

# 종동력을 받는 탄성기초위에 놓인 보의 안정성에 미치는 중간 지지의 효과

## Effect of an Intermediate Support on the Stability of a Beam resting on Elastic Foundation Subjected to Follower Force

김재온\* 이기석\*

Kim, Jae-On Lee, Kee-Seok

(논문접수일 : 2007년 1월 11일 ; 심사종료일 : 2007년 11월 15일)

### 요지

본 연구는 종동력을 받는 탄성기초위에 놓여 있는 보에 있어서 중간 지지가 보의 안정성에 미치는 영향에 대하여 논하고 있다. 해석에 있어서, 종동력을 받는 탄성기초위에 놓여 있는 보의 안정성과 동적응답은 유한요소법을 이용하였다. 또, 동적 응답에 대한 진동의 감쇠를 관찰하기 위하여 모드 중첩법이 사용되었다. 해석 결과, 종동력을 받는 탄성기초위에 놓여 있는 보의 중간 지지의 위치에 따라 플러터 타입과 다이버전스 타입에 의해 안정성을 잃게 된다.

**핵심용어** : 종동력, 플러터, 다이버전스, 안정성, 탄성기초, 동적응답

### Abstract

This paper discussed on the effect of an intermediate support on the stability of a beam resting on elastic foundation subjected to follower force. The stability and dynamic responses of a beam resting on elastic foundation subjected to follower force are analyzed based on the finite element method. The dynamic responses of the system are studied by the mode superposition method to observe the damping rate of the motion. The beam resting on elastic foundation subjected to follower force loses its stability by flutter type or divergence type, depending on the location of the intermediate support.

**Keywords** : follower force, flutter, divergence, stability, elastic foundation, dynamic response

## 1. 서론

건축공학이나 토목공학에서의 건축 구조물, 교량 등의 예와 같이 종동력(follower force)을 받는 구조물의 진동과 안정성 문제는 지금까지 많은 연구와 관심의 대상이 되어오고 있다. 종동력은 힘의 작용방향이 구조물의 변형과 함께 변화하는 힘으로 정의된다. 중력 등의 사하중(dead load)은 보존력(conservative force)인 것인데 반하여 종동력은 포텐셜(potential)을 가지지 않는 비보존력(nonconservative force)으로 역학적으로 서로 다른 외력이다. 사하중이 작용하는 유연 구조계는 정적불안정, 즉, 다이버전스(divergence) 또는 좌굴(buckling)로부터 구조물은 안정성을 잃고, 종동력이 작용하는 유연 구조계는 동적 불안정, 즉, 플러터

(flutter)로부터 안정성을 잃게 된다. 따라서 사하중이나 종동력이 작용하는 구조물의 안정성 문제를 연구하는 것이 구조 안정론을 연구하는 연구자에게는 매우 흥미있는 연구이고, 지금까지도 많은 연구가 행하여져 오고 있다(Langthjem 등, 2000). 최근까지도 국내에서는 종동력을 받는 구조물의 진동과 안정성 문제에 대한 연구가 활발히 이루어지고 있다(이병구 등, 2006; 이준석 등, 2004). 이러한 종동력에 관한 흥미로운 연구 중 하나는 1972년 Smith와 Herrmann에 의해 연구된 종동력을 받는 탄성기초위에 놓인 보의 안정성 문제이다. 탄성기초 파라미터의 크기가 플러터가 발생하는 임계값에는 아무런 영향을 주지 않는다는 사실을 알았으며(Smith 등, 1972), 이 흥미로운 연구를 계기로 탄성기초상의 보에 관해서 지금까지도 많은 연구가 행하여져

† 책임저자, 정희원 · 한밭대학교 건축공학과 겸임교수

Tel: 042-825-1467 ; Fax: 042-825-1469

E-mail: kjo8986@hanmail.net

\* 국방과학연구소 선임연구원

• 이 논문에 대한 토론을 2008년 2월 29일까지 본 학회에 보내주시면 2008년 4월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

오고 있다. 1975년 Wahed는 탄성기초와 점성 외부 감쇠기를 가진 외팔보의 불안정성에 관하여 연구하였으며, 그는 이 연구에서 외부감쇠기의 파라미터의 크기가 클수록 임계 중동력 값이 증가한다는 것을 알았다(Wahed, 1975). 또 Anderson은 집중질량을 가지고 중동력을 받는 탄성기초상의 보에 있어서 회전관성, 내부감쇠가 계의 안정성에 미치는 영향을 조사하였다(Anderson, 1975). 1992년 Lee와 그의 공동 연구자들은 탄성 지지된 Timoshenko's Beam의 안정성에 관하여 연구하였다(Lee 등, 1992). 최근 Maurizi와 Bambill은 탄성기초에 놓여 있는 보의 안정성 문제를 재조명하기도 하였다(Maurizi 등, 2002). 그러나 이러한 연구들은 탄성기초위에 놓여 있는 보를 모델로 하여 파라메타(외부감쇠기, 내부감쇠, 집중질량 등)들이 보의 안정성에 미치는 영향에 국한되어 있었다.

이러한 상황 하에서 본 연구는 외부에서 작용하는 힘을 받는 건축 구조물이나 교량 등을 중동력을 받는 탄성기초위에 놓여 있는 외팔보로 모델화 한 것으로 중간 지지의 위치를 적절히 조절하므로 구조물의 거동을 제어할 수 있다는 것에 주목하여 보의 진동 및 안정성을 해석하는 것이다. 수치해석에 있어서는 유한요소법을 이용하였고, 보의 동적 응답은 Newland의 모드중첩법(Mode superposition method)을 적용하였다(Newland, 1989).

## 2. 이론해석

### 2.1 수학적 모델

Fig. 1의 수학적 모델은 중동력을 받는 전체길이  $L$ 의 일정한 단면을 가진 외팔보(Beck's beam)가 탄성기초위에 놓여 있고, 고정단으로부터 임의의 위치에 지지점을 가지고 있다. 여기서 보의 굽힘 강성은  $EI$ , 단위 길이 당 보의 질량은  $m$ , 탄성기초 스프링 상수는  $k$ 이다. 또  $E^*$ 는 내부 재질 감쇠계수이다.

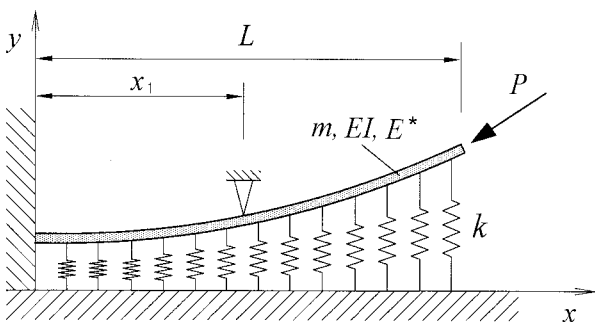


Fig. 1 Beck's beam on the elastic foundation with an intermediate support

### 2.2 운동방정식

Fig. 1의 모델에 대한 운동 지배방정식을 얻기 위하여 확장된 헤밀턴 원리(extended Hamilton's principle)를 이용하면 다음과 같다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T + W_c - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} (\delta W_{id} + \delta W_{nc}) dt = 0 \quad (1)$$

여기서  $T$ 는 운동에너지,  $W_c$ 는 자유단에 작용하는 힘의 보존 성분에 의한 일,  $U$ 는 탄성 포텐셜 에너지,  $\delta W_{id}$ 는 내부감쇠에 의한 가상일, 그리고  $\delta W_{nc}$ 는 비 보존성분에 의한 가상일을 나타낸다.

$$T = \int_0^L \frac{m}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2)$$

$$W_c = \int_0^L \frac{p}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3)$$

$$U = \int_0^L \frac{EI}{2} \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx + \int_0^L \frac{k}{2} y^2 dx \quad (4)$$

$$\delta W_{id} = - \int_0^L E^* I \left( \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} \right) \delta \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) dx \quad (5)$$

$$\delta W_{nc} = - p \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=L} \delta y \quad (6)$$

계산상의 편리를 위해 다음과 같은 무차원화된 좌표와 파라미터들을 도입한다.

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y}{L}, \quad \tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \xi_1 = \frac{x_1}{L}$$

$$p = \frac{PL^2}{EI}, \quad \alpha = \frac{kL^4}{EI}, \quad \gamma = \frac{E^*}{EL^2} \sqrt{\frac{EI}{m_f + m_p}} \quad (7)$$

여기서  $\xi$ 와  $\eta$ 는 각각  $x$ 와  $y$ 의 좌표,  $\tau$ 는 시간,  $p$ 는 중동력,  $\gamma$ 는 내부감쇠,  $k$ 는 보 전체 탄성지지 스프링을 나타내는 무차원 파라메타이다. 또한,  $\xi_1$ 는 중간 지지점의 위치를 나타내는 무차원 파라메타로 수식에서는 언급되어 있지 않지만 계산 프로그램에서는 지지점의 위치에서의 처짐이 0이라는 것을 고려해서 계산한다.

이제 식 (2)~(6)을 식 (1)에 대입하고, 식 (7)의 무차원 파라미터들과 좌표들을 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^1 [\eta_\tau \delta \eta_\tau + p \eta_\xi \delta \eta_\xi - \alpha \eta \delta \eta - \eta_{\xi\xi} \delta \eta_{\xi\xi} - \gamma \eta_{\xi\xi\tau} \delta \eta_{\xi\xi}] d\xi d\tau - \int_{\tau_1}^{\tau_2} [p \eta_\xi \delta \eta]_{\xi=1} d\tau = 0 \quad (8)$$

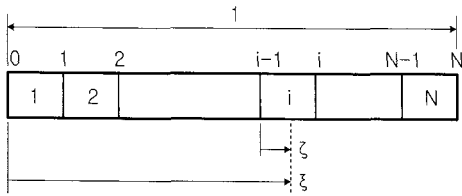


Fig. 2 Finite element model of the beam

여기서  $\eta_\tau = \frac{\partial \eta}{\partial \tau}$ ,  $\eta_\xi = \frac{\partial \eta}{\partial \xi}$ ,  $\eta_{\xi\xi\tau} = \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^2 \partial \tau}$  를 의미한다.

식 (8)의 수치 해를 얻기 위해 유한요소법을 적용한다.

Fig. 2는 보를  $N$ 개의 균일한 요소로 분할한 것을 나타내고 있다.

Fig. 2의 국부좌표 ( $\zeta = N\xi - i + 1; 0 \leq \zeta \leq 1$ )를 식 (8)에 대입하면 다음과 같은 이산화된 방정식을 얻게 된다.

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[ \sum_{i=1}^N \int_0^1 \{ \eta_\tau^{(i)} \delta \eta_\tau^{(i)} + p N^2 \eta_\xi^{(i)} \delta \eta_\xi^{(i)} - x \eta^{(i)} \delta \eta^{(i)} - N^4 \eta_{\xi\xi}^{(i)} \delta \eta_{\xi\xi}^{(i)} - \gamma N^4 \eta_{\xi\xi\tau}^{(i)} \delta \eta_{\xi\xi\tau}^{(i)} \} d\zeta - \{ p N^2 \eta_\xi^{(N)} \delta \eta_\xi^{(N)} \}_{\zeta=1} \right] d\tau = 0 \quad (9)$$

한편, 변위함수  $\eta^{(i)}(\zeta, \tau)$ 를 다음과 같이 도입한다.

$$\eta^{(i)}(\zeta, \tau) = \{ e^{(i)}(\zeta) \} \cdot \{ v^{(i)}(\tau) \} \quad (10)$$

여기서  $e^{(i)}(\zeta)$ 는 형상 함수이고,  $v^{(i)}(\tau)$ 는 벡터함수이다.

테일러급수 전개에 의하여  $\eta^{(i)}(\zeta, \tau)$ 를 다음과 같이  $\zeta$ 의 3차함수로 근사하여 고차항을 무시하면 다음과 같다.

$$\eta^{(i)}(\zeta, \tau) = a_0(\tau) + a_1(\tau)\zeta + a_2(\tau)\zeta^2 + a_3(\tau)\zeta^3 \quad (11)$$

보의  $i$ 번째 요소 양단의 변형과 변형 각을 이용하면,  $i$ 번째 요소의 절점 변위 벡터를 다음식과 같이 정의 할 수 있다.  $v_1(\tau)$ 는  $i$ 번째 요소의 좌단의 처짐,  $v_3(\tau)$ 는  $i$ 번째 요소의 우단의 처짐,  $v_2(\tau)/N$ 는  $i$ 번째 요소의 좌단의 처짐각,  $v_4(\tau)/N$ 는  $i$ 번째 요소의 우단의 처짐각으로 다음의 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$v^{(i)}(\tau)^T = [v_1(\tau) \quad v_2(\tau)/N \quad v_3(\tau) \quad v_4(\tau)/N]^T \quad (12)$$

$$\begin{cases} v_1(\tau) = a_0(\tau) \\ v_2(\tau)/N = a_1(\tau) \\ v_3(\tau) = a_0(\tau) + a_1(\tau) + a_2(\tau) + a_3(\tau) \\ v_4(\tau)/N = a_1(\tau) + 2a_2(\tau) + 3a_3(\tau) \end{cases}$$

여기서,

$$a^{(i)}(\tau)^T = [a_0(\tau) \quad a_1(\tau) \quad a_2(\tau) \quad a_3(\tau)]$$

$$b^{(i)}(\zeta)^T = [1 \quad \zeta \quad \zeta^2 \quad \zeta^3]$$

라 두면 식 (12)는 다음과 같이 행렬로 표현할 수 있다.

$$v^{(i)}(\tau) = A a^{(i)}(\tau) \text{로부터 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

식 (10)의 변위함수는 다음과 같이 된다.

$$\eta^{(i)}(\zeta, \tau) = b^{(i)}(\zeta)^T a^{(i)}(\tau) = b^{(i)}(\zeta)^T A^{-1} v^{(i)}(\tau) = [(1-\zeta)^2(1+2\zeta)\zeta(1-\zeta)^2\zeta^2(3-2\zeta) - \zeta^2(1-\zeta)] v^{(i)}(\tau) \quad (14)$$

식(9)에 식(14)를 적용하면 다음과 같은 특성 방정식을 얻을 수 있다.

$$[M]\{v_{\tau\tau}\} + [C]\{v_\tau\} + [K]\{v\} = \{0\} \quad (15)$$

여기서  $[M]$ 은 조합 질량행렬,  $[C]$ 는 조합 감쇠행렬,  $[K]$ 는 조합 강성행렬을 나타낸다.

### 2.3 고유치 문제

식 (15)에 있어서 변위벡터  $\{v(\tau)\}$ 를 다음과 같이 가정한다.

$$\{v(\tau)\} = \{X\} \exp(\lambda\tau) \quad (16)$$

여기서  $\lambda$ 는 고유치이고,  $\{X\}$ 는 고유벡터이다.

식 (16)을 식 (15)에 대입하고 정리하면 다음과 같이 표준 고유치문제로 귀착된다.

$$\lambda [D]\{Z\} = [A]\{Z\} \quad (17)$$

여기서  $\{Z\} = \begin{Bmatrix} \{X\} \\ \{\lambda X\} \end{Bmatrix}$ .

$$[A] = \begin{bmatrix} \{0\} & \{D\} \\ \{-M^{-1}K\} & \{-M^{-1}C\} \end{bmatrix} \text{이다.}$$

계의 안정성 판별은 특성근 ( $\lambda = \sigma \pm i\omega$ )의 실수부분인  $\sigma$ 의 부호에 의해 판별된다. 즉,  $\sigma > 0$ 일 때, 계는 불안정하게 되고,  $\sigma < 0$ 일 때 계는 안정하게 된다. 그러므로  $\sigma = 0$ 일 때 계의 안정과 불안정의 경계가 되는 임계조건이 되고, 이때의

중동력이 임계 중동력 ( $p_{cr}$ )이 된다.

### 2.4 모드형상

불안정이 발생하는 임계 중동력 ( $p_{cr} = p_*$ )에서 고유벡터  $\{X\}$ 에 의해서 다음 식의 횡방향의 변위  $\{v(\tau)\}$ 를 계산하면 각 모드에 대한 모드형상을 얻을 수 있다.

$$\{v(\tau)\} = |\{X_i\}| \cos(\omega_* \tau + \phi_i) \quad (18)$$

여기서 위상각  $\phi_i$ 는 다음과 같다.

$$\tan \phi_i = \text{Im}\{X_i\} / \text{Re}\{X_i\} \quad (19)$$

### 2.5 동적응답

외부가진  $f(\tau)$ 를 받는 보의 동적 응답을 구하기 위하여, 식 (15)를 수정하면 다음과 같다.

$$[M]\{v_{\tau\tau}\} + [C]\{v_{\tau}\} + [K]\{v\} = f(\tau) \quad (20)$$

여기서  $f(\tau)$ 는  $N \times 1$  행렬의 가진 벡터이다.

또, 식 (16)을 식 (20)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\{z\} = [A]\{z\} + [F] \quad (21)$$

여기서

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}, \quad [F] = \begin{bmatrix} \{0\} \\ -M^{-1}f \end{bmatrix} \quad (22)$$

그리고  $\{z\} = \begin{bmatrix} v \\ \dot{v} \end{bmatrix}$ 이고,  $2N \times 1$  행렬의 응답 벡터이다.

식 (21)의 일반적인 해는 다음과 같다(Newland, 1989).

$$\{Z(\tau)\} = \{U\} \{diag e^{\lambda_i \tau}\} \times \left[ \int \{diag e^{\lambda_i \tau}\} \{U^{-1}\} [F(\tau)] d\tau + \{II\} \right] \quad (23)$$

여기서  $U$ 는  $2N \times 2N$ 행렬의  $A$ 의 고유벡터이고,  $II$ 는  $2N \times 1$ 행렬로 초기 조건에 의해 결정되는 행렬 벡터이다.

또, 고유치 벡터  $U$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U = \begin{bmatrix} U_{upper} \\ U_{lower} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{upper} \\ U_{upper} [diag \lambda_j] \end{bmatrix}$$

$$U^{-1} = [U_{left}^{-1} \quad U_{right}^{-1}] \quad (24)$$

여기서  $\{U_{upper}\}$ ,  $\{U_{lower}\}$ 는  $\{U\}$  벡터의 반을 경계로 하여 위쪽과 아래쪽 성분으로 각각  $N \times 2N$  행렬의 벡터이다.

식 (24)를 식 (23)에 대입하면  $N \times 1$ 의 응답벡터는 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\{v(\tau)\} = \{U_{upper}\} \{diag e^{\lambda_i \tau}\} \times \left[ \int \{diag e^{\lambda_i \tau}\} \{U^{-1}\} \{M^{-1}\} [f(\tau)] dt + \{II\} \right] \quad (25)$$

보의 자유단에서 단위 임펄스일 경우는 가진벡터  $f(\tau)$ 는 다음과 같다.

$$\{f(\tau)\} = \delta(\tau) \{0, 0, \dots, \dots, 1\}^T \quad (26)$$

여기서  $\delta(\tau)$ 는 연속함수에 적용하는 Dirac-델타함수이다. 식 (26)을 식 (25)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\{v(\tau)\} = \{U_{upper}\} \{diag e^{\lambda_i \tau}\} \left( \begin{matrix} 0 \\ \{U^{-1}_{right}\} \{M^{-1}\} \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} + \{II\} \end{matrix} \right) \quad (28)$$

초기조건  $v(\tau) = 0$ 이므로, 결국 식(28)은 다음과 같이 임펄스 응답 벡터  $\{v(\tau)\}$ 을 얻을 수 있다.

$$\{v(\tau)\} = \{U_{upper}\} \{diag e^{\lambda_i \tau}\} \left( \begin{matrix} 0 \\ \{U^{-1}_{right}\} \{M^{-1}\} \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \right) \quad (29)$$

### 3. 수치해석결과 및 고찰

본 연구는 수치 시뮬레이션을 하기 위해 유한요소법을 적용하였고, 탄성기초상의 Beck's beam에 있어서 중간 지지의 위치 변화에 따른 안정성을 조사할 수 있는 계산 프로그램 (MATLAB 6.5를 사용)을 개발하였다. 본 연구에서는 보의 길이를 20개의 유한요소로 나누어 얻었으며, 수치해의 타당성을 검증하기 위하여 탄성 기초상의 Beck's beam에서 중간 지지점을 고려하지 않은 참고문헌(Rao 등, 1982)의 결과

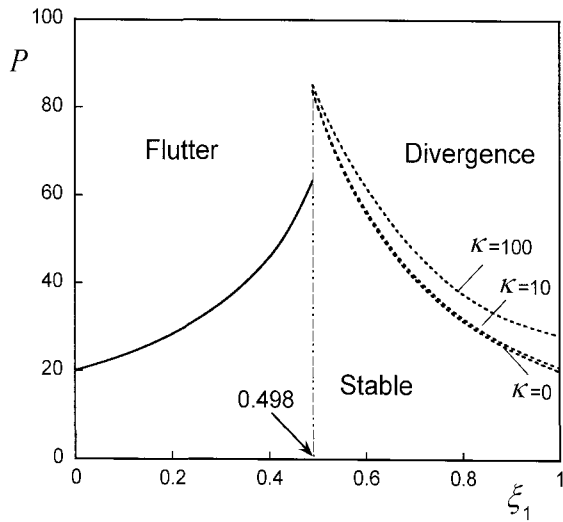


Fig. 3 Critical follower force as a function of the intermediate support when  $\alpha=0, 10, 100, \gamma=0.0$

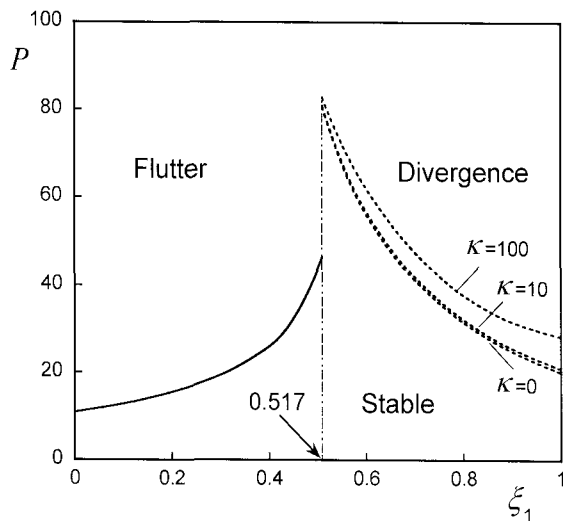


Fig. 4 Critical follower force as a function of the intermediate support when  $\alpha=0, 10, 100, \gamma=0.001$

( $P_{cr}=20.052$ )와 본 연구에서 얻은 결과( $P_{cr}=20.054$ )가 0.0001%의 오차가 있음을 확인 할 수 있다.

Fig. 3은 탄성기초 파라메타가  $\alpha=0, 10, 100$ 이고, 내부감쇠를 무시한 경우( $\gamma=0.001$ )에 중간 지지점의 위치 변화에 따른 불안정 타입과 임계 종동력 값을 나타낸다. 이 그림에서는 중간 지지점의 위치가  $\xi_1 \leq 0.498$ 의 구간에서는 플러터형 불안정이 발생하고,  $\xi_1=0.499$ 에서 임계 종동력 값이 점프(jump)하여 플러터형 불안정에서 다이버전스형 불안정으로 천이(transition)되어,  $\xi_1 \geq 0.499$ 의 구간에서는 다이버전스형 불안정이 발생한다. 또한 이 그림에서 알 수 있는 것은 플러터 구간에서는 탄성기초 파라메타  $\alpha$ 의 값에 관계없이 일정한 임계 종동력 값을 가지며, 탄성지지가 고정 단에서 중앙으로( $0 \rightarrow 0.498$ ) 이동할수록 임계 종동력 값이

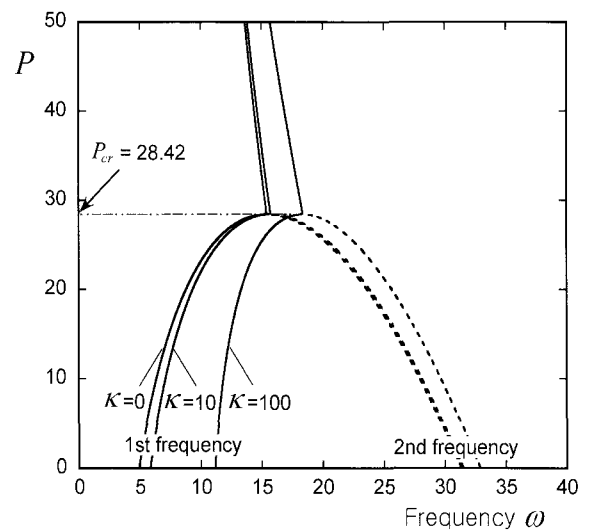


Fig. 5 First and second frequency curves for follower forces when the stiffness of elastic foundation  $\alpha=0, 10, 100, \gamma=0.0$  and  $\xi_1=0.2$

커진다. 그리고 다이버전스 구간에서는 탄성기초 파라메타  $\alpha$ 의 값이 커짐에 따라 임계 종동력 값이 증가하고, 탄성지지가 중앙에서 자유단 방향( $0.499 \rightarrow 1$ )으로 이동할수록 임계 종동력 값은 작아진다는 것을 알 수 있다.

Fig. 4는 탄성기초 파라메타가  $\alpha=0, 10, 100$ 이고, 미소 내부감쇠를 고려한 경우( $\gamma=0.001$ )의 중간 지지점의 위치 변화에 따른 불안정 타입과 임계 종동력 값을 나타낸다. 중간 지지점의 위치가  $\xi_1 \leq 0.517$ 의 구간에서는 플러터형 불안정이 발생하고,  $\xi_1=0.518$ 에서 임계 종동력 값이 점프(jump)하여 플러터형 불안정에서 다이버전스형 불안정으로 천이(transition)되어,  $\xi_1 \geq 0.518$ 의 구간에서는 다이버전스형 불안정이 발생한다. Fig. 4의 내부감쇠를 무시한 경우에는 Fig. 3의 내부감쇠를 무시한 경우에 비하여 임계 다이버전스 값이 거의 변화가 없는데 반하여, 플러터가 발생하는 임계 종동력 값은 크게 감소한다는 흥미로운 사실을 알 수 있다.

Fig. 5, 6, 7은 Fig. 3, 4에 있어서, 플러터 구간에서는 탄성기초 파라메타  $\alpha$ 의 값의 크기에 관계없이 일정한 임계 종동력 값을 가진다는 것과 임계 종동력 값이 점프하여 플러터형 불안정에서 다이버전스형 불안정으로 천이되는 것을 보충 설명하기 위한 것이다.

Fig. 5는 중간 지지점 위치가  $\xi_1=0.2$ 이고, 탄성기초 파라메타가  $\alpha=0, 10, 100$ 일 경우의 종동력의 변화에 따른 1차 고유진동수와 2차 고유진동수를 나타내고 있다. 이 그림에서는 1차 고유진동수와 2차 고유진동수가 일치하는 플러터형 불안정이 발생하고, 플러터가 발생하는 임계 종동력 값은  $p_{cr}=28.42$ 이며, 스프링 상수  $\alpha$ 의 크기에 관계없이 일정한

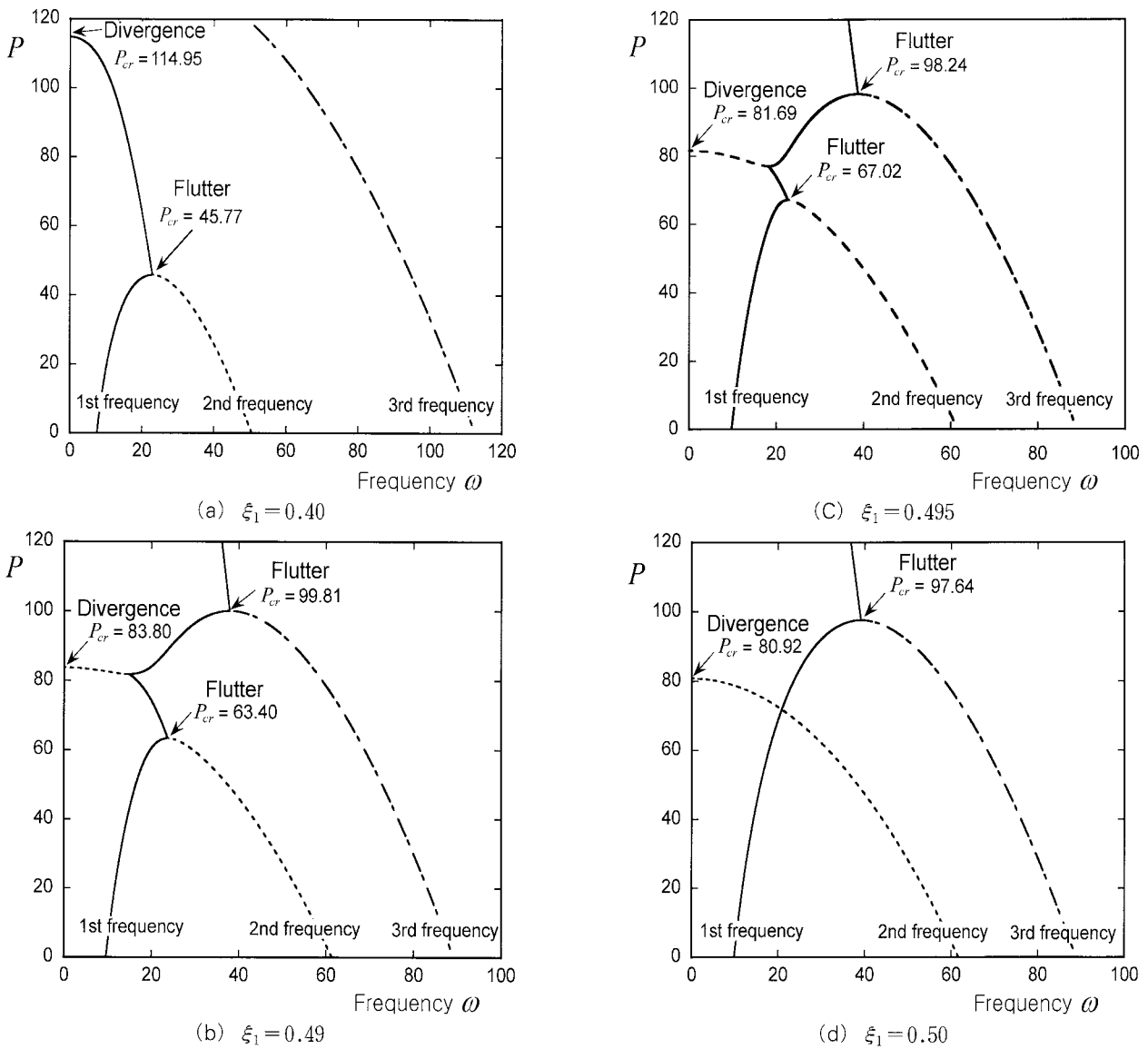


Fig. 6 First, second and third frequency curves for follower forces when  $\alpha=0$ ,  $\gamma=0.0$

다는 것을 알 수 있다.

이러한 계산 결과는 1972년 Smith와 Herrmann에 의해 연구된 집중 중동력을 받는 탄성기초위에 놓인 Beck's column에서 탄성기초 파라메타  $\alpha$ 의 값이 증가함에 따라 고유진동수 값은 증가하지만 임계 플러터 값에는 변동이 없다는 해석결과와 일치한다.

Fig. 6은 중간 지지점의 위치  $\xi_1=0.40, 0.49, 0.495, 0.50$ 일 경우의 중동력 값의 변화에 따른 1차, 2차, 3차 고유진동수 값의 변화를 나타내고 있다. Fig. 6(a)는 중간 지지점의 위치가  $\xi_1=0.40$ 인 경우로, 먼저 1차와 2차의 고유진동수가 일치하는 플러터형 불안정이 45.77에서 발생하고, 다시 고유진동수의 값이 0이 되는 114.95에서 다이버전스형 불안정이 발생한다. Fig. 6(b)는 중간 지지점의 위치가

$\xi_1=0.49$ 인 경우로, 가장먼저 63.40에서 플러터가 발생하고, 83.80에서 다이버전스가 발생하며, 99.81에서 다시 플러터가 발생한다. Fig. 6(c)는 중간 지지점의 위치가  $\xi_1=0.495$ 인 경우로, 가장먼저 67.02에서 플러터가 발생하고, 81.69에서 다이버전스 그리고 98.24에서 다시 플러터가 발생한다. 이 그림에서 알 수 있듯이 1차와 2차 고유진동수가 일치한 구간이 Fig. 6(b)의 중간 지지점의 위치가  $\xi_1=0.49$ 인 경우보다도 짧아 졌다는 것을 알 수 있다. Fig. 6(d)는 중간 지지점의 위치가  $\xi_1=0.50$ 인 경우이다. 이 그림에서는 Fig. 6(a), (b), (c)에서와는 달리 80.92에서 다이버전스가 먼저 발생하는 것으로, 플러터형 불안정에서 다이버전스형 불안정으로 천이되었다는 것을 알 수 있다. 또한 임계 중동력 값도 플러터형 불안정일 때 보다도 다이버전스

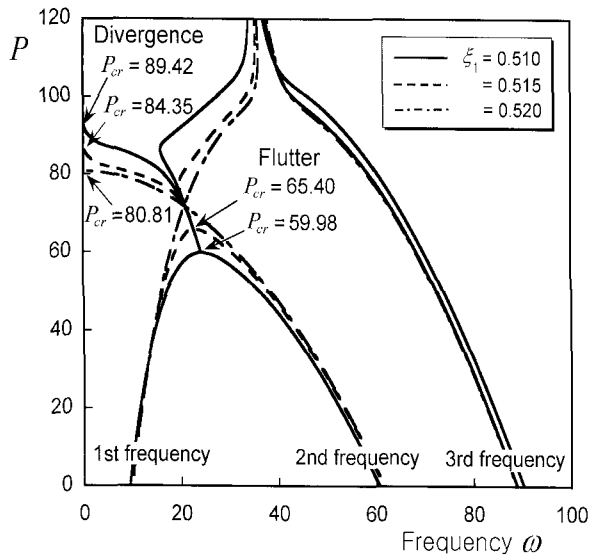
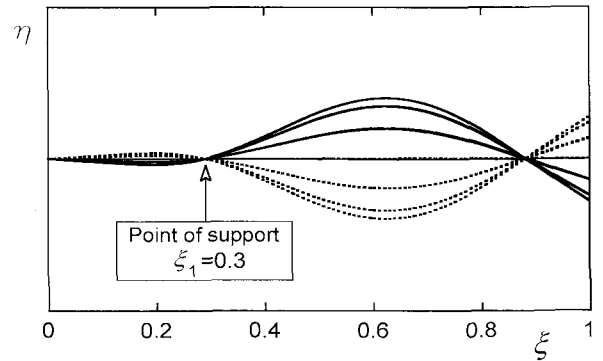


Fig. 7 First, second and third frequency curves for follower forces when  $x=0$ ,  $\gamma=0.001$

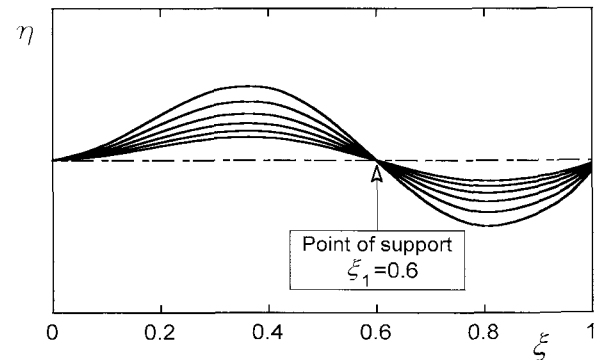
형 불안정이 크게 증가되는 것을 알 수 있다.

Fig. 7에서는 플러터형 불안정에서 다이버전스형 불안정으로 천이되는 과정을 조금 더 상세하게 설명하기 위하여, 미소 내부감쇠를 고려( $\gamma=0.001$ )하고 중간 지지점의 위치가  $\xi_1=0.510, 0.515, 0.520$ 일 경우의 종동력 값의 변화에 따른 1차, 2차, 3차 고유진동수 값의 변화를 나타내고 있다.  $\xi_1=0.510$ 인 경우는 먼저 1차와 2차의 고유진동수가 일치하는 플러터형 불안정이 59.98에서 발생하고, 다시 고유진동수의 값이 0이 되는 89.42에서 다이버전스형 불안정이 발생한다.  $\xi_1=0.515$ 인 경우는 65.40에서 플러터형 불안정이 발생하고, 다시 고유진동수의 값이 0이 되는 84.35에서 다이버전스형 불안정이 발생하는 것으로 1차와 2차 고유진동수가 일치한 구간이  $\xi_1=0.510$ 인 경우보다도 짧아지고, 플러터가 발생하는 임계 값은 커지고, 다이버전스가 발생하는 임계 값은 작아진다.  $\xi_1=0.520$ 인 1차의 고유진동수가 0이 되는 80.81에서 다이버전스형 불안정이 발생하는 것으로, 플러터형 불안정으로부터 다이버전스형 불안정으로 천이되었다는 것을 알 수 있다.

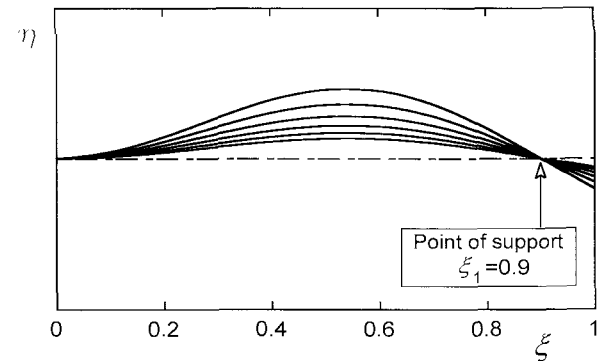
Fig. 8은 Fig. 3에서 각각의 불안정영역( $\xi_1=0.3, 0.6, 0.9$ )에서의 불안정 모드형상을 나타내고 있다. Fig. 8(a)는  $\xi_1=0.3$ 의 위치에 중간지지점이 있을 때의 불안정 모드형상을 나타내고 있다. 이 그림에서는 플러터형 불안정 모드형상을 가지며, 절점(Node)을 2개 갖는 3차 모드이다. Fig. 8(b)는  $\xi_1=0.6$ 의 위치에 중간지지점이 있을 때의 불안정 모드형상을 나타내고 있고,  $\xi_1=0.6$ 의 지점을 기준으로 상하의 진



(a)  $\xi_1=0.3$



(b)  $\xi_1=0.6$



(c)  $\xi_1=0.9$

Fig. 8 Unstable modes for one cycle of oscillation at location of intermediate support  $\xi_1=0.3, 0.6, 0.9$  when  $\gamma=0.0$

폭을 갖는 다이버전스형 불안정 모드 형상을 갖는다. Fig. 8(c)의  $\xi_1=0.9$ 의 위치에 중간지지점이 있을 때는  $\xi_1=0.9$ 의 지점을 기준으로 상하의 진폭을 갖는 다이버전스형 불안정 모드 형상을 갖는다. 따라서 Fig. 8에서 살펴본바와 같이 중간 지지점의 위치에 따라 불안정 모드형상과 모드의 차수가 다르다는 것을 알 수 있다.

Fig. 9는 중간 지지점의 위치  $\xi_1=0.3$ 이고, 탄성기초 파라메타가  $x=0, 10, 100$ 일 경우의 내부 감쇠의 변화에 따른 임계 종동력 값의 경계를 나타내고 있다. 이 그림에서는 내부 감쇠가 0인 경우 임계 종동력 값은 35.36이고, 미소

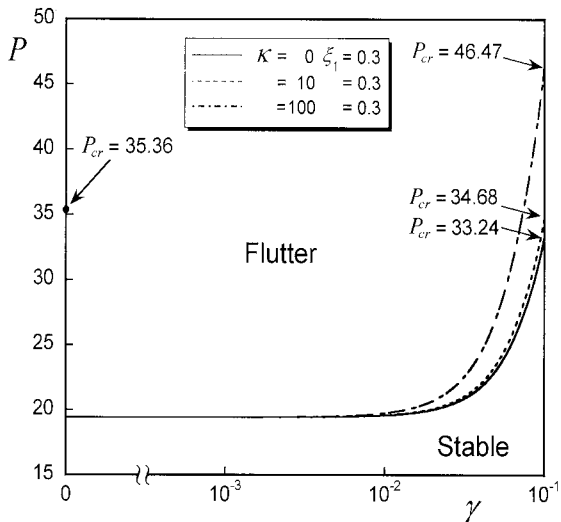


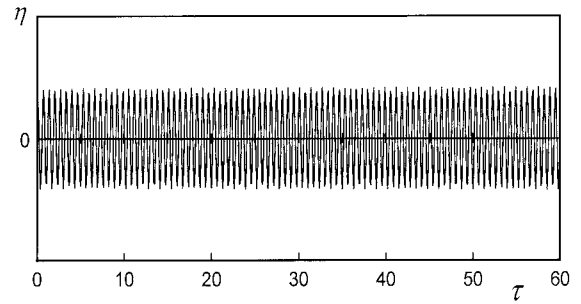
Fig. 9 Flutter bounds as a function of the internal damping  $\gamma$  when  $x=0, 10, 100$

내부 감쇠를 고려하면 임계 중동력 값은 급격히 감소한다. 또, 내부감쇠  $\gamma$ 가 대략  $10^{-2}$ 까지는 탄성기초 파라메타  $x$  값의 크기에 상관없이 임계 중동력 값은 일치하고  $10^{-2}$ 보다 큰 경우에는  $x$ 가 클수록 임계 중동력 값도 증가하는 안정화 효과를 얻을 수 있는 것을 알 수 있다.

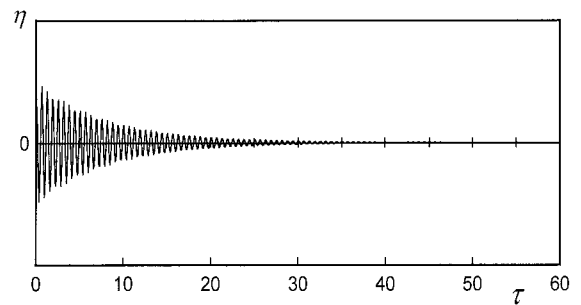
Fig. 10은 Fig. 9에서  $\gamma$ 가  $10^{-2}$ 보다 큰 경우에 탄성기초 파라메타  $x$ 값이 클수록 안정화되는 현상을 설명하기 위한 것으로,  $\gamma=0.1$ 이고  $x=0, 10, 100$  각각에 대하여 보의 자유단에 단위 임펄스를 입력한 응답의 결과를 나타내고 있다.

응답에 대한 안정성을 판별은 무차원 시간 파라미터  $\tau$ 에 따라 진폭이 증가하면 불안정(unstable), 무차원 시간 파라미터  $\tau$ 에 따라 진폭이 감소하여  $\tau \rightarrow \infty$ 에 그 진폭이 0에 접근할 경우는 점근안정(asymptotic stable)하다는 점근안정성 개념이 도입되었다. 본 논문에서는 무차원 시간 파라미터  $\tau$ 를 60까지로 하여 진폭의 성장 경향을 파악하였다.

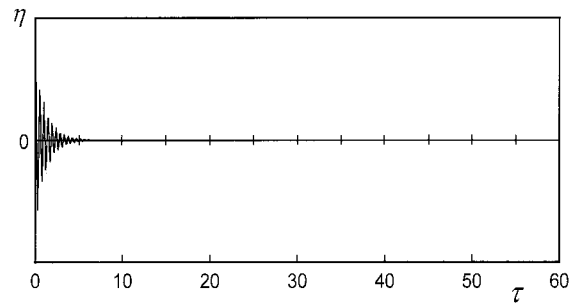
Fig. 10은  $\xi_1=0.3, \gamma=0.1$ 인 경우 내부 감쇠의 크기를  $x=0, 10, 100$ 으로 변화시킨 경우 임펄스 입력에 대한 응답을 보여주고 있다. Fig. 10(a)는  $x=0$ 일 경우이고, 임계 중동력  $p_{cr}=33.24$ 에서의 임펄스 응답에 대한 응답이다. 이 그림에서는 정상상태(steady state)의 진동이 보이고 있으므로 계가 안정하다는 것을 알 수 있다. Fig. 10(b)는  $x=10$ 일 경우이고, 임계 중동력 값  $p_{cr}=34.68$  보다 작은  $p_{cr}=33.24$  ( $x=0$ 의 임계 중동력 값)에서의 동적응답으로 진폭이 크게 감소하여 안정화 된다. Fig. 10(c)는  $x=100$ 일 경우, 임계 중동력 값  $p_{cr}=46.47$ 인 경우 보다 작은  $p_{cr}=33.24$ 에서의 동적응답으로 진폭이 크게 감소하여 안정



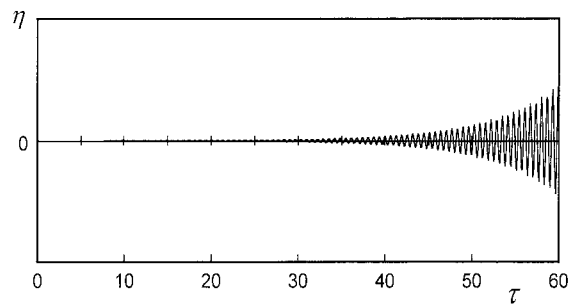
(a)  $x=0, p_{cr}=33.24$



(b)  $x=10, p=33.24$



(c)  $x=100, p=33.24$



(d)  $x=0, p=34.68$

Fig. 10 Dynamic response of a beam when  $\xi_1=0.3, \gamma=0.1$

화 되는 것을 알 수 있다. 반면, Fig. 10(d)에서는  $x=0$ 의 임계 중동력 값  $p_{cr}=33.24$  보다 큰  $p_{cr}=34.68$  ( $x=10$ 의 임계 중동력 값)에서의 동적응답으로 진폭이 증가하여 발산하는 불안정 상태가 되는 것을 알 수 있다. 따라서  $\gamma=0.1$ 인 경우에는 탄성기초 파라메타  $x$ 값이 클수록 안정화 된다



는 것을 확인하였다.

#### 4. 결 론

본 연구는 외부에서 작용하는 힘을 받는 건축물이나 교량 등을 종동력을 받는 탄성기초위에 놓여 있는 외팔보로 모델화 하여 중간 지지의 위치 변화가 안정성을 미치는 영향에 대하여 조사하였다.

첫째, 보의 내부 감쇠를 무시한 경우에는 중간 지지점의 위치가  $\xi_1=0.499$ 에서 플러터형 불안정에서 다이버전스형 불안정으로 천이(transition)가 발생하고, 미소 내부 감쇠를 고려한 경우( $\gamma=0.001$ )에는 중간 지지점의 위치가  $\xi_1=0.518$ 에서 플러터형 불안정에서 다이버전스형 불안정으로 천이가 발생한다.

둘째, 플러터가 발생하는 구간에서는 탄성지지의 스프링 상수 값에 관계없이 일정한 임계 종동력 값을 가지고, 다이버전스가 발생하는 구간에서는 탄성지지의 스프링 상수가 커짐에 따라 임계 종동력 값도 증가한다.

셋째, 내부감쇠  $\gamma$ 가 대략  $10^{-2}$ 까지는 탄성지지의 스프링 상수 값  $x$ 의 크기에 상관없이 임계 종동력 값은 일치하고  $10^{-2}$ 보다 큰 경우에는  $x$ 가 클수록 임계 종동력 값도 증가하는 안정화 효과를 얻을 수 있는 것을 알 수 있다.

즉, 상기 얻어진 주요한 결과를 요약하면 다음과 같다. 종동력을 받는 탄성기초위에 놓여 있는 외팔보에서 중간 지지의 위치가 대략 보의 중앙( $L/2$ ) 정도를 경계로 고정단 쪽으로는 동적불안정(플러터)하고, 자유단 쪽으로는 정적불안정(다이버전스)한 것을 알 수 있다. 또, 보의 고정단에서 중앙( $L/2$ )으로 갈수록 안정하고, 보의 중앙( $L/2$ )에서 자유단으로 갈수록 불안정해진다는 중요한 사실을 도출해 낼 수 있다.

따라서 건축물이나 교량 등의 실제 공학적인 문제에 있어서 중간 지지의 위치를 적절히 조절하므로 구조물의 거동을 제어하여 안정화 시킬 수 있게 된다.

#### 참 고 문 헌

이병구, 김석기, 박광규 (2006) 일단고정 타단스프링으로 지

지된 변단면 Beck 기둥의 임계하중, 한국전산구조공학회 논문집, 19(1), pp.85~92.

이준석, 민병철, 김문영 (2004) 유한요소기법을 이용한 비보존력이 작용하는 보-기둥 구조의 다양한 제변수 변화에 따른 동적 안정성 해석, 한국전산구조공학회논문집, 17(4), pp.351~363.

Anderson, G.L. (1975) The Influence of Rotatory Inertia, Tip Mass, and Damping on the Stability of a Cantilever Beam on an Elastic Foundation, *Journal of Sound and Vibration*, 43(3), pp.543~552.

Langthjem, M.A., Sugiyama, Y. (2000) Dynamic Stability of Columns Subjected to Follower Loads: A Survey, *Journal of Sound and Vibration*, 238, pp.809~851.

Lee, S.Y., Kuo, Y.H., Lin, F.Y. (1992) Stability of a Timoshenko Beam Resting on a Winkler Elastic Foundation, *Journal of Sound and Vibration*, 153(2), pp.193~202.

Maurizi, M.J., Bambill, E.A. (2002) An Additional Note on "Dynamic Stability of Columns Subjected to Follower Loads: A Survey"(M. A. Langthjem and Y. Sugiyama 2000 *Journal of Sound and Vibration* 238, 809-851), *Journal of Sound and Vibration*, 251(1), pp.181~183.

Newland, D.E. (1989) *Mechanical Vibration Analysis and Computation*, Academic Press, New York, pp.226~257.

Rao, G.V., Raju, K.K. (1982) Stability of tapered cantilever columns with an elastic foundation subjected to a concentrated follower force at the free end, *Journal of Sound and Vibration*, 81, pp.147~151.

Smith, T.E., Herrmann, G. (1972) Stability of a Beam on an Elastic Foundation Subjected to Follower Forces, *Journal of Applied Mechanics*, 39, pp.628~629.

Wahed, I.F.A. (1975) The Instability of a Cantilever on an Elastic Foundation under the Influence of a Follower Forces, *Journal of Mechanical Engineering Science*, 17(4), pp.219~222.