 결과 B 및 C 스프링에서 비선형거동이 발생하여 각각 200N 및 50N, 총 250N의 비균형하중이 발생하였다. 강성변화 후 잔존강성 5N/mm에 250N의 비균형하중이 재분배되는 상태를 강성변경 전 초기구조물에 재현하기 위한 강성등가하중은 다음과 같이 계산된다.

$$ELS \times \frac{5(\text{잔존강성})}{8(\text{초기강성})} = 250N, \therefore ELS = 400N$$

표 1 해석 과정 및 결과

항목	Spring				Sum
	A	B	C	D	
초기 탄성해석					
초기강성(N/mm)	2	2	2	2	8
단계 하중(N)					1200
탄성변위(mm)					150
탄성부재력(N) ^(A0)	300	300	300	300	1200
1차 강성등가하중 산정					
현 변형상태 강성(N/mm)	2	0	1	2	5
비균형하중(N) ^(B)	0	200	50	0	250
강성등가하중 ELS(N)	ELS × 5/8 = 250				400
ELS에 의한 추가변위(mm)					50
잔존강성에 분배된 부재력 ^(C)	100	0	50	100	250
부재력 = (A0)-(B)+(C) ^(A1)	400	100	300	400	1200
2차 강성등가하중 산정					
현 변형상태 강성(N/mm)	2	0	1	-2	1
비균형하중(N) ^(B)	0	0	0	200	200
강성등가하중 ELS(N)	ELS × 1/8 = 200				1600
ELS에 의한 추가변위(mm)					200
잔존강성에 분배된 부재력 ^(C)	400	0	200	-400	200
부재력 = (A1)-(B)+(C) ^(A2)	800	100	500	-200	1200
3차 강성등가하중 산정					
현 변형상태 강성(N/mm)	2	0	1	0	3
비균형하중(N) ^(B)	0	0	0	-200	-200
강성등가하중 ELS(N)	ELS × 3/8 = -200				-533.3
ELS에 의한 추가변위(mm)					-66.7
잔존강성에 분배된 부재력 ^(C)	-133.4	0	-66.7	0	-200
부재력 = (A2)-(B)+(C)	666.7	100	433.3	0	1200
최종 강성등가하중과 변위					
강성등가하중의 합(N)	400+1600-533.3 = 1466.7				1466.7
최종 변위(mm)	(1200+1466.7) / 8 = 333.3				333.3

이와 같이 계산된 강성등가하중 400N을 초기구조물에 추가 재하하면 50mm의 추가변위와 각 부재 잔존강성에 분배되는 추가부재력을 계산할 수 있다.

3) 2차 강성등가하중 산정과 재하

1차 강성등가하중에 의한 변형 및 응력재분배에 의하여 D 스프링의 강성이 2N/mm에서 -2N/mm로 변경되었으며, 전 단계와 동일한 과정에 의하여 1600N의 강성등가하중이 계산되었다. 이를 초기구조물에 추가 재하한 결과 200mm의 추가변위와 각 부재의 추가부재력이 계산되었다.

4) 3차 강성등가하중 산정과 재하

2차 강성등가하중에 의한 변형 및 응력재분배에 의하여 D 스프링의 강성이 -2N/mm에서 다시 0N/mm로 변경되었고, -533.3N의 강성등가하중과 이에 따른 -66.7mm의 추가변위 및 각 부재 추가부재력이 계산되었다.

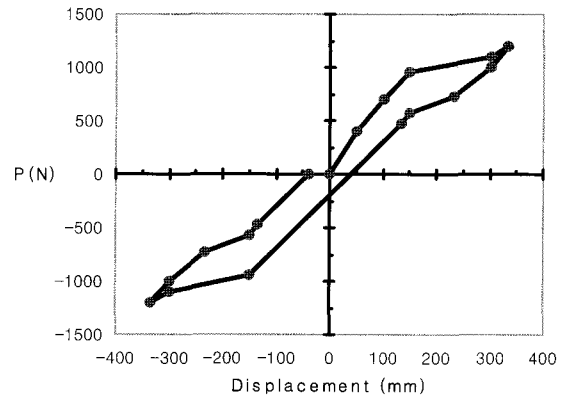


그림 3 예제 구조물의 하중-변위도

5) 최종 강성등가하중과 변위

최종적으로 본 예제 구조물의 비선형거동은 1466.7N의 강성등가하중을 초기구조물에 추가 재하하여 선형해석함으로써 재현할 수 있으며, 이때의 최종 변위는 333.3mm가 된다.

그림 3은 그림 2(b)에 주어진 각 재하 단계에 대하여 이상의 과정에 의해 해석한 결과를 보여준다.

2.4 고찰

이상의 단자유도 구조물을 대상으로 한 강성등가하중 산정과 이를 이용한 비선형해석 과정에서 주목할 점을 요약하면 다음과 같다.

- 1) 변경강성에 대한 강성등가하중을 이용하면 초기강성, 즉 강성변경 전 초기구조물을 이용하여 비선형거동을 해석할 수 있다.
- 2) 강성등가하중은 강성변경 전 초기강성과 강성변경 후 잔존강성 비에 의하여 계산된다.
- 3) 일반적인 다자유도 구조물에서 강성등가하중의 계산은 강성변경 전후의 강성비, 또는 소멸강성과 잔존강성간의 절점하중 분배율을 얼마나 효율적으로 계산할 수 있는가가 관건이 된다.

3. 비선형해석 알고리즘

3.1 점증적 비선형해석 개요

유한요소법에 의한 해석 시 구조물의 평형조건은 다음 식으로 표현될 수 있다.

$$R - F = 0 \tag{1}$$

여기에서 R 는 시점 t 에 작용하는 절점하중벡터이고 F 는

재단응력벡터이다.

점중적 재하에 의한 단계별 비선형해석은 시점 t 에서의 해를 알고 있을 때 이로부터 시점 $t+\Delta t$ 에서의 해를 계산하는 기법이다. 이 때 Δt 는 대상 구조물의 비선형거동 특성에 적절한 시간증분이며 정적해석 시에는 단순히 하중증분을 의미한다. 식 (1)에 의하여 시점 $t+\Delta t$ 의 평형조건은 식 (2)로 표현되며, 여기에서 ${}^{t+\Delta t}R$ 는 변형 결과에 무관하지만 ${}^{t+\Delta t}F$ 는 변위량에 종속적이므로 식 (3)과 같이 쓸 수 있다.

$${}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F = 0 \tag{2}$$

$${}^{t+\Delta t}F = {}^tF + \Delta F \tag{3}$$

여기에서 ΔF 는 시점 t 에서 $t+\Delta t$ 로 진행하며 추가 발생한 재단응력벡터이다. 재단응력벡터는 시점 t 에서의 변형 상태에 의한 접선강성행렬 tK 를 이용하여 다음 식으로 근사화 할 수 있다.

$$\Delta F = {}^tK \Delta U \tag{4}$$

여기에서 ΔU 는 절점변위 증분벡터이고 tK 는 다음 식과 같이 시점 t 에서의 변위 tU 에 대하여 재단응력벡터 tF 를 미분한 것이다.

$${}^tK = \frac{\partial {}^tF}{\partial {}^tU} \tag{5}$$

식 (3)과 (4)를 식 (2)에 대입하면

$${}^tK \Delta U = {}^{t+\Delta t}R - {}^tF \tag{6}$$

이고, 이 식에서 ΔU 를 계산하면 시점 $t+\Delta t$ 에서의 변위 벡터를 다음과 같이 근사화할 수 있다.

$${}^{t+\Delta t}U = {}^tU + \Delta U \tag{7}$$

시점 $t+\Delta t$ 에서의 정확한 변위벡터 ${}^{t+\Delta t}U$ 는 하중벡터 ${}^{t+\Delta t}R$ 에 대응하는 변위이다. 그러나 식 (7)에 의한 변위는 식 (4)의 근사식 사용으로 구한 근사해이며, 시간 또는 하중 단계의 크기에 따라서 심각한 오차가 발생할 수 있으므로 식 (1)에서의 오차가 충분히 작아질 수 있도록 반복보정할 필요가 있다. 이 때 가장 널리 사용되는 반복기법은 Newton-Raphson 방법으로 다음과 같다.

$${}^{t+\Delta t}K^{(i-1)} \Delta U^{(i)} = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)} \tag{8}$$

$${}^{t+\Delta t}U^{(i)} = {}^{t+\Delta t}U^{(i-1)} + \Delta U^{(i)} \tag{9}$$

for $i = 1, 2, 3, \dots$

$$\text{with } {}^{t+\Delta t}U^{(0)} = {}^tU; \quad {}^{t+\Delta t}K^{(0)} = {}^tK; \quad {}^{t+\Delta t}F^{(0)} = {}^tF$$

위의 보정은 식 (8)의 비균형하중벡터 ${}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)}$ 가 설정된 수렴조건 이하가 될 때까지 반복한다.

Newton-Raphson 기법은 식 (8)에서 알 수 있듯이 각 반복보정마다 매우 많은 계산량을 요구하는 접선강성행렬 구성과 그에 따른 역행렬 계산을 포함한다. 이러한 계산 부담을 줄이기 위하여 하중단계가 시작될 때만 새 접선강성행렬을 구성하는 modified Newton-Raphson 기법, 할선강성행렬을 사용하는 quasi-Newton 기법 등이 사용되지만 효율성 향상에는 한계가 있다. 또한 이러한 기존 기법들은 비균형하중의 수렴조건이 적절하지 않은 경우 결과의 정확성이 떨어지거나 반대로 필요 이상으로 반복보정이 많아져 해석효율이 저하될 수 있다. 한편 일부 부재의 좌굴이나 파괴가 발생하는 시점에 국부적인 구조물 강성감소가 발생하는 경우에는 비균형하중이 발산하며 해석이 중지되는 상황도 발생한다.

3.2 적응형 부구조물화 기법

비균형하중벡터 ${}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)}$ 는 강성행렬 구성 후 반복보정 과정에서 요소강성행렬이 변경된 요소들이 연결되어 있는 자유도(이후 '활성자유도'라 함)들에서 0이 아닌 유효한 값을 가진다. Newton-Raphson 기법에서는 매 반복단계에서 접선강성행렬을 구성하는 반면 제안된 강성등가하중을 이용하는 경우에는 초기강성행렬을 계속 사용하므로 해석 시작 후 비선형거동을 하는 요소가 연결된 모든 자유도가 활성자유도가 된다.

정적응축에 의한 부구조물화(substructuring) 기법에 의하여 구조물의 자유도를 활성자유도만으로 응축하면 평형방정식은 식 (10)과 같다. 이 때 응축된 구조물 강성행렬은 식 (11)과 같이 선형거동을 하는 부재(이하 선형부재라 함)들로 구성된 강성행렬을 활성자유도로 정적응축한 강성행렬(이하 선형부분 응축강성행렬이라 함) \overline{K}^a 와 비선형거동을 하는 부재(이하 비선형부재라 함)들의 요소강성행렬의 합 K^c 로 구성된다.

$$\overline{K}U_a = \overline{R}_a \tag{10}$$

$$\overline{K} = \overline{K}^a + K^c \tag{11}$$

$$K^c = \sum_{i=1}^{M_c} K_{(i)} \tag{12}$$

여기에서,

- \bar{K} : 활성화자유도로 응축된 구조물 강성행렬
- \bar{K}^u : 활성화자유도로 응축된 선형부분 응축강성행렬
- K^c : 활성화자유도로 구성되는 비선형부재의 강성행렬 합
- $K_{(i)}$: i 부재의 부재강성행렬
- U_a : 활성화자유도로 구성되는 변위벡터
- \bar{R}_a : 활성화자유도로 응축된 하중벡터
- M_c : 비선형부재 수

식 (10)과 같이 평형방정식을 잔류자유도로 응축시킴으로써 방정식 수를 전체자유도 수에서 활성화자유도 수로 줄일 수 있다. 그러나 비선형해석 시에는 비선형부재의 분포와 그에 따른 활성화자유도의 구성이 변하게 되므로, 이러한 과정이 효율적으로 수행되기 위해서는 활성화자유도가 바뀌어도 구조물의 응축강성행렬 또는 선형부분의 응축강성행렬을 효율적으로 계산할 수 있어야 한다.

적응형 부구조물화 기법은 이와 같이 활성화자유도 구성이 바뀔 때마다 이미 계산되어 있는 초기강성행렬의 역행렬을 이용하여 응축강성행렬을 효율적으로 계산할 수 있는 장점이 있다. 적응형 부구조물화 기법에 의하여 응축강성행렬을 계산하는 절차는 다음과 같다.

우선 단위하중법에 의하여 활성화자유도에 대한 유연성행렬 F_{aa} 는 식 (13)에 의하여 계산한다.

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ac} \\ K_{ca} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{aa} \\ F_{ca} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{aa} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

여기에서 아래첨자 a 는 활성화자유도를, c 는 소거자유도 즉, 선형부분 내부자유도를 의미하고, I_{aa} 는 각 활성화자유도에 단위하중을 갖는 벡터들로 구성된 단위행렬이다. 초기 해석에서 계산된 구조물 강성행렬의 역행렬 K^{-1} 를 이용하면 활성화자유도에 대한 유연성행렬 F_{aa} 는 역대입만으로 계산할 수 있다.

강성행렬과 유연성행렬은 역행렬관계에 있으므로 잔류자유도에 대한 구조물 강성행렬 \bar{K} 는 식 (14)와 같이 식 (13)에서 구한 활성화자유도에 대한 유연성행렬 F_{aa} 의 역행렬로서 구할 수 있다.

$$\bar{K} = F_{aa}^{-1} \quad (14)$$

이상의 과정을 통하여 구조물 강성행렬을 임의의 활성화자유도로 응축하여 부구조물화 하는 기법을 “적응형 부구조물화 기법”이라 한다(김치경 2004). 이 과정은 식 (13)에서 F_{aa}

를 구하기 위한 역대입과 식 (14)에서 F_{aa} 의 역행렬 계산으로 구성된다.

식 (14)로 계산된 \bar{K} 를 식 (11)에 대입하면, 활성화자유도로 응축된 선형부분 응축강성행렬 \bar{K}^u 를 식 (15)와 같이 구할 수 있다.

$$\bar{K}^u = \bar{K} - K^c \quad (15)$$

3.3 응축 접선강성행렬과 강성등가하중 산정

전술한 바대로 Newton-Raphson기법은 각 반복보정마다 접선강성행렬 구성과 역행렬 계산이 필요하며 여기에 많은 계산량이 소요된다. 본 연구에서는 적응형 부구조물화 기법을 이용하여 응축 접선강성행렬과 강성등가하중을 계산하고, 식 (8)로 표현되는 Newton-Raphson기법을 개선하여 결과적으로 비선형해석 효율을 크게 향상시킬 수 있는 적응형 Newton-Raphson기법을 제안한다.

전 절에서 기술한 적응형 부구조물화 기법을 이용하여 식 (8)을 강성행렬 구성 후 강성이 변한 부재들이 직접 연결되어 있는 활성화자유도로 정적응축하면 식 (16)과 같다.

$${}^{t+\Delta t}\bar{K}^{(i-1)} \Delta U_a^{(i)} = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)} \quad (16)$$

여기에서 ${}^{t+\Delta t}\bar{K}^{(i-1)}$ 는 활성화자유도로 정적응축된 응축 접선강성행렬, $\Delta U_a^{(i)}$ 는 활성화자유도만으로 구성된 보정변위벡터이고, 우변의 비균형하중벡터 또한 활성화자유도만으로 구성된다. 이 때 응축 접선강성행렬은 전 절에서 기술한 적응형 부구조물화 기법의 식 (13), (14), (15)를 이용함으로써 효율적으로 계산할 수 있다. 즉 식 (13)에 의해 초기강성행렬의 역행렬을 이용하여 활성화자유도에 대한 유연성행렬을 구하고, 식 (14)와 같이 유연성행렬의 역행렬을 구하여 활성화자유도로 응축된 초기강성행렬 ${}^0\bar{K}$ 를 구한다. 이로부터 식 (15)와 같이 초기강성행렬 구성 후 비선형거동이 발생한 비선형부재들의 초기 부재강성행렬을 제거하면 식 (17)의 좌변과 같이 활성화자유도로 응축된 선형부분 응축강성행렬을 구할 수 있다.

$${}^{t+\Delta t}\bar{K}_L^{(i-1)} = {}^0\bar{K} - \Sigma^0 K_{(m)} \quad (17)$$

for m = elements in nonlinear behavior

여기서 ${}^0K_{(m)}$ 는 초기강성행렬 구성 후 비선형거동이 발생한 m 번 부재의 부재강성행렬이다. 끝으로 식 (18)과 같이 선형부분 응축강성행렬에 비선형부재들의 부재접선강성행렬을 더하면 응축접선강성행렬을 구할 수 있다.

$${}^{t+dt}\bar{K}^{(i-1)} = {}^{t+dt}\bar{K}_L^{(i-1)} + \sum {}^{t+dt}K_{(m)}^{(i-1)} \quad (18)$$

for $m =$ elements in nonlinear behavior

식 (18)의 응축접선강성행렬을 식 (16)에 대입함으로써 비균형하중벡터 ${}^{t+dt}R - {}^{t+dt}F^{(i-1)}$ 에 대한 활성화자유도 보정변위벡터 $\Delta U_a^{(i)}$ 를 구할 수 있다.

한편 2.1절에서 강성변화가 전체 구조물의 거동에 미치는 영향을 강성변화 전 구조물에 재현할 수 있는 하중을 강성등가하중이라 정의한 바 있다. 이러한 정의에 따라 식 (16)을 다시 쓰면 식 (19)와 같다.

$${}^0K\Delta U_a^{(i)} = {}^{t+dt}Q^{(i-1)} \quad (19)$$

여기에서 Q 는 초기구조물에 활성화자유도 보정변위 $\Delta U_a^{(i)}$ 를 발생시키는 강성등가하중이다. 식 (16)에서 구한 $\Delta U_a^{(i)}$ 를 식 (19)에 대입하면 식 (20)과 같이 강성등가하중을 계산할 수 있다.

$${}^{t+dt}Q^{(i-1)} = {}^0\bar{K}({}^{t+dt}\bar{K}^{(i-1)})^{-1}({}^{t+dt}R - {}^{t+dt}F^{(i-1)}) \quad (20)$$

for $i = 1, 2, 3, \dots$ with ${}^{t+dt}Q^{(0)} = {}^{t+dt}R - {}^tF$

이렇게 구한 강성등가하중과 이미 역행렬이 계산되어 있는 초기강성행렬을 이용하여 Newton-Raphson기법의 식 (8)을 대치할 수 있는 반복보정식이 식 (21)로 구성된다.

$${}^0K\Delta U^{(i)} = {}^{t+dt}Q^{(i-1)} \quad (21)$$

3.4 계산 효율성 분석

본 연구에서 제안하는 적응형 Newton-Raphson 반복기법은 기존 Newton-Raphson기법을 근간으로, 적응형 부구조물화 기법을 이용하여 강성등가하중을 구하고, 이미 역행렬이 계산되어 있는 초기강성행렬에 강성등가하중을 적용하여 보정변위를 구하는 것으로 요약된다. 제안된 기법의 효율

성은 강성행렬 및 역행렬 계산 후 부재강성행렬이 변경된 부재들이 직접 연결된 활성화자유도 수 L 과 전체 자유도 수 N 과의 비율에 직접 관계된다.

본 절에서는 기존 Newton-Raphson 기법과 제안된 적응형 Newton-Raphson 기법의 계산 효율을 비교하여, 전체 해석효율을 최적화하기 위한 비선형해석 절차를 제안한다. 효율성 비교는 식 (16)과 식 (21)에 의한 단위 반복보정 과정에 소요되는 계산량을 비교하되 많은 계산부하가 걸리는 실수 곱셈 및 나눗셈 연산수를 기준으로 하며 밴드화된 강성행렬이 사용되는 것으로 가정한다.

평행방정식의 해는 크게 계수소거와 후방대입으로 구성되며, 방정식 수를 N 이라 할 때 계수소거에 $0.5N^3$, 후방대입에 $2N^2$ 의 곱셈 및 나눗셈 연산량이 소요된다. 한편 강성행렬의 밴드폭을 $2M$ 이라 할 때 연산량은 각각 $0.5NM^2$, $2NM$ 으로 줄어들게 된다. 이를 바탕으로 두 기법의 단위 반복보정에 소요되는 연산량을 비교하면 표 2와 같다. 즉 기존 기법의 경우 매 단계마다 접선강성행렬의 구성과 역행렬 계산이 필요하므로 $0.5NM^2$ 의 승제연산이 필요한 반면, 제안된 기법은 $2NML + 3L^3$ 의 연산이 요구된다. 그러므로 비균형하중을 효율적으로 보정하기 위해서는 이 두 연산량을 비교하여 전자가 작을 경우 기존 기법을, 후자가 작을 경우 제안된 기법을 적용할 수 있다. 개략적인 기준은 접선강성행렬 구성 후 부재 강성이 변한 부재들이 직접 연결되어 있는 활성화자유도 수 L 이 강성행렬 밴드폭 $2M$ 의 $1/8$ 이하일 경우 제안된 기법이 더 효율적이 된다.

그림 4는 이러한 절차에 따른 한 하중 스텝을 해석하는 절차 및 제안된 적응형 Newton-Raphson기법의 순서도이다.

4. 해석예

2.3절에서 비선형 거동을 하는 4개의 병렬 스프링으로 구성된 단자유도 구조물에 대해 스프링의 비선형 영역별 강성등가하중을 구하고 재해석함으로써 비선형 영역에서의 강성등가하중의 가능성과 개념을 제시한 바 있다. 본 장에서는 그림 5에서 제시된 보다 일반적인 구조물을 대상으로 비선형 거동을 하는 구조물에 대하여 강성등가하중을 산정하고 이를

표 2 기존의 Newton-Raphson 기법 및 본 연구의 적응형 Newton-Raphson 반복보정법의 계산량 분석
(N : 전체 자유도 수, M : 강성행렬 밴드폭의 반, L : 활성화자유도 수)

Process	Newton-Raphson Iteration	Adaptive Newton-Raphson Iteration		
	Tangent Stiffness Inverse (Eqn. 8)	Flexibility Matrix (Eqn. 13)	Condensed Stiffness (Eqn. 14)	Equivalent Load (Eqn. 20)
Number of Operations	$0.5NM^2$	$2NML$	$2.5L^3$	$0.5L^3$
		$2NML + 3L^3$		

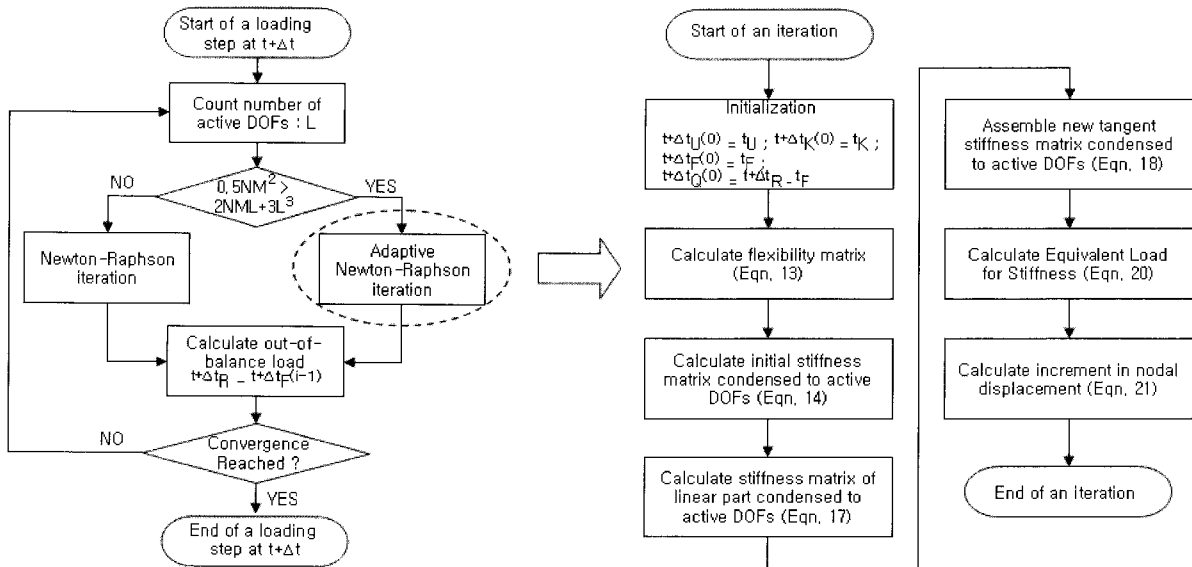


그림 4 강성등가하중을 이용한 적응형 Newton-Raphson Iteration 수행 순서도

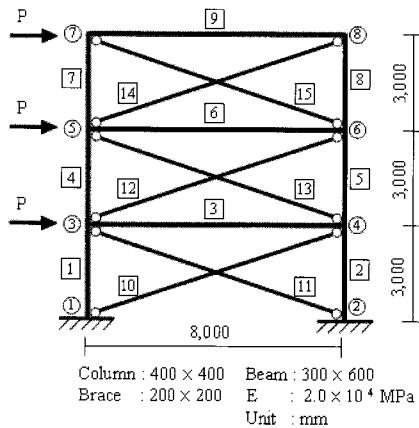


그림 5 예제 건물

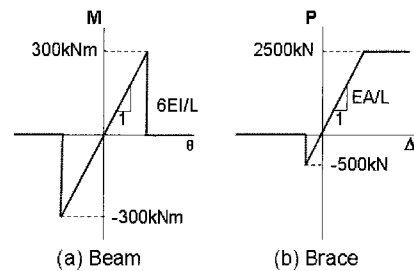


그림 6 보와 가새의 이력 거동

표 3 11, 13번 가새의 좌굴에 대한 강성등가하중(kN, m)

Dof	3-X	3-Y	4-X	4-Y	5-X	5-Y
Q	1369.34	-513.50	-1182.06	443.27	1182.06	-443.27

이용한 재해석을 통하여 제시된 해석기법을 검증하였다.

4.1 해석 가정 및 절차

그림 5와 같은 3층 가새 골조 구조물에 수평하중 $P=1000\text{kN}$ 을 가한다. 1, 2층의 가새(10, 11, 12, 13번 부재)는 그림 6(a)와 같이 2500kN 의 인장력을 기준으로 탄성-완전소성거동을 하고, 압축영역에서는 500kN 의 압축력에 좌굴하여 파괴된다. 2층 바닥보(3번 부재)는 그림 6(b)와 같이 부재 끝단에서 $300\text{kN}\cdot\text{m}$ 의 모멘트에 소성힌지가 발생한다. 나머지 부재에 대해서는 편의상 탄성거동을 한다고 가정한다.

구조물에 가해지는 수평하중 P 의 최종값은 1000kN 이며 이 단계에서의 구조물 강성변화에 따른 강성등가하중을 구하는 것이 목표이나, 하중의 증가에 따른 부재의 비선형거동과 이에 따른 구조물 강성의 변화과정을 살펴보고자 P 가

500kN 인 경우에도 추가적으로 강성등가하중을 구하였다.

4.2 가새의 좌굴에 따른 강성등가하중

그림 7(a)와 같이 수평하중 P 가 500kN 인 경우에는 그림 7(b)의 축력도에서 볼 수 있는 바와 같이 11번과 13번 가새의 압축력이 500kN 을 넘어 좌굴이 발생한다. 이에 따라 구조물은 그림 8(a)와 같은 상태로 변하게 되며 구조물의 강성 또한 변하게 된다.

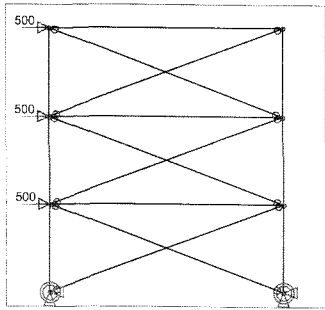
가새의 좌굴에 따른 활성자유도는 3, 4, 5번 절점의 수직/수평방향 자유도가 되며, 구조물의 강성변화에 따른 강성등가하중을 3장의 방법으로 구하면 표 3과 같다.

그림 8과 그림 9는 가새가 좌굴된 구조물과 초기 구조물에 강성등가하중을 추가한 구조물의 하중조건과 해석결과를 비교한 것으로서 그 결과는 완전히 동일함을 확인할 수 있

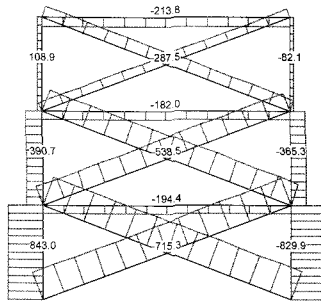
다. 다만, 강성등가하중을 이용한 해석시 좌굴이 발생한 가새에 부재력이 발생하였으나 이는 강성등가하중 적용시 의미 없는 값으로 무시할 수 있으며, 이것은 이하의 강성등가하중 적용구조물에서도 마찬가지이다.

4.3 보의 소성현지 발생에 따른 강성등가하중

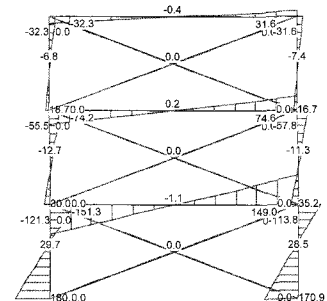
그림 8(a)와 같이 가새가 좌굴한 경우에는 이들 가새가 저항하던 하중들은 나머지 부재들이 부담하게 된다. 이 경우



(a) 작용 하중

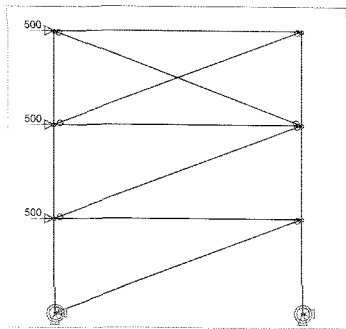


(b) 축력도

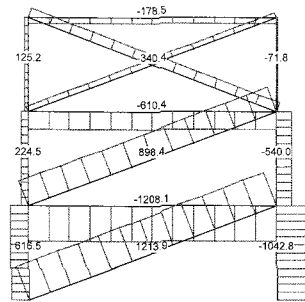


(c) 휨모멘트도

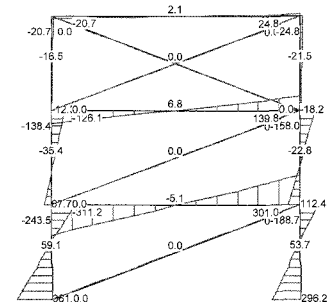
그림 7 수평하중이 500kN인 경우



(a) 강성변경을 반영한 구조물

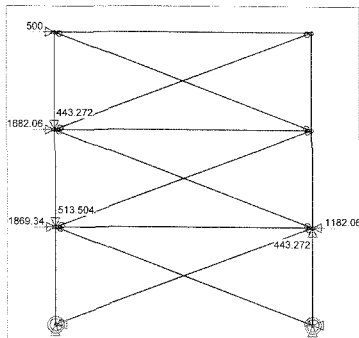


(b) 축력도

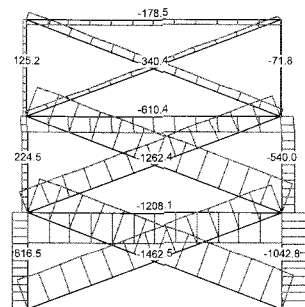


(c) 휨모멘트도

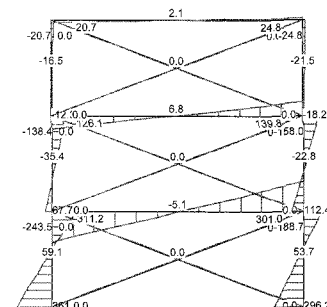
그림 8 11, 13번 가새의 좌굴 파괴



(a) 강성등가하중

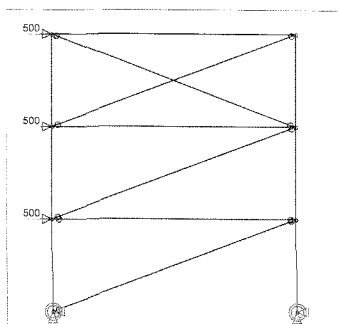


(b) 축력도

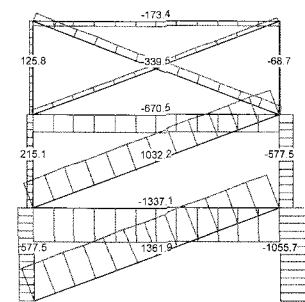


(c) 휨모멘트도

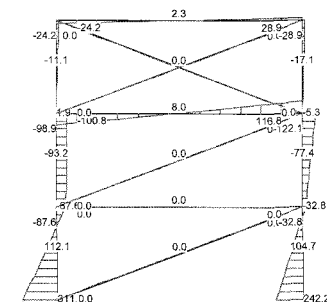
그림 9 11, 13번 가새의 좌굴에 대한 강성등가하중



(a) 강성 변경을 반영한 구조물



(b) 축력도



(c) 휨모멘트도

그림 10 11, 13번 가새의 좌굴과 3번 보의 소성현지 발생

그림 8(c)와 같이 3번 보 양단의 모멘트가 $300\text{kN}\cdot\text{m}$ 를 넘어서게 되어 이 보 또한 양단에 소성힌지가 발생하게 되며 이에 따라 구조물의 강성이 변하게 된다.

3번 보의 소성힌지 발생에 따른 추가적인 활성자유도는, 4번 절점의 회전 자유도가 되며, 가새의 좌굴에 따른 활성자유도와 합하면 전체적으로 3, 4번 절점의 세 자유도와 5번

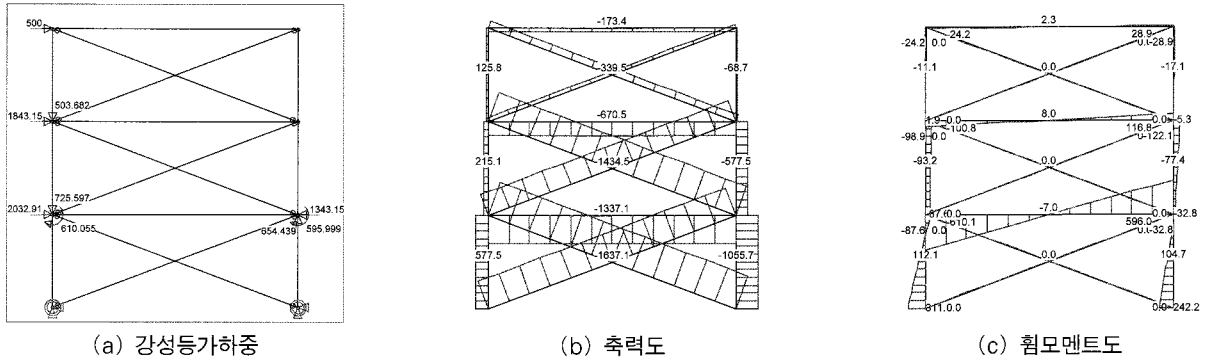


그림 11 11, 13번 가새의 좌굴과 3번 보의 소성힌지 발생에 대한 강성등가하중 적용

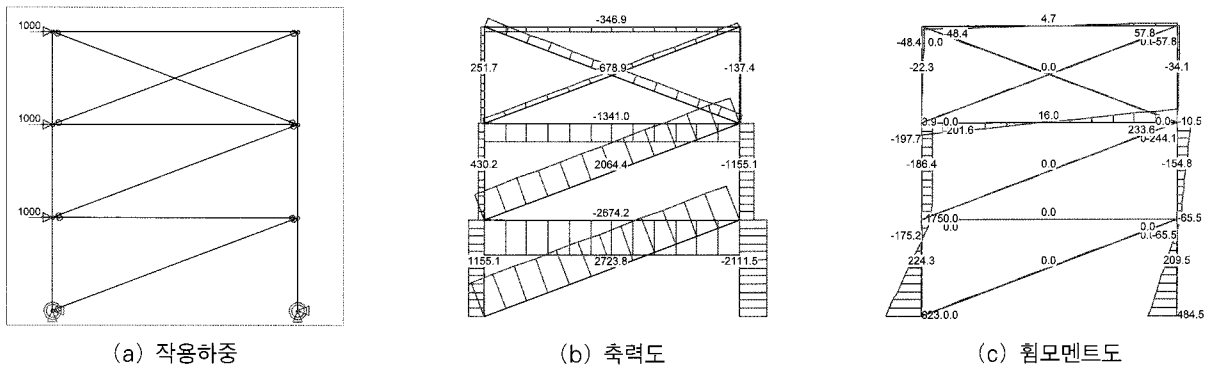


그림 12 수평하중이 1000kN인 경우

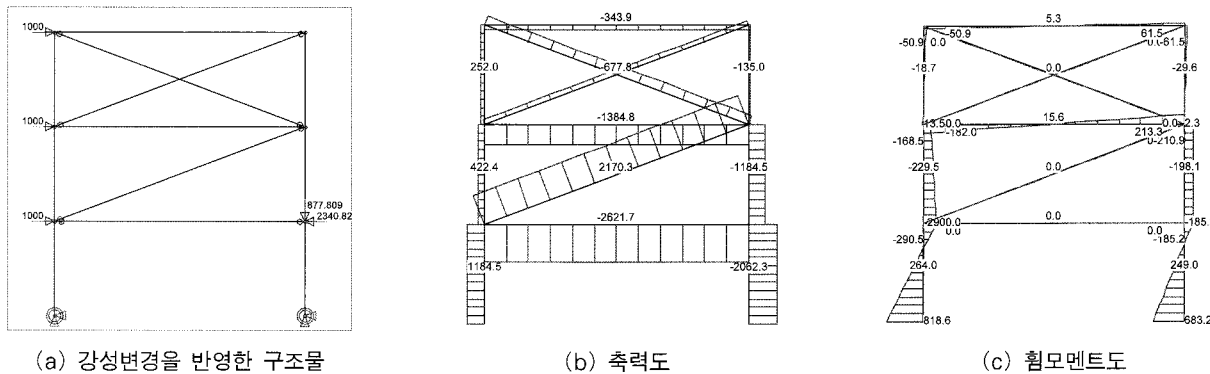


그림 13 10번 가새의 인장항복

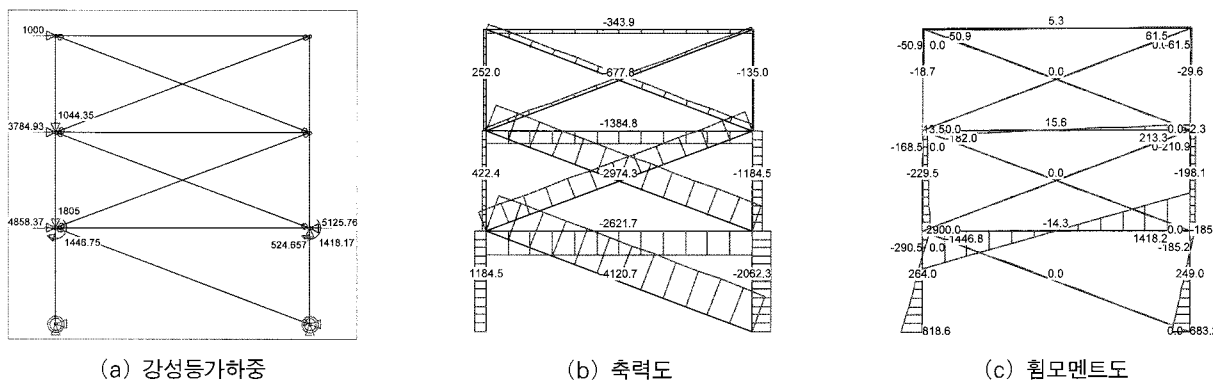


그림 14 11, 13번 가새의 좌굴과 3번 보의 소성힌지 발생 및 10번 가새의 인장항복에 대한 강성등가하중 적용

표 4 11, 13번 가새의 좌굴과 3번 보의 소성힌지 발생에 대한 강성등가하중 (kN, m)

Dof	3-X	3-Y	3-R	4-X	4-Y	4-R	5-X	5-Y
Q	1532.91	-725.60	-610.06	-1343.15	654.44	-596.0	1343.15	-503.68

표 5 11, 13번 가새의 좌굴과 3번 보의 소성힌지 발생 및 10번 가새의 인장항복에 대한 강성등가하중 (kN, m)

Dof	3-X	3-Y	3-R	4-X	4-Y	4-R	5-X	5-Y
Q	3858.37	-1805.0	-1446.75	-2784.93	1402.47	-1418.17	3784.93	-1044.35

절점의 수직/수평방향 자유도 이렇게 8개가 된다. 구조물의 강성변화에 따른 강성등가하중을 3장에서 제시한 방법으로 구하면 표 4와 같다.

그림 10과 그림 11은 좌굴과 소성힌지 발생으로 강성이 변경된 구조물과 초기 구조물에 강성등가하중을 추가한 구조물의 하중조건과 해석결과를 비교한 것으로서 그 결과는 완전히 동일함을 확인할 수 있다.

4.4 가새의 인장항복에 따른 강성등가하중

수평하중 P가 500kN인 경우에는 4.3절에서 살펴본 바와 같이 3번 보에 소성힌지가 발생한 이후 더 이상 비선형거동을 하는 부재가 없으며 구조물 강성 또한 변화가 없다. 이 절에서는 수평하중 P가 1000kN으로 증가된 경우에 대하여 구조물 강성의 변화를 살펴보고 이에 따른 강성등가하중을 구하였다.

그림 12(a)와 같이 11, 13번 가새가 좌굴되고 3번 보의 양단에 소성힌지가 발생한 상태에서 수평하중 P를 1000kN으로 증가시키면, 그림 12(b)에서 보는 바와 같이 10번 가새의 인장력이 인장항복강도를 넘어서게 되어 이 가새는 인장항복을 하게 된다. 10번 가새의 인장항복에 따른 추가되는 활성자유도는 없으며, 이 단계까지의 전체적인 구조물 강성변화에 따른 강성등가하중을 구하면 표 5와 같다.

10번 가새의 인장항복은 그림 13(a)에서와 같이 4번 절점에 1번 절점방향으로 인장항복강도에 해당하는 2500kN의 절점하중을 가함으로서 고려하였으며, 이는 그림 14(a)의 강성등가하중 적용 구조물에서도 마찬가지이다.

그림 13과 그림 14는 좌굴과 소성힌지 발생, 그리고 인장항복으로 강성이 변경된 구조물과 초기구조물에 강성등가하중을 추가한 구조물의 하중조건과 해석결과를 비교한 것으로 그 결과는 완전히 동일함을 확인할 수 있다.

5. 결 론

1) 본 연구에서는 강성변화를 등가의 하중으로 치환하는 강성등가하중 개념과 기존의 Newton-Raphson기법을 근간

으로 적응형 Newton-Raphson 반복기법을 제안하였다.

2) 제안된 기법은 하중 구간의 수에 관계없이 구조물 강성행렬에 대한 역행렬 계산을 단 한번만 수행함으로써 계산 효율을 크게 향상시킨다. 또한 하중을 여러 구간으로 나누어 적용시키는 점증적 재하가 필요없고, 각 하중 단계에서 비균형하중이 발생하거나 누적되지 않으므로 이에 대한 반복보정도 필요하지 않다.

3) 제안된 기법의 효율성은 부재강성행렬이 변경된 부재들이 직접 연결된 활성자유도 수와 관계된다. 개략적으로 절선강성행렬 구성 후 활성자유도 수가 강성행렬 밴드폭의 1/8 이하일 경우 제안된 기법이 더 효율적이다.

4) 제안된 기법은 국부적인 비선형해석을 반복적으로 수행하는 경우에 효과적이며, 일반적인 비선형해석에서도 기존 기법과 보완적으로 사용함으로써 전체적인 비선형해석 효율을 증진시킬 수 있다.

감사의 글

본 연구는 건설교통부가 출연하고 한국건설교통기술평가원에서 위탁시행 한 건설핵심기술 연구 개발사업(05건설핵심 C03) 및 초고층건축물 건설기술 개발과제(03C04-1)에 의한 연구결과의 일부임.

참 고 문 헌

- 김치경 (2004) 부분적 강성 변화에 따른 효율적 부분 재해석 알고리즘, 한국전산구조공학회 논문집, 17(4), pp.459~467.
- 김치경 (2006) 강성등가하중의 정의와 응용, 한국전산구조공학회 논문집, 19(3), pp.303~312.
- Bathe K.J. (1996) Finite element procedures, Upper Saddle River, Prentice-Hall, NJ.
- Chen H.M., Archer G.C. (2005) New domain decomposition algorithm for nonlinear substructures, *Journal of Computing in Civil Engineering*, 19(2), pp.148~159.
- Chen S.H., Yang Z.J. (2004) A universal method for

- structural static reanalysis of topological modifications. *Int. J. Numer. Methods in Engrg.*, 61, pp.673~686.
- Deng L., Ghosn M.** (2001) Pseudoforce method for nonlinear analysis and reanalysis of structural systems. *J. Struct Engrg., ASCE*, 127(5), pp. 570~578.
- Fafitis A.** (2005) Nonlinear truss analysis by one matrix inversion. *J. Struct Engrg., ASCE*, 131(5), pp.701~705
- Huang C., Chen S.H, Liu Z.** (2000) Structural modal reanalysis for topological modifications of finite element systems. *Engineering Structures*, 22, pp.304~310.
- Kirsch U., Liu S.** (1997) Structural reanalysis for general layout modifications. *AIAAJournal*, 35(2), pp.382~388.
- Makode P.V., Corotis R.B., Ramirez M.R.** (1999) Nonlinear analysis of frame structures by pseudo-distortions. *J. Struct Engrg., ASCE*, 125(11), pp.1309~1317.
- Wu B., Li Z.** (2001) Approximate reanalysis for modifications of structural layout. *Engineering Structures*, 23, pp.1590~1596.