논문 2007-44IE-4-3

# 불확실성을 갖는 선형 시변 시스템의 선형 시불변 시스템 변환을 위한 불확실성 유계 해석

# ( The Interpreter for the Bounded of the Uncertainty to transfer a Class of Time-varying Linear System with the uncertainty to the Time-invarying Linear System )

조 도 현*, 이 종 용**

( Do-Hyeoun Cho and Jong-Yong Lee )

요 약

본 논문에서는 일반적으로 시변 선형 시스템에 존재하는 불확실성에 대한 해석을 위하여 입력-상태 변환을 고려하였다. 이는 불확실성에 대한 유계 범위를 결정하는데 중요한 역할을 한다. 그러므로 불확실성을 갖는 선형 시변 시스템에 대한 입력-상태 변환을 적용하여 선형 시불변 시스템으로 변환될 수 있는 불확실성의 유계 범위에 대하여 논의하였으며, 입력-상태 변환을 위한 필요충분조건을 제시하였다. 변환된 시스템은 다중 적분기를 갖는 시스템으로 표현되며, 예제를 통하여 제안된 알고리즘을 확인하고, 검토하였다.

Abstract

In this paper, we consider the input-state(I/S) transformation for the time-varying linear system with the uncertainty because of to determine the bounded range of the uncertainty. And we get the time-invarying linear system after the I/S transformation. We present the necessary sufficient condition for the I/S transformation.The transformed system represent the system with the multiple integral. We verify the proposal algorithm via the example and examine.

**Keywords :** Linear Time-Varying Systems, Uncertainty, I/S Transformation

## I. 서 론

제어 이론이 발달하면서, 시변 선형 시스템에 대한 해석이 꾸준히 제시되어왔다. 매개변수 종속 제어 문제에 대한 전통적인 해석은 대표적으로 매개변수가 천천히 변동되는 경우를 고려하여 왔다. 그러나 선형 시변 시스템에 대한 해석이 기본적으로 매개변수가 천천히 변한다는 조건의 제한을 가지고 있다[1~2, 7]. 최근에는 빠른 매개변수의 변화에 대한 문제가 비선형 시스템과 선형 시스템에 대하여 고려되고 있으며, 또한 시변 비선형 시스템에 대한 상태 피드백 선형화 문제가 1990년대 이후부터 연구되어 왔다. 이를 이용하여 시변 선형 시스템에 대한 해석을 가능하게 하였다[3~5]. 그러나 입력과 출력에 대한 시변 시스템에 대한 해석을 이루어지지 않았다.

그래서 본 논문에서는 기존의 비선형 시스템에 대한 입출력 변환을 시간 함수를 가지는 입력-상태 변환을 이용한 선형 시변 시스템에 대한 입력-상태 변환을 II

* 정회원, 인하공업대학 디지털전자정보과
(Dept. of Digital Electronics & Information ,Inha Tech. Col.)
** 정회원, 광운대학교 교양학부
(Div.ision of General Education, Kwang-woon University)
※ 이 논문은 2007년도 광운대학교 교내 학술연구비 지원에 의해 연구되었음.
접수일자: 2007년10월29일, 수정완료일: 2007년11월30일

장에서 살펴보고, Ⅲ장에서는 불확실성을 가지는 선형 시변 시스템이 입력 상태 변환을 위한 불확실성의 유계 범위에 대하여 언급하며, Ⅳ장에서는 예제를 통하여 확인하고, Ⅴ장에서는 결론을 서술하였다.

## Ⅱ. 본 론

### 1. 선형 시변 시스템의 변환

먼저 선형 시변 시스템(LTV)의 변환을 고려하기 위하여 다음과 같은 단일 입출력 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u \\ y &= C(t)x \end{aligned} \tag{1}$$

여기서, 상태 $x$는 $x \in R^n$이며, 행렬 $A(t) \in R^{n\times n}$, $B(t) \in R^{n\times 1}$ 및 $C(t) \in R^{1\times n}$는 시간$t$ 에 유계된 함수이다.

식(1)로 표현된 선형 시변 시스템의 상태 방정식이 입력-상태의 선형 시불변 시스템으로 변환되기 위한 $n+1$ 개의 변환(transformation)이 존재한다고 하고, 다음과 같이 정의하자.

$$z_i = T_i(x,t),\ T_i : R^n \times R \to R, (i=1,\cdots,n)$$

$$T_{j+1}(x,t) = \dot{T}_j(x,t),\ j=1,2,3,\cdot\cdot\cdot,n-1 \tag{2}$$

$$v = T_{n+1}(x,u,t),\ T_{n+1} : R^n \times R \times R \to R$$

이와 같은 변환$T$ 를 사용하면, 선형 시변 시스템 식(1)은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{z} = A_B z + B_B v \tag{3}$$

그러면, 식(1)에 시간종속 상태변환 식(2)을 사용하여 얻어진 식(3)은 선형 시불변 시스템 이 되며, 시스템의 행렬 $A_B$, $B_B$는 원점에 n개의 다중 극점을 갖는 Brunovsky 표준형을 가지기 때문에, 식(3)의 시스템은 제어 가능하다.

이러한 변환을 얻기 위한 식(2)의 시간종속 상태변환은 다음의 정리 1과 같이 요약된다.

[정리 1] 선형 시변 시스템 식(1)이 Brunovsky 표준형 식(3)으로 상태-입력 변환되기 위한, 시간종속 변환 $T_i(i=1,\cdots,n,n+1)$는 다음의 조건을 만족해야 한다[15].

$$< dT_{ix}, B(t) > = 0$$

$$T_{i+1} = < dT_{ix}, A(t)x > + < dT, 1 >, i=1,\cdots,n-1$$

$$T_{n+1} = < dT_{nx}, A(t)x + B(t)u > + < dT_{nt}, 1 > \tag{4}$$

여기서, $< f,g > = \sum_i^n f_i g_i$와

$dT_{ix} = \left[ \frac{\partial T_i}{\partial x_1}, \frac{\partial T_i}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial T_i}{\partial x_n} \right]$을 의미한다.

이 변환은 비선형 시스템에 대한 상태 궤환 선형화를 위한 변환과 유사한 특성을 가진다[5~8].

즉, 선형 시변 시스템 식(1)이 선형 시불변 시스템 식(3)으로 변환되기 위한 필요충분조건은 먼저 시스템의 가제어성이 성립하여야함을 의미한다. 즉, 제안된 변환에 의하여 시스템의 가제어성은 불변이며, 변환된 선형 시불변 시스템의 안정화를 통하여, 선형 시변 시스템의 안정화를 얻을 수 있다.

다음으로 첫 번째 시간종속 상태변환 $T_1$은 다음 식(5)와 (6)을 만족한다.

$$< dT_1, ad_F^i(G) > = 0, i=0,1,\cdots,n-2 \tag{5}$$

$$< dT_1,\ ad_F^{n-1}(G) > \neq 0 \tag{6}$$

식(5)와 식(6)을 만족하는 상태변환 $T_1$을 얻으면, Lie 도함수 표현과 식(4)를 이용하여 $n$개의 상태변환을 찾는 것이다. 또한, 식(4)의 변환 $T_{n+1}$로부터 시스템의 입력$u$와 변환된 선형 시불변 시스템의 입력$v$사이의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u &= -\frac{L_F^n(T_1(x,t))}{L_G L_F^{n-1}(T_1(x,t))} + \frac{1}{L_G L_F^{n-1}(T_1(x,t))} v \\ &= A_c(t)x + B_c(t)v \end{aligned} \tag{7}$$

여기서, $A_c(t)$와 $B_c(t)$는 시간의 함수로 각각 $R^{1\times n}$과 $R^{1\times 1}$의 차원을 가진다. 다음으로 불확실성을 상태와 입력 행렬에 가지는 선형 시변 시스템에 대한 문제를 고려하자.

### 2. 불확실성을 가지는 선형 시변 시스템의 강건 안정화

단일 입출력의 실제 선형 시변 시스템을 다음과 같이

고려하자.

$$\dot{x} = \hat{A}(t)x + \hat{B}(t)u$$
$$y = C(t)x \tag{8}$$

출력 방정식에 불확실성이 존재하지 않는다고 가정하고, 공칭 선형 시변 시스템 식(1)과 비교하면 다음과 같이 불확실성이 표현된다.

$$\Delta A(t) = \hat{A}(t) - A(t)$$
$$\Delta B(t) = \hat{B}(t) - B(t) \tag{9}$$

여기서, 불확실성 $\Delta A(t)$, $\Delta B(t)$ 는 각각 상태와 입력 행렬에 존재하는 시변 매개변수 불확실성을 나타내는 실수값 행렬로서, 시간에 대하여 유계된 함수로 표현된다.

많은 연구자들에 의하여, 식(9)과 같은 불확실성을 가지는 선형 시변 시스템에 대한 연구가 지속적으로 진행되어 왔으며, 불확실성의 강건성 문제를 해결하기 위한 시변 Riccati 미분 방정식의 해를 구하여야 하는 단점을 가진다[3].

본 논문에서는 선형 시변 시스템을 선형 시불변 시스템으로 변환하여, 기존에 제시된 선형 시변의 제어기를 고려하기 위하여, 먼저 식(8)의 선형 시변 시스템을 선형 시불변 시스템으로의 변환을 고려하기 위한 불확실성의 범위를 정의하고자 한다.

즉, 식(9)의 불확실성을 가지는 선형 시변 시스템이 불확실성 표현이 없는 선형 시불변 시스템으로 변환되기 위한 불확실성의 유계범위는 다음과 같은 보조정리 1로 표현된다.

[보조정리 1] 식(7)의 불확실성이 다음과 같은 유계범위를 갖는다면, 식(6)의 불확실성을가지는 선형 시변 시스템은 완전 선형 시불변 시스템으로 변환된다.

$$① \ \Delta B \in span\{B\} \tag{10}$$

$$② \ [\Delta F, ad_F^k G] \in span\left\{G, ad_F G, \cdots, ad_F^{k+1} G\right\},$$
$$(k = 0, 1, 2, \cdots, n-3) \tag{11}$$

여기서, $F = [(Ax)^T, 1]^T, G = [B^T, 0]^T$, $\Delta F = [(\Delta Ax)^T, 0]^T, \Delta G = [\Delta B^T, 0]^T$ 로 정의된다.

보조 정리의 증명은 부록에 있습니다.

다음으로 제시된 내용에 대하여 예를 통하여 살펴보기로 한다.

## 3. 예제

먼저 시간 종속 변환에 의하여, 선형 시변 시스템이 선형 시불변 시스템으로 변환되는 과정에 대한 예를 보이기 위하여 다음과 같은 선형 시변 시스템을 고려하자.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 1 \\ 1 & t^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ t^2 \end{bmatrix} u \tag{12}$$

식(4)의 조건에 대입하면, $B(t) = \begin{bmatrix} -t \\ t^2 \end{bmatrix}$,

$(A(t) - \frac{d}{dt})B(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2t \end{bmatrix}$ 가 되므로, 선형 시스템의 가제어성이 성립하며, 포함적 성질은 단일 벡터이므로 당연히 성립한다.

첫 번째 시간 종속 상태 변환 $T_1$ 을 얻기 위하여, 식(5)와 식(6)을 이용하면, 다음과 같은 편미분 방정식을 얻는다.

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_1} = t\frac{\partial T_1}{\partial x_2} \quad , \quad \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \neq 0$$

위의 편미분 방정식으로부터, 시간 종속 상태 변환 $T_1$ 은 다음과 같이 선택된다.

$$z_1 = T_1 = tx_1 + x_2$$

그리고, 식(4)에 따라서, 다음과 같이 표현된다.

$$z_2 = T_2 = \dot{T}_1 = (t^2+2)x_1 + (t+t^{-1})x_2$$

$$v = T_3 = \dot{T}_2 = (t^3+5t+t^{-1})x_1 + (t^2+4)x_2 - tu$$

따라서, 시간 종속 상태 변환을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$T = [T_1, T_2]^T = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 1 \\ t^2+2t+t^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$u = (t^2+5+t^{-2})x_1 + (t+\frac{4}{t})x_2 - \frac{v}{t}$$

그러므로 식(12)의 선형 시변 시스템은 시간 종속 상태 변환에 의하여 선형 시불변 시스템으로 변환된다.

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

Ⅱ장에서의 시간 종속 상태 변환은 선형 시변 시스템이 가제어성을 만족하면 변환된 선형 시불변 시스템으로 표현하여, 선형 제어칙을 설계 목적에 따라 설정할 수 있다.

이상으로, Ⅱ장에서 제안된 내용을 예제를 통하여 살펴보았으며, 다음으로는 불확실성을 가지는 선형 시변 시스템에 대하여 살펴보자.

참고문헌 [13]에 있는 다음과 같은 공칭 선형 시스템 식(13)과 실제 선형 시변 시스템 식(14)을 고려하자.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t^2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t^2 + 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{14}$$

공칭 선형 시변 시스템 식(13)에 대하여, 시간 종속 상태 변환의 조건을 대입하여 조사하면, 식(4)의 조건을 만족하며, 식(5)와 식(6)에 따라서 시간 종속 변환 및 외부 입력의 표현은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} z_1 &= T_1 = x_1 \\ z_2 &= T_2 = \dot{T}_1 = \dot{x}_1 = \sin t^2\, x_1 + x_2 \\ v &= T_3 = \dot{T}_2 = \dot{z}_2 \\ &= (2t\cos t^2 + (\sin t^2)^2)x_1 + \sin t^2 x_2 + u \end{aligned} \tag{15}$$

위의 식(15)을 실제 선형 시변 시스템 식(14)에 적용하면, 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 - \sin t^2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \tag{16}$$

## Ⅲ. 결 론

본 연구에서는 불확실성을 가지는 선형 시변 시스템에 대한 시간 종속 상태-입력 변환에 의하여 선형 시불변 시스템으로 변환되기 위한 불확실성의 유계 범위에 대하여 논의하였다.

이 결과로 기존의 알고리즘에서는 유계 범위의 한계를 임으로 고려하였으나, 본 연구에서는 유계 범위의 정확한 해석이 되었으며, 기존에 제안된 시변 Riccati 미분 방정식을 풀지 않아도 된다는 장점을 갖는다. 그러므로 계산량을 줄여줄 수 있다는 특징을 가지며, 제어칙은 선형 구조를 가지므로 구현하기 쉽다. 그리고 이 결과를 다변수 시스템으로 확장할 수 있을 것이다.

본 연구는 앞으로 입력-출력 변환 및 외란의 비결합을 가지는 선형 시변 시스템에 적용하여 확장하고자 하며, 안정도 문제를 증명하고자 한다.

## 참 고 문 헌


[1] R. Ravi, K. M. Nagpal & P. P. Khargonekar "$H_\infty$ Control of Linear Time-Varying Systems: A State Space Approach", SIAM J. Control and Optimization, vol-29, no-6, pp. 1349-1413, 1991.

[2] A. Feintuch & B. A. Francis, "Uniformly Optimal Control of Linear Time-Varying Systems", Systems and Control Letters, vol-5, pp. 67-71, 1984.

[3] P. P. Khargonekar, R. Petersen & K. Zhou, "Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems: Quadratic Stabilizability and $H_\infty$ Control Theory", IEEE Trans. Auto. Contr., vol-35, no-3, pp. 356-361, 1990.

[4] L. Xie & C. E. de Souza, "Robust $H_\infty$ Control for Linear Systems with Norm-Bounded Time-Varying Uncertainty", IEEE Trans. Auto. Contr., vol-37, no-8, pp. 1188-1191, 1990.

[5] 이종용, "완전 선형화 방법에 의한 로보트 매니퓰레이터의 강건한 제어", 광운대학교, 박사학위 논문, 1993.

[6] 이종용, 이상효, "확장된 비선형 궤환 선형화를 이용한 시변 비선형 제어", 전기학회 논문집, vol-42, no-5, pp .97-105, 1993.

[7] M. Vidyasagar , Nonlinear System Analysis , Prentice-Hall, 1993.

[8] A. Isidori, Nonlinear Control Systems, Springer-Verlag , 1989.

[9] I. R. Petersen, "Stabilization of an Uncertain Linear System in Which Uncertain Parameters Enter into The Input Matrix", SIAM J. Contr. Optimiz., vol-26, no-6, pp. 1257-1264, 1988.

[10] I. R. Petersen, "A Stabilization Algorithem for a Class of Uncertain Linear Systems", Syst. Contr. Lett., vol-8, pp. 351-357, 1987.

[11] B. R. Barmish, "Necessary and Sufficient Conditions for Quadratic Stabilizability of an Uncertain Linear Systems", J. Optimiz. Theory Appl., vol-46, no-4, pp. 399-408, 1985.

[12] R. Marino & P. Tomei, "Robust Stabilization of Feedback Linearizable Time-Varying Uncertain Nonlinear Systems", Automatica, vol-29, no-1, pp. 181-189, 1993.

[13] K. S. Tsakalis & P. A. Ioannou, Linear

Time-Varying Systems Control and Adaptation, Prentice Hall, 1993.

[14] J. J. E. Slotine & W. Li, Applied Nonlinear Control, Prentice-Hall, 1991.

[15] 조도현, 이상효, "상태 변환을 이용한 선형 시변 시스템에 대한 강건한 제어", 제어자동화시스템공학 논문지, 제4권, 제1호, pp1~9, 1998.

[16] Choi H.L. and LIM J.T., "Feedback linearisation of time-varying nonlinear systems via time-varying diffeomorphism" IEE Proc. Control Theory Appl., Vol 150, No 3, pp. 279-284, 2003.

## A. 부 록

보조정리 1의 증명은 다음과 같다.

먼저 공칭 선형 시변 시스템의 변환 $T_1$이 불확실성을 가지는 선형 시변 시스템의 변환 $\widehat{T}_1$이라 하자.

$$\widehat{T}_1 = T_1 \tag{a-1}$$

다음과 같이 $\widehat{T}_1$을 시간에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\widehat{T}_2 = \dot{\widehat{T}}_1 &= \frac{\partial T_1}{\partial x}\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{\partial T_1}{\partial t} \\ &= \frac{\partial T_1}{\partial x}(Ax + \Delta Ax + Bu + \Delta Bu) + \frac{\partial T_1}{\partial t} \\ &= \frac{\partial T_1}{\partial x}(Ax + Bu) + \frac{\partial T_1}{\partial x}\Delta Ax + \frac{\partial T_1}{\partial x}\Delta Bu + \frac{\partial T_1}{\partial t}\end{aligned} \tag{a-2}$$

공칭 선형 시변 시스템의 상태 변환 조건에 의하여 $\frac{\partial T_1}{\partial x}B = 0$이고, 보조정리 1의 조건 ①에 의하여 $\Delta B \in span\{B\}$이므로, $\frac{\partial T_1}{\partial x}\Delta B = 0$이 성립한다.

그러므로 식(a-2)는 다음과 같이 된다.

$$\widehat{T}_2 = \frac{\partial T_1}{\partial x}(A + \Delta A)x + \frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial T_1}{\partial x}Ax + \frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{\partial T_1}{\partial x}\Delta Ax \tag{a-3}$$

또한, 다음과 같이 정의를 사용하면,

$X = [x^T, t]^T$, $F = [(AX)^T, 1]^T$, $G = [B^T, 0]^T$,
$\Delta F = [(\Delta Ax)^T, 0]^T$, $\Delta G = [\Delta B^T, 0]^T$, $\widehat{F} = F + \Delta F$,
$\widehat{G} = G + \Delta G$

식(a-3) 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}\widehat{T}_2 &= \left[\frac{\partial T_1}{\partial x}, \frac{\partial T_1}{\partial t}\right]\begin{bmatrix}Ax \\ 1\end{bmatrix} + \left[\frac{\partial T_1}{\partial x}, \frac{\partial T_1}{\partial t}\right]\begin{bmatrix}\Delta Ax \\ 0\end{bmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial T_1}{\partial x}, \frac{\partial T_1}{\partial t}\right]\left\{\begin{bmatrix}Ax \\ 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\Delta Ax \\ 0\end{bmatrix}\right\} = \frac{\partial T_1}{\partial X}\widehat{F} = L_{\widehat{F}}T_1\end{aligned} \tag{a-4}$$

즉, 보조정리 1의 ① 조건은 $\Delta G \in span\{G\}$이므로, $\Delta G = \alpha G$로 놓을 수 있다.

여기서, $\alpha$는 임의의 상수이다.

그러므로 변환 $\widehat{T}_2$가 입력 $u$ 에 대하여 독립이 성립한다.

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial T_1}{\partial x}, \frac{\partial T_1}{\partial t}\right]\left\{\begin{bmatrix}B \\ 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\Delta B \\ 0\end{bmatrix}\right\}Y = \frac{\partial T_1}{\partial X}\widehat{G} \\ &\quad = L_{\widehat{G}}T_1 = L_{(1+\alpha)G}T_1 = (1+\alpha)L_G T_1 = 0\end{aligned} \tag{a-5}$$

다음으로, 변환 $\widehat{T}_2$을 시간에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\widehat{T}_3 = \dot{\widehat{T}}_2 &= \frac{\partial \widehat{T}_2}{\partial x}\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{\partial \widehat{T}_2}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \widehat{T}_2}{\partial x}(Ax + \Delta Ax + Bu + \Delta Bu) + \frac{\partial \widehat{T}_2}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \widehat{T}_2}{\partial x}Ax + \frac{\partial \widehat{T}_2}{\partial x}\Delta Ax + \frac{\partial \widehat{T}_2}{\partial t} + \frac{\partial \widehat{T}_2}{\partial x}(B + \Delta B)u \\ &= \left[\frac{\partial \widehat{T}_2}{\partial x}, \frac{\partial \widehat{T}_2}{\partial t}\right]\begin{bmatrix}Ax \\ 1\end{bmatrix} + \left[\frac{\partial \widehat{T}_2}{\partial x}, \frac{\partial \widehat{T}_2}{\partial t}\right]\begin{bmatrix}\Delta Ax \\ 0\end{bmatrix} \\ &\quad + \left[\frac{\partial \widehat{T}_2}{\partial x}, \frac{\partial \widehat{T}_2}{\partial t}\right]\left\{\begin{bmatrix}B \\ 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\Delta B \\ 0\end{bmatrix}\right\}u \\ &= L_{\widehat{F}}\widehat{T}_2 + L_{\widehat{G}}\widehat{T}_2 u = L_{\widehat{F}}^2 T_1 + L_{\widehat{G}}L_{\widehat{F}}T_1 u \\ &= L^2_{\widehat{F}}T_1 - (1+\alpha)\, L_{[\Delta F, G]}\, T_1 u\end{aligned} \tag{a-6}$$

여기서, 입력 $u$의 항은 다음과 같은 과정을 통하여 얻어진다.

$$\begin{aligned}L_{\widehat{G}}L_{\widehat{F}}T_1 &= L_{\widehat{F}}L_{\widehat{G}}T_1 - L_{[\widehat{F}, \widehat{G}]}T_1 = -L_{[\widehat{F}, \widehat{G}]}T_1 \\ &= -(1+\alpha)L_{[F, G]}T_1 - (1+\alpha)L_{[\Delta F, G]}T_1 \\ &= -(1+\alpha)L_{[\Delta F, G]}T_1\end{aligned}$$

보조정리 1의 조건 ②에 의하여, $[\Delta F, G] \in span\{G, [F, G]\}$이므로, $L_{[\Delta F, G]}T_1 = 0$이 된다. 그래서 $\widehat{T}_3$는 $u$ 에 독립이다. 즉, $L_{\widehat{G}}L_{\widehat{F}}T_1 = 0$이다.

$$\widehat{T}_3 = L^2_{\widehat{F}}\, T_1 \tag{a-7}$$

또한, $\widehat{T}_3$을 시간에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\widehat{T}_4 = \dot{\widehat{T}}_3 = \frac{\partial \widehat{T}_3}{\partial x}\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{\partial \widehat{T}_3}{\partial t}$$
$$= L_{\hat{F}}\widehat{T}_3 + L_{\hat{G}}\widehat{T}_3 u = L_{\hat{F}}^3 T_1 + L_{\hat{G}} L_{\hat{F}}^2 T_1 u \tag{a-8}$$

여기서, 입력의 항을 정리하면, 다음과 같이 간략화 된다.

$$L_{\hat{G}} L_{\hat{F}}^2 T_1 = L_{\hat{F}}^2 L_{\hat{G}} T_1 - 2L_{\hat{F}} L_{[\hat{F},\hat{G}]} T_1 + L_{ad_{\hat{F}}^2 \hat{G}} T_1 = L_{ad_{\hat{F}}^2 \hat{G}} T_1 \tag{a-9}$$

한편, 식(a-9)의 $ad_{\hat{F}}^2 \hat{G}$는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} ad_{\hat{F}}^2 \hat{G} &= (1+\alpha)\, ad_{\hat{F}}^2 G \\ &= (1+\alpha) ad_F^2 G + (1+\alpha)[F, [\Delta F, G]] \\ &\quad + (1+\alpha)[\Delta F, [F, G]] + (1+\alpha) ad_F^2 G \end{aligned} \tag{a-10}$$

여기서, 식(a-10)는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$[F, [\Delta F, G]] = [F, \beta_1 G + \beta_2 ad_F G] = \beta_1 [F, G] + \beta_2 [F, [F, G]]$$

$$[\Delta F, [\Delta F, G]] = [\Delta F, \beta_1 G + \beta_2 ad_F G] = \beta_1 [\Delta F, G] + \beta_2 [\Delta F, ad_F G]$$

여기서, $\beta_1$, $\beta_2$는 영이 아닌 임의 상수이다. 그러므로 식(a-10)는 다음과 같이 요약된다.

$$\begin{aligned} ad_{\hat{F}}^2 \hat{G} = {} & (1+\alpha) ad_F^2 G + (1+\alpha)\beta_1 ad_F G + (1+\alpha)\beta_2 ad_F^2 G \\ & + (1+\alpha)[\Delta F, ad_F G] + (1+\alpha)\beta_1 [\Delta F, G] \\ & + (1+\alpha)\beta_2 [\Delta F, ad_F G] \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} &= (1+\alpha)\beta_1 ad_F G + (1+\alpha)(1+\beta_2) ad_F^2 G \\ &\quad + (1+\alpha)\beta_1 [\Delta F, G] + (1+\alpha)(1+\beta_2)[\Delta F, ad_F G] \end{aligned}$$

그러므로 식(a-9)는,

$L_{ad_F G} T_1 = L_{ad_F^2 G} T_1 = L_{[\Delta F, G]} T_1 = 0$이므로, 다음과 같이 간략화 된다.

$$\begin{aligned} L_{ad_{\hat{F}}^2 \hat{G}} T_1 &= (1+\alpha)\beta_1 L_{ad_{\hat{F}} G} T_1 + (1+\alpha)(1+\beta_2) L_{ad_F^2 G} T_1 \\ &\quad + (1+\alpha)\beta_1 L_{[\Delta F, G]} T_1 + (1+\alpha)(1+\beta_2) L_{[\Delta F, ad_F G]} T_1 \\ &= (1+\alpha)(1+\beta_2) L_{[\Delta F, ad_F G]} T_1 \end{aligned}$$

그러므로 식(a-8)은 다음과 같다.

$$\widehat{T}_4 = \dot{\widehat{T}}_3 = L_{\hat{F}}^3 T_1 + (1+\alpha)(1+\beta_2) L_{[\Delta F, ad_F G]} T_1 u \tag{a-11}$$

여기서, 보조정리 1의 조건 ②에 의하여 $[\Delta F, ad_F G] = span\{G, [F, G], [F, [F, G]]\}$이므로, $L_{[\Delta F, ad_F G]} T_1 = 0$가 된다. 그러므로 $\widehat{T}_4$는 입력 $u$에 대하여 독립이다.

또한, $L_{\hat{G}} L_{\hat{F}}^2 T_1 = 0$ 이다.

최종적으로 식(a-8)은 다음과 같이 표현된다.

$$\widehat{T}_4 = L_{\hat{F}}^3 T_1 \tag{a-12}$$

이와 같은 과정을 반복 적용하면, $\widehat{T}_n$은 다음과 같이 표현된다.

$$\widehat{T}_n = \dot{\widehat{T}}_{n-1} = \frac{\partial \widehat{T}_{n-1}}{\partial x}\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{\partial \widehat{T}_{n-1}}{\partial t} = L_{\hat{F}}^{n-1} T_1 + L_{\hat{G}} L_{\hat{F}}^{n-2} T_1 u \tag{a-13}$$

식(a-13)의 마지막 항 $L_{\hat{G}} L_{\hat{F}}^{n-2} T_1$에 Liebniz 공식을 적용하면, 다음과 같다.

$$\begin{aligned} L_{\hat{G}} L_{\hat{F}}^{n-2} T_1 &= L_{\hat{F}}^{n-2} L_{\hat{G}} T_1 - (n-2) L_{\hat{F}}^{n-3} L_{ad_{\hat{F}} \hat{G}} T_1 \\ &\quad + \frac{(n-2)(n-3)}{2!} L_{0\hat{F}}^{n-4} L_{ad_{\hat{F}}^2 \hat{G}} T_1 \\ &\quad + \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{3!} L_{\hat{F}}^{n-5} L_{ad_{\hat{F}}^3 \hat{G}} T_1 + \cdots + (-1)^{n-2} L_{ad_{\hat{F}}^{n-2} \hat{G}} T_1 \end{aligned} \tag{a-14}$$

여기서, $L_{\hat{G}} T_1 = L_{ad_{\hat{F}} \hat{G}} T_1 = \cdots = L_{ad_{\hat{F}}^{n-3} \hat{G}} T_1 = 0$이므로, 식(a-14)는 다음과 같다.

$$L_{\hat{G}} L_{\hat{F}}^{n-2} T_1 = (-1)^{n-2} L_{\partial d_{\hat{F}}^{n-2} \hat{G}} T_1 \tag{a-15}$$

$ad_{s\hat{F}}^{n-2} G$에 대하여, Lie Bracket 연산을 적용하면, $\beta_{n-2}[\Delta F, ad_F^{n-3} G]$로 표현되어,

$L_{\hat{G}} L_{\hat{F}}^{n-2} T_1 = (-1)^{n-2} \beta_{n-2} L_{[\Delta F, ad_F^{n-3} G]} T_1$이 성립된다.

여기서, $\beta_{n-2}$는 임의 영이 아닌 상수이다.

또한 보조정리 1의 조건 ②인

$[\Delta F, ad_F^{n-3} G] = span\{G, ad_F G, \cdots, ad_F^{n-2} G\}$에 의하여, $L_{\hat{G}} L_{\hat{F}}^{n-2} T_1 = 0$이 된다.

그러므로 $\widehat{T}_n$은 입력 $u$에 대하여 독립이 되며, 다음과 같이 표현된다.

$$\widehat{T}_n = \dot{\widehat{T}}_{n-1} = L_{\hat{F}}^{n-1} T_1 \tag{a-16}$$

그러므로 보조정리 1의 조건을 가지는 선형 시변 시스템은 공칭 선형 시변 시스템의 변환 $T_1$에 의하여 완전 선형 시불변 시스템으로 변환된다.

이상으로 보조정리 1의 증명이 완료되었다.

또한 불확실성을 가지는 선형 시변 시스템의 완전 선형 시불변화를 위한 불확실성 유계범위가 다음과 같이 나타낼 수 있다.

① $\Delta B \in span\{B\} \Leftrightarrow \Delta G \in span\{G\}$

② $[\Delta F, ad_F^k G] \in span\{G, ad_F G, \cdots, ad_F^{k+1} G\} \Leftrightarrow$

$[\Delta A, W^k] \in span\{W_0, W_1, \cdots, W_{k+1}\}, k = 0,1,2,\cdots,n-3)$

그리고 보조정리 1의 조건은 모델의 정합 조건, $\Delta A = \beta A$, $\Delta B = \alpha B$을 포함하므로, 기존의 모델 정합을 확장한 것이다.

## 저 자 소 개

**조 도 현**(정회원)
대한전자공학회 논문지
제43권 IE편 제1호 참조

**이 종 용**(정회원)
대한전자공학회 논문지
제44권 IE편 제3호 참조