

GPS/INS 가관측성의 간편한 해석

Simplified Observability Analysis of GPS/INS

홍신표*
(Sinpyo Hong)

Abstract : In this paper a study on the simplified observability analysis of GPS/INS is introduced. Errors for the position, velocity, attitude, gyro and accelerometer biases, and lever arm between GPS antenna and inertial sensors are considered in the observability analysis. From the error dynamics model in which relatively small terms are neglected, simple observability conditions are obtained such that the observability of GPS/INS is determined by the test on the attitude, gyro bias, and lever arm. Unobservable errors for the position, velocity, and accelerometer bias are determined by those for the attitude, gyro bias, and lever arm. The simplified observability conditions are applied to a constant speed horizontal motion. It is shown that there are seven unobservable modes for the motion including the vertical component of gyro bias. The analytic observability analysis results are confirmed with a covariance simulation.

Keywords : observability, the global positioning system (GPS), inertial navigation systems (INS)

I. 서론

위성항법장치(GPS: The global positioning system)과 관성항법장치(INS: inertial navigation system)의 상호 보완적인 역할은 잘 알려져 왔다[1-3]. 즉, GPS는 시간이 지나도 오차의 크기가 증가하지 않는 위치, 속도, 시각 또는 자세 등에 관한 정보를 제공하지만, 이것들은 불연속적이고 외부환경에 영향을 크게 받는다. INS는 연속적이고 외부환경과 무관한 정보(각속도와 가속도)를 이용하지만, 이들로부터 계산된 항법정보 즉, 위치, 속도 및 자세는 시간이 지남에 따라 오차가 증가하는 특성을 가지고 있다. 그러나, 두 항법장치를 통합하면 연속적이고 시간에 따라 오차가 증가하지 않으며 외부 환경에 보다 덜 민감한 항법장치를 구현할 수 있다. 이와 같은 장점으로 인하여 GPS와 INS로 이루어진 통합항법장치의 구현과 응용에 관한 연구가 활발하게 진행되고 있다[4-7].

본 논문에서는 GPS와 INS의 통합항법장치 즉, GPS/INS의 가관측성 해석(observability analysis)을 위한 간편한 방법을 소개한다. INS의 오차상태(error state)는 보통 위치, 속도, 자세, 자이로 및 가속도계의 편차 (bias)들의 오차 벡터들로 구성되며 최소 5개의 요소를 가진다[8]. (GPS 대신에 속도 측정센서를 사용하면, 오차상태는 위치오차벡터를 제외한 최소 12개의 요소를 가진다[9].) 여기에 GPS 안테나와 관성센서 사이의 레버아암(lever arm) 오차를 더하면 오차상태는 18개의 요소를 가진다. 이러한 오차상태의 가관측성에 관한 해석적 연구는 보통 항법오차 전파모델(navigation error dynamics model)을 단순화 시켜서 행한다. 모델을 어떻게, 얼마나 단순화 시킬 지는 항법센서 잡음의 거동과 항체(vehicle)의 운동형태에 따라 달라질 수 있다. 본 논문에서는 자이로 신호의 편차가 0.1%/s 정도인 저급(automotive grade)의 MEMS(Micro-Electro Mechanical Systems) IMU(Inertial Measurement Unit)와 센

티미터 단위의 위치오차를 가지는 정밀한 CDGPS(Carrier Phase Differential GPS)로 이루어진 항법장치를 대상으로 하여 오차 전파모델을 간편화 시켰다.

항법장치의 해석적인 가관측성 연구는 가관측행렬(observability matrix)의 계수(rank)를 조사하여 가관측성 여부를 판단해 왔다[8-10]. 보통의 경우 오차상태 전체의 가관측성을 시험하지만, 수평방향성분과 수직방향성분을 분리하여 보다 간단한 오차모델을 사용하여 시험하기도 한다. 본 논문에서는 자세, 자이로편차 및 레버아암 오차들에 대한 가관측성 관점으로 전체 시스템의 가관측성 관정을 대신하였다. 또한, 위치, 속도 및 가속도계편차 오차들의 관측불가능한 성분은 자세, 자이로 편차 및 레버아암 오차들의 관측불가능한 성분으로 표시하였다. 따라서, 가관측성 관정에 보다 간단한 식을 이용함으로써 가관측성 해석을 단순화시켰다. 본 논문에서 제시한 가관측성 해석 방식은 GPS/INS의 오차특성을 정성적으로 이해하는 데에 편리하며, 또한, 본 논문에서 사용한 간단화 된 오차전파모델은 오차 추정용 필터의 계산시간을 절감시킬 수 있다.

본 논문에서는 수평면을 등속으로 운동하는 환경에 대하여 상기의 가관측성 해석방법을 적용하였다. 이 경우, 자이로 편차의 수직성분은 보통 weakly observable 하다고 알려져 왔지만, 단순화된 오차 전파모델을 적용하여 관측불가능으로 취급할 수 있음을 보였다. 또한, 관측불가능한 항법오차들 사이의 관계들을 간편하게 표현하였다. 등속수평운동에 대한 가관측성 해석 결과는 수치모의를 통하여 검증하였다.

II. 항법오차 전파모델

본 장에서는 항법오차 전파모델을 소개한다. 낮은 등급의 MEMS IMU와 정밀한 GPS 수신기로부터 얻는 신호들의 잡음특성을 감안하여 항법오차 전파모델을 간단화 시켜, 다음 장에서 소개하는 가관측성 해석에 편리하게 이용되도록 한다. 위치, 속도, 자세, 관성 센서신호의 편차 그리고 레버아암에 대한 추정오차들이 오차 전파모델에 포함된다. 위치 및 속도 오차들의 기준좌표계는 항법좌표계로 하지만, 자세, 관

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2007. 2. 6., 채택확정 : 2007. 10. 25.

홍신표 : ㈜지엠비 기술연구소(simpyo59@paran.com)

※ 본 논문의 내용은 한국과학기술원의 우수연구센터 (ASERC) 지원과제의 일부로 수행된 것임.

성센서의 편차 및 레버아암 오차들의 기준좌표계는 항체좌표계로 한다. 이러한 기준좌표계의 선정으로 가관측행렬의 형태를 보다 단순화 시킬 수 있다. 오차전파식은 상대적으로 크기가 작은 항을 제외시켜 간단화 시킨다.

항법좌표계를 기준 좌표계로 한 스트랩다운(strap-down) 항법식은 다음과 같다[11]:

$$\dot{P}^n = H_n V^n \tag{1}$$

$$\dot{V}^n = R_b^n f^b - (\omega_{en}^n + 2\omega_{ie}^n) \times V^n + g^n \tag{2}$$

$$\dot{R}_b^n = R_b^n \Omega_{nb}^b \tag{3}$$

여기서,

$$P^n = \begin{bmatrix} \lambda \\ \Phi \\ h \end{bmatrix}, V^n = \begin{bmatrix} v_N \\ v_E \\ v_D \end{bmatrix}, H_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_\lambda + h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(R_\Phi + h)\cos\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

P^n , V^n , g^n 그리고 f^b 는 각각 위치, 속도, gravity 그리고 specific force를 나타내고

$$R_\lambda = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{3/2}}, R_\Phi = \frac{a}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{1/2}} \tag{5}$$

이다. 여기서 a 와 e 는 지구기준타원체의 장축과 이심률을 나타낸다. 위의 항법식에 대한 해의 추정치와 실제 값(true values)사이의 오차를 다음과 같이 표시한다:

$$\hat{P}^n = P^n + \delta P^n \tag{6}$$

$$\hat{V}^n = V^n + \delta V^n \tag{7}$$

$$\hat{R}_b^n = R_b^n (I_3 + [\gamma^b \times]) \tag{8}$$

$$\hat{f}^b = f^b + \varepsilon_a + w_a \tag{9}$$

$$\hat{\omega}_{ib}^b = \omega_{ib}^b + \varepsilon_g + w_g \tag{10}$$

여기서 δP^n , δV^n 그리고 γ^b 는 각각 위치, 속도, 그리고 자세의 추정오차들; $[\gamma^b \times]$ 는 γ^b 의 cross product matrix; \hat{f}^b 는 가속도계 측정치; ε_a 는 가속도계 측정치의 편차; w_a 는 가속도계 측정치의 잡음; $\hat{\omega}_{ib}^b$ 는 자이로 측정치; ε_g 는 자이로 측정치의 편차; 그리고 w_g 는 자이로 측정치의 잡음이다. 위의 식에서 \hat{R}_b^n 에 대한 오차모델을 다음과 같이 정의할 수도 있다:

$$\hat{R}_b^n = (I_3 - [\gamma^n \times]) R_b^n \tag{11}$$

이 경우 γ^n 은 스트랩다운 관성항법장치에 대하여 Φ 모델을 적용한 equivalent tilt 각이 된다[12]. 선형오차항만을 고려하면, γ^b 와 γ^n 사이에는 다음의 관계가 성립한다.

$$\gamma^b = -R_n^b \gamma^n \tag{12}$$

관성센서의 편차를 1차 가우스-마르코프 프로세스(first order Gauss-markov process)로 가정하면, INS 오차들의 선형 전파식은 다음과 같이 나타낼 수 있다[11,13]:

$$\delta \dot{P}^n = H_n \delta V^n + H_p \delta P^n \tag{13}$$

$$\delta \dot{V}^n = (G_n + V^n \times H_{wp}) \delta P^n + (V^n \times H_{wv} - \Omega_{en}^n - 2\Omega_{ie}^n) \delta V^n - R_b^n F^b \gamma^b + R_b^n \varepsilon_a + R_b^n w_a \tag{14}$$

$$\dot{\gamma}^b = -\Omega_{ib}^b \gamma^b + \varepsilon_g - R_n^b (H_{wp2} \delta P^n + H_{wv} \delta V^n) + w_g \tag{15}$$

$$\dot{\varepsilon}_g = -\sigma_g \varepsilon_g + w_{gb} \tag{16}$$

$$\dot{\varepsilon}_a = -\sigma_a \varepsilon_a + w_{ab} \tag{17}$$

여기서

$$H_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{v_N}{(R_\lambda + h)^2} \\ \frac{v_E \sin \lambda}{(R_\Phi + h)\cos^2 \lambda} & 0 & -\frac{v_E}{(R_\Phi + h)^2 \cos \lambda} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_{wv} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{(R_\Phi + h)} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\sin \lambda}{(R_\Phi + h)\cos \lambda} & 0 \end{bmatrix}, G_n = \frac{\partial g^n}{\partial P^n}$$

$$H_{wp} = \begin{bmatrix} -2\omega_{ie} \sin \lambda & 0 & \frac{-v_E}{(R_\Phi + h)^2} \\ 0 & 0 & \frac{v_N}{(R_\lambda + h)^2} \\ -\left(2\omega_{ie} \cos \lambda + \frac{v_E}{(R_\Phi + h)\cos^2 \lambda}\right) & 0 & \frac{v_E \sin \lambda}{(R_\Phi + h)^2 \cos \lambda} \end{bmatrix}$$

$$H_{wp2} = \begin{bmatrix} -\omega_{ie} \sin \lambda & 0 & \frac{-v_E}{(R_\Phi + h)^2} \\ 0 & 0 & \frac{v_N}{(R_\lambda + h)^2} \\ -\left(\omega_{ie} \cos \lambda + \frac{v_E}{(R_\Phi + h)\cos^2 \lambda}\right) & 0 & \frac{v_E \sin \lambda}{(R_\Phi + h)^2 \cos \lambda} \end{bmatrix}$$

이고, F^b 는 f^b 의 반대칭행렬 그리고 σ_g 와 σ_a 는 각각 자이로와 가속도계 잡음들의 시정수들의 역수이다. 관성센서의 scale factor 오차나 정렬오차 등은 관성센서의 다른 오차들보다 상대적으로 크게 작다고 가정하여 본 논문에서는 고려하지 않았다.

위의 오차 선형전파식은 상당히 복잡하여 해석적 가관측성 분석에 어려움이 많으므로 아래에서는 보다 단순한 오차 전파모델을 고려하기로 한다. 저급의 MEMS 관성센서의 경우 편차오차가 가장 크므로[3], 참고문헌[9]와 같이, 오차를 추정할 때의 시간의 길이가 관성센서 잡음의 시정수 $1/\sigma_g$ 와

$1/\sigma_a$ 보다 짧다고 가정하여 편차오차는 시간에 대하여 일정하다고 가정한다. 벡터 $G_n \delta P^n$ 의 절대치의 크기정도는 10^{-7} 이고, ω_{ie} 와 f^b 의 크기정도는 각각 10^{-5} 과 10 이다. CDGPS를 사용할 경우 δP^e 와 δV^e 의 크기정도는 각각 0.1 과 0.2이다. ε_a 와 ε_g 의 크기정도는 각각 0.1 과 0.001이다. γ^b 의 크기정도는 0.01로 가정한다. 항체의 속도는 많이 빠르지는 않다고 가정하여 ω_{en}^n 의 크기는 ω_{ie}^n 의 크기보다 크지 않다고 둔다. 그러므로 G_n , 지구의 자전속도 그리고 ω_{en}^n 은 다른 항들과 비교하여 무시할 정도로 작다고 가정할 수 있다. 따라서 (13)-(17) 대신 다음의 간단한 식들을 사용한다.

$$\delta \dot{P}^n = H_n \delta V^n \quad (18)$$

$$\delta \dot{V}^n = -R_n^b F^b \gamma^b + R_n^b \varepsilon_a + R_n^b w_a \quad (19)$$

$$\dot{\gamma}^b = -\Omega_{nb}^b \gamma^b + \varepsilon_g + w_g \quad (20)$$

$$\dot{\varepsilon}_g = w_{gb} \quad (21)$$

$$\dot{\varepsilon}_a = w_{ab} \quad (22)$$

l^b 를 GPS 안테나와 IMU 사이의 레버아암(lever arm)이라 두면, 레버아암의 오차모델은 다음과 같다.

$$\hat{l}^b = l^b + \delta l \quad (23)$$

$$\dot{\delta l} = 0 \quad (24)$$

여기서 δl 은 레버아암 추정오차이다. GPS 안테나의 위치와 GPS측정치들을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$P_a^n = P^n + H_n R_n^b l^b \quad (25)$$

$$P_m^n = P_a^n + v \quad (26)$$

여기서 v 는 GPS 측정잡음이다. 따라서 GPS 측정치의 선형 추정오차는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta P_a^n = (I_3 + H_n) \delta P^n - H_n R_n^b l^b \gamma^b + H_n R_n^b \delta l - v \quad (27)$$

여기서 $\delta P_a^n = \hat{P}_a^n - P_m^n$ 이고 l^b 은 l^b 의 cross product matrix 그리고

$$H_l = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-l_N}{(R_\lambda + h)^2} \\ \frac{l_E \sin \lambda}{(R_\Phi + h) \cos^2 \lambda} & 0 & \frac{-l_E}{(R_\Phi + h)^2 \cos \lambda} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, R_n^b l^b = \begin{bmatrix} l_N \\ l_E \\ l_D \end{bmatrix} \quad (28)$$

이다. 오차전파식과 마찬가지로, GPS 측정치의 추정오차도 다음과 같은 간단한 모델을 사용하여 가관측성 해석에 이용하기로 한다.

$$\delta P_a^n = \delta P^n + H_n R_n^b (-l^b \gamma^b + \delta l) - v \quad (29)$$

본 장에서는 다음 장에서 수행할 가관측성해석을 용이하게 하기 위하여 관성항법장치의 선형오차전파방정식을

MEMS 관성센서에 부합하도록 간략화 하였다. 관성항법장치의 선형오차전파방정식의 간략화 정도는 일반적으로 관성센서의 잡음이나 편차의 크기를 고려하는 것이 합리적이라고 간주된다. 즉, 정밀하지 못한 관성센서를 사용하는 항법장치에 정밀한 오차방정식이 의미가 없듯이, 정밀한 관성센서를 사용하는 항법장치에 지나치게 단순화된 오차전파방정식을 사용하는 것도 불합리하다고 할 수 있다. 예를 들면, (15)에서 위치나 속도 오차항의 크기가 자이로 잡음의 크기보다 상대적으로 크게 작을 경우 이러한 항들을 생략하여도 오차 추정기의 성능에는 크게 영향을 미치지 않을 수 있다. 선정한 선형오차전파방정식모델이 적합한 선택인지는 수치실험으로 확인해 볼 수 있다. 특히, 관성항법시스템을 포함한 추정응용 분야(estimation applications)에서는 칼만필터(Kalman filter)를 이용하여 항법상태의 오차공분산에 대한 수치실험을 많이 수행한다.

III. GPS/INS의 가관측조건

본 장에서는 간편한 GPS/INS의 가관측조건을 제시하고 이것을 간단한 운동에 대하여 적용해본다. 가관측조건을 GPS 측정치에 대한 미분(time derivatives)으로 표현함으로써, 오차상태의 18개 요소에 대한 가관측시험을 자세, 자이로편차, 그리고 레버아암 오차벡터들의 9개의 요소에 대한 시험으로 단순화하였다. 관측불가능한 위치, 속도 그리고 가속도계편차 오차들은 관측불가능한 자세, 자이로편차 및 레버아암 오차들로 표시된다. 본 장에서 사용하는 가관측성 조건은 시변 선형시스템에 적용될 수 있는 순간 가관측성(instant observability)에 관한 것이다.

가관측조건을 제시하기 전에 먼저 시스템의 가관측성에 관한 정의에 대하여 소개한다. 아래와 같은 시변 선형시스템을 고려해보자.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), y(t) = C(t)x(t) \quad (30)$$

여기서 $x(t)$ 와 $y(t)$ 는 각각 $n \times 1$ 과 $p \times 1$ 벡터, $A(t)$ 와 $C(t)$ 는 각각 $n \times n$ 과 $p \times n$ 행렬, 그리고 t 는 시간이다. 시스템 (30)의 가관측 조건은 다음의 행렬과 밀접히 관련되어 있다.

$$O(t) = \begin{bmatrix} N_0(t) \\ N_1(t) \\ \vdots \\ N_{n-1}(t) \end{bmatrix} \quad (31)$$

여기서 $N_0(t), N_1(t), \dots, N_{n-1}(t)$ 은 다음의 식을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} N_{k+1}(t) &= N_k(t)A(t) + \dot{N}_k(t), k = 0, 1, \dots, n-2, \\ N_0(t) &= C(t) \end{aligned} \quad (32)$$

가관측성에 관한 정의는 여러 가지 있지만, 본 논문에서 다루는 시변 시스템에서 유용하게 쓸 수 있는 순간 가관측성에 관하여 소개한다[14] (참고문헌 [15]에서는 순간 가관측성 대신 균일 가관측성(uniform observability)으로 소개됨). 임의의 시각 $t \in (-\infty, \infty)$ 에서 $O(t)$ 의 계수가 n 이면 시스템 (30)은

시각 t 에 순간 가관측하다고 정의한다. 이 때, 시스템의 상태 $x(t)$ 는 $y(t)$ 와 $y(t)$ 의 도함수들(derivatives)로부터 순간적으로 구할 수 있다[15]. 즉,

$$x(t) = (\mathcal{O}^T(t)\mathcal{O}(t))^{-1} \mathcal{O}^T(t)Y(t) \quad (33)$$

여기서

$$Y(t) \triangleq \begin{bmatrix} y(t) \\ \overset{(1)}{y'(t)} \\ \vdots \\ \overset{(n-1)}{y^{(n-1)}(t)} \\ y(t) \end{bmatrix} = \mathcal{O}(t)x(t) \quad (34)$$

만약 시스템 (30)이 시각 t 에 순간 가관측하지 않으면 $\mathcal{O}(t)$ 의 계수가 n 보다 작다. 이러한 경우 $\mathcal{O}(t)$ 의 영공간(null space)을 $\mathcal{N}(t)$ 로 표시하면, $\mathcal{N}(t)$ 는 순간 관측불가능 부분 공간(instantly unobservable subspace)이라고 부른다. 이 시각에서는 $Y(t)$ 로부터 $x(t)$ 의 $\mathcal{N}(t)$ 성분을 구할 수 없다. 또한, (34)로부터 알 수 있듯이 $Y(t)=0$ 을 만족시키는 $x(t)$ 는 $\mathcal{N}(t)$ 에 속한다. 만약 시간 t_0 과 t_1 이 주어졌을 때, 구간 (t_0, t_1) 에 대하여 위의 시스템이 순간 가관측하면, 시스템 (30)은 구간 (t_0, t_1) 에서 순간 가관측하다(instantly observable)고 정의한다. 만약 구간 (t_0, t_1) 에서 $\mathcal{O}(t)$ 의 계수가 n 보다 작고 $\mathcal{N}(t)$ 가 일정하면 시스템 (30)은 구간 (t_0, t_1) 에서 완전 관측불가능(completely unobservable)하며 [15] 구간 (t_0, t_1) 에서의 $y(t)$ 로부터 $x(t_0)$ 의 $\mathcal{N}(t)$ 성분은 결정할 수 가 없다. 따라서 본 논문에서는 시변 시스템의 가관측성 연구에 중요한 역할을 하는 가관측 행렬(observability matrix) (31)의 영공간에 관하여 주로 기술한다.

(18)-(22), (24)와 (29)에서 상태변수와 측정치를 다음과 같이 선정하면

$$x(t) = \left[(\delta P^n(t))^T \quad (\delta V^n(t))^T \quad (\gamma^b(t))^T \quad \varepsilon_g^T \quad \varepsilon_a^T \quad \delta l^T \right]^T \quad (35)$$

$$y(t) = \delta P_a^n(t) \quad (36)$$

항법시스템의 오차에 관한 (30)과 같은 시변 선형시스템을 구성할 수 있으며 여기서 시스템 행렬은 다음과 같다.

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & H_n(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_b^n(t)F^b(t) & 0 & R_b^n(t) & 0 \\ 0 & 0 & -\Omega_{nb}^b(t) & I_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$C(t) = [I_3 \quad 0 \quad -H_n(t)R_b^n(t)L^b \quad 0 \quad 0 \quad H_n(t)R_b^n(t)]$$

지금부터는 간단하게 식들을 표기하기 위하여 변수들을 표기할 때 시간 t 를 생략한다. 예를 들면, $\gamma_b(t)$ 는 γ_b 로 표기한다. 순간 관측불가능한 δP^n , δV^n , γ^b , ε_g , ε_a 그리고 δl

을 각각 δP_u^n , δV_u^n , γ_u^b , ε_{gu} , ε_{au} 그리고 δl_u 로 나타내고, 순간 관측불가능한 δP_a^n 을 δP_{au}^n 으로 두면, GPS 측정치에 대한 순간 가관측조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$d^i (\delta P_{au}^n) / (dt)^i = 0 \quad (38)$$

$i = 0, 1, \dots, n-1$. 아래에서는 간단화 시킨 오차모델 식들 (18)-(22), (24)와 (29)을 (38)에 적용하여 간편한 순간 가관측성 판별조건을 제시한다. 먼저 $i = 0, 1$ 에 대하여 (38)의 조건을 적용하면 다음과 같다.

$$\delta P_u^n + H_n R_b^n (-L^b \gamma_u^b + \delta l_u) = 0 \quad (39)$$

$$H_n \left\{ \delta V_u^n + R_b^n \left[(L^b \Omega_{nb}^b - \Omega_{nb}^b L^b) \gamma_u^b - L^b \varepsilon_{gu} + \Omega_{nb}^b \delta l_u \right] \right\} = 0 \quad (40)$$

여기서 H_n 는 non-singular 행렬이며 시간에 대하여 일정하다고 가정하였다. 따라서 (40)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\delta V_u^n + R_b^n \left[(L^b \Omega_{nb}^b - \Omega_{nb}^b L^b) \gamma_u^b - L^b \varepsilon_{gu} + \Omega_{nb}^b \delta l_u \right] = 0 \quad (41)$$

한편, $i = 2$ 에 대하여 (38)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$R_b^n (c_\gamma \gamma_u^b + c_g \varepsilon_{gu} + \varepsilon_{au} + c_l \delta l_u) = 0 \quad (42)$$

여기서

$$c_g = L^b \Omega_{nb}^b - 2\Omega_{nb}^b L^b \quad (43)$$

$$c_l = (\Omega_{nb}^b)^2 + \dot{\Omega}_{nb}^b \quad (44)$$

$$c_\gamma = -F^b - c_g \Omega_{nb}^b - c_l L^b + L^b \dot{\Omega}_{nb}^b \quad (45)$$

이다. 따라서 δP_u^n , δV_u^n 그리고 ε_{au} 를 다음과 같은 γ_u^b , ε_{gu} 그리고 δl_u 의 조합으로 표현하면, 처음 3개의 가관측 조건식들 (39), (41) 그리고 (42)을 항상 만족시킬 수 있다.

$$\delta P_u^n = H_n R_b^n (L^b \gamma_u^b - \delta l_u) \quad (46)$$

$$\delta V_u^n = R_b^n \left[(\Omega_{nb}^b L^b - L^b \Omega_{nb}^b) \gamma_u^b + L^b \varepsilon_{gu} - \Omega_{nb}^b \delta l_u \right] \quad (47)$$

$$\varepsilon_{au} = -c_\gamma \gamma_u^b - c_g \varepsilon_{gu} - c_l \delta l_u \quad (48)$$

만약

$$\mathcal{M} = c_\gamma \gamma_u^b + c_g \varepsilon_{gu} + \varepsilon_{au} + c_l \delta l_u \quad (49)$$

로 정의하면, $i = 3, 4, \dots, n-1$ 에 대한 가관측 조건 (38)은 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^{i-1} \frac{(i-2)!}{(i-k-1)!(k-1)!} R_b^n^{(i-k)} \mathcal{M} = 0 \quad (50)$$

여기서 R_b^n 은 non-singular이다. 가관측조건 (42)를 고려하면, 위의 식은 다음과 같다.

$$\overset{(i)}{\mathcal{M}} = 0 \quad (51)$$

여기서 $i = 1, 2, \dots, n-3$. 만약 $j = 0, 1, \dots, n-4$ 에 대하여

$$c_{\gamma,j+1} = \dot{c}_{\gamma,j} - c_{\gamma,j} \Omega_{eb}^b, c_{\gamma,0} = c_{\gamma} \quad (52)$$

$$c_{g,j+1} = \dot{c}_{g,j} + c_{\gamma,j}, c_{g,0} = c_g \quad (53)$$

$$c_{l,j+1} = \dot{c}_{l,j}, c_{l,0} = c_l \quad (54)$$

이라고 두면, (51)은 다음과 같다.

$$\overset{(i)}{M} = c_{\gamma,i} \gamma_u^b + c_{g,i} \varepsilon_{gu} + c_{l,i} \delta l_u = 0 \quad (55)$$

따라서 GPS/INS의 가관측성은 $c_{\gamma,i}$, $c_{g,i}$, 그리고 $c_{l,i}$ 에 의하여 결정된다는 것을 알 수 있다. 만약

$$Z_u = \begin{bmatrix} (\gamma_u^b)^T & (\varepsilon_{gu})^T & (\delta l_u)^T \end{bmatrix}^T \quad (56)$$

이라고 두고, (55)를 만족시키는 Z_u 가 오직 영벡터(zero vector)이면 GPS/INS 통합시스템은 가관측하다. 한편, 만약 영벡터가 아닌 Z_u 가 (55)를 만족시키면 GPS/INS 통합시스템은 관측불가능하다. 이 경우, Z_u 와 (46)-(48)에 의하여 δP_u^n , δV_u^n 그리고 ε_{au} 가 결정된다.

위에서 구한 가관측성 판별조건은 시변과 시불변 선형시스템 모두에 적용가능하지만, 가관측성 판별조건은 응용에 관한 이해를 돕기 위하여 간단한 시불변 시스템에 대하여 적용하여 본다. 수평면상에서 등속도 운동을 하는 물체는 가속도와 각속도를 영벡터로 둘 수 있다. 또한, R_b^n 와 f^b 를 시간에 대하여 일정하다고 두면, $i=1,2,\dots,n-3$ 에 대하여 $c_{\gamma,i} = c_{l,i} = 0$ 이고, $i=2,3,\dots,n-3$ 에 대하여 $c_{g,i} = 0$ 이며 $c_{g,1} = -f^b$ 이다. 따라서, 임의의 γ_u^b , δl_u 그리고 f^b 성분의 값만을 가지는 ε_{gu} 에 의하여 결정되는 Z_u 는 가관측 조건(55)를 만족시킨다. 그러므로 이경우의 관측불가능한 공간의 bases는 다음의 행렬의 7개의 열로 이루어진다.

$$Z_b = \begin{bmatrix} I_3 & 0 & 0 \\ 0 & f^b & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \quad (57)$$

항법좌표계를 기준 좌표계로한 오차 선형 전파식의 관측불가능 공간의 bases (57)는 지구중심 지구고정(Earth-Centered Earth-Fixed: ECEF) 좌표계에서 구한 관측불가능한 공간의 bases [16]와 동일함을 알 수 있다.

앞에서 밝혀진 바와 같이, δP_u^n , δV_u^n 그리고 ε_{au} 는 Z_b 에 의하여 결정되며, 위의 운동 조건에 대하여 구해보자. 먼저, $|L^b \gamma_u^b| \ll |\delta l|$ 이라고 가정하면,

$$\delta P_u^n \approx H_n R_b^n \delta l \quad (58)$$

로 근사시킬 수 있다. 또한, $|\omega_{nb}^b| \ll |\varepsilon_{gu}|$ 그리고 $|l^b| \approx 1$ 이라고 가정하면,

$$\delta V_u^n \approx R_b^n L^b \varepsilon_{gu} \quad (59)$$

그리고 $|f^b| \gg |\omega_{nb}^b|, |\dot{\omega}_{nb}^b|$ 이라고 가정하면

$$\varepsilon_{au} \approx F^b \gamma_u^b \quad (60)$$

를 얻을 수 있다. 따라서 비록 γ^b 는 관측불가능하지만, 자세 오차는 무한정 크지는 않고 가속도계 편차오차와 밀접한 관계를 가진다. $\varepsilon_{au} = [(\varepsilon_{au})_x \ (\varepsilon_{au})_y \ (\varepsilon_{au})_z]^T$ 그리고 $\gamma_u^b = [(\gamma_u^b)_x \ (\gamma_u^b)_y \ (\gamma_u^b)_z]^T$ 로 두자. 항체의 z 축과 수직방향향이 일치한다고 가정하면, $f^b \approx g^b$ 이고 f^b 는 수직성분만을 갖는다. 따라서 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$(\gamma_u^b)_x \approx \frac{(\varepsilon_{au})_y}{g}, (\gamma_u^b)_y \approx -\frac{(\varepsilon_{au})_x}{g} \quad (61)$$

여기서 g 는 중력가속도이다. 그러나, f^b 의 수평성분은 무시할 수 있을 정도로 대단히 작기 때문에, $|(\gamma_u^b)_z|$ 는 $|(\gamma_u^b)_x|$ 나 $|(\gamma_u^b)_y|$ 보다 훨씬 크고 $|(\varepsilon_{au})_z|$ 는 $|(\varepsilon_{au})_x|$ 나 $|(\varepsilon_{au})_y|$ 보다 훨씬 작아야 (60)를 만족시킬 수 있다.

IV. 수치 모의

본 장에서는 앞에서 소개한 등속수평운동에 대한 GPS/INS 통합장치의 가관측성 해석결과를 검증하기 위하여 항법오차를 수치모의로 구해보았다. 관성센서의 잡음은 가우시안 화이트 잡음(Gaussian white noise)과 1차 가우스-마르코프 프로세스의 합으로 가정하고, GPS 수신기의 잡음은 가우시안 화이트 잡음으로 가정하여 항법오차를 Extended Kalman filter(EKF)로 추정하였다. 가관측성 특성을 시각적으로 나타내기 위하여 항법오차 추정치의 표준편차(standard deviation: STD)를 그림으로 표시하였다. 수치모의에서는 저급의 (automotive grade) IMU 데이터를 100 Hz로 측정하고 센티미터 단위의 위치오차를 가지는 CDGPS 수신 데이터는 1 Hz로 측정하였음을 가정하였다.

수치모의에 사용된 항법센서의 잡음에 대한 통계치는 다음과 같다: GPS 측정잡음의 STD는 항법좌표계로 [0.06m, 0.06m, 0.08m]이다; 가속도계와 자이로의 편차들과 잡음들은 항체좌표계로 표시된다. 가속도계의 가우시안 화이트 잡음성분의 STD는 0.01m/s^2 이다. 가속도계의 가우시안 마르코프 잡음성분의 제곱평균값(mean square value)은 0.0025m/s^2 이고 시정수는 60초이다. 자이로의 가우시안 화이트 잡음성분의 STD는 0.1%이다. 자이로의 가우시안 마르코프 잡음성분의 제곱평균값은 0.01%이고 시정수는 100초이다. GPS 안테나의 레버아암은 항체좌표계로 [1m, 1m, 1m]이다. 수치모의는 100m/s의 속도로 북쪽으로 등속운동하는 항체에 대하여 20초 동안 행하였다. 초기추정치오차는 위치와 속도가 각각 항법좌표계로 [1m, 1m, 1m]와 [0.1m/s, 0.1m/s, 0.1m/s], 자세오차를 롤, 피치, 요에 대하여 [3°, 3°, 5°], 자이로의 가우시안 마르코프 잡음성분은 항체좌표계로 [0.09%/s, -0.05%/s, -0.1%/s], 가속도계의 가우시안 마르코프 잡음성분은 항체좌표계로 [0.04m/s², -0.05m/s², 0.1m/s²] 그리고 레버아암이 항체좌표계로 [-1m, -1m, -1m]이다. 초기오차공분산행렬은 대각행렬이며 항법오차의

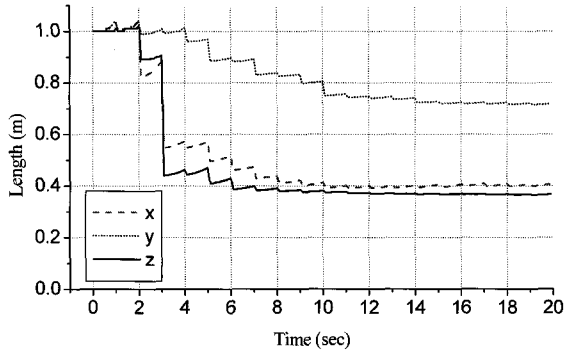


그림 1. 위치 추정오차의 STD.
Fig. 1. STD of position estimation error.

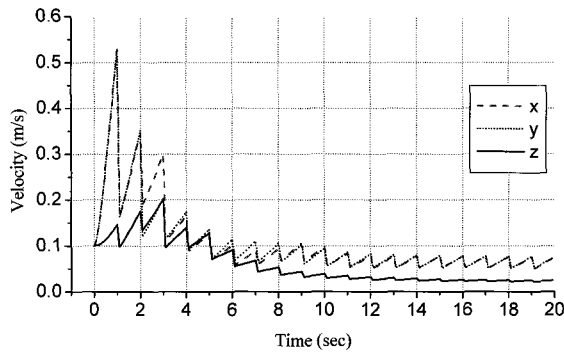


그림 2. 속도 추정오차의 STD.
Fig. 2. STD of velocity estimation error.

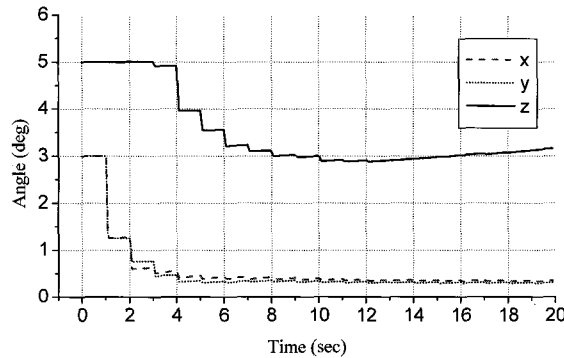


그림 3. 자세 추정오차의 STD.
Fig. 3. STD of attitude estimation error.

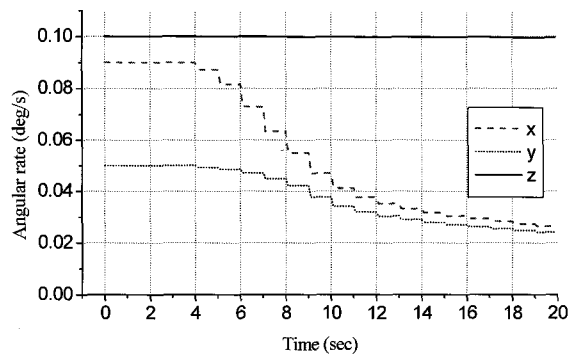


그림 4. 자이로편차 추정오차의 STD.
Fig. 4. STD of gyro bias estimation error.

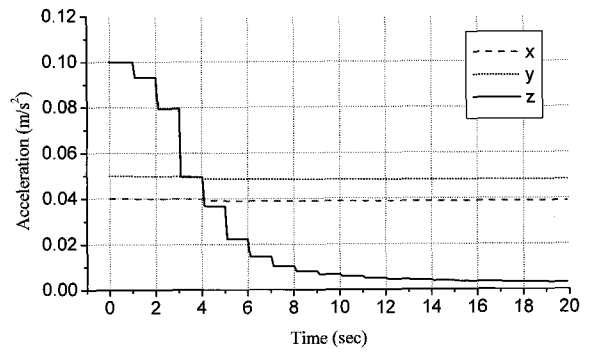


그림 5. 가속도계편차 추정오차의 STD.
Fig. 5. STD of accelerometer bias estimation error.

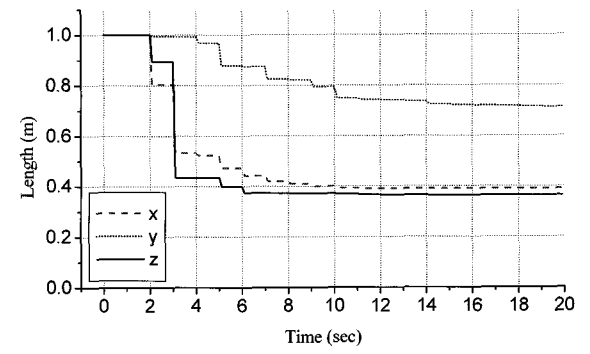


그림 6. 레버아암 추정오차의 STD.
Fig. 6. STD of lever arm estimation error.

초기표준편차는 초기오차의 절대치와 동일하게 하였다.

먼저 앞장의 기관측성 분석에서 사용한 간단한 항법오차 전파모델 (18)-(22), (24) 그리고 측정오차모델 (29)에 기초한 칼만필터를 사용하여 항법 상태변수를 추정하였고, 추정오차의 STD를 그림 1-6에 보였다. 자세, 자이로편차 그리고 레버아암의 추정오차들에 대하여 살펴보자. 수치모의를 시작한지 약 10초 후, 추정오차들은 과도응답이 사라지고 일관된 흐름을 보여준다. 위의 그림들을 이해하는 데에는 앞장의 맨 마지막 부분에서 제시한 기관측성 해석이 도움을 줄 수 있다. 그림 3에서 롤과 피치의 추정오차의 STD는 점진적으로 감소하고 있으며, 가속도계편차 추정오차의 STD를 중력가속도로 나눈 값, 즉 0.05°보다 다소 큰, 약 0.4°를 향하여 수렴하는 과정에 있다고 볼 수 있다. 요의 추정오차의 STD는 롤과 피치의 추정오차들보다 상대적으로 크며 시간이 지남에 따라 증가하고 있다. 요의 추정오차의 STD의 증가율은 자이로편차 추정오차의 수직성분의 STD인 0.1%에 점차 접근함을 알 수 있다. 그림 4에서 자이로편차 추정오차의 수평성분의 STD는 시간이 지남에 따라 감소하지만, 수직성분의 STD는 아주 작게 변함을 볼 수 있다. 즉, 수직성분이 관측불가능함을 보여준다. 또한, 그림 6에서 레버아암의 추정오차는 세 개의 성분 모두 시간이 지나도 일정함을 알 수 있다. 따라서, 레버아암의 세 성분 모두 관측불가능하다고 볼 수 있다. 위치오차의 크기는 약 1m이며 레버아암오차의 크기와 비슷하다. 속도오차의 크기는 약 0.1m/s로 수렴하며 이 값은 (59)에서 보여 주는 근사값 $0.0017 (\approx 0.1 \cdot 3.14 / 180) \text{m/s}$ 보다는 다소 크다.

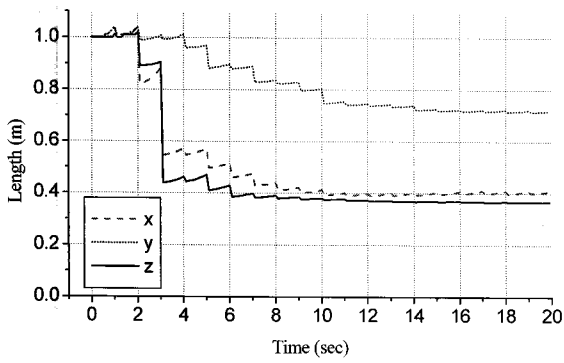


그림 7. 위치 추정오차의 STD.
Fig. 7. STD of position estimation error.

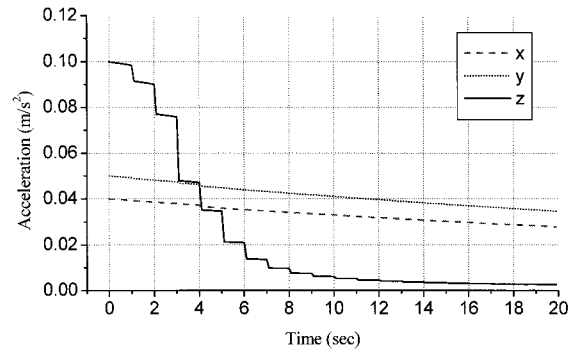


그림 11. 가속도계편차 추정오차의 STD.
Fig. 11. STD of accelerometer bias estimation error.

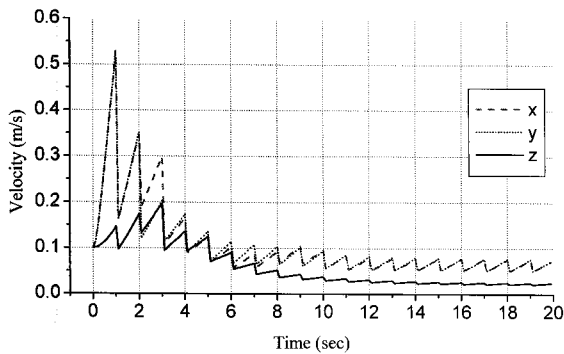


그림 8. 속도 추정오차의 STD.
Fig. 8. STD of velocity estimation error.

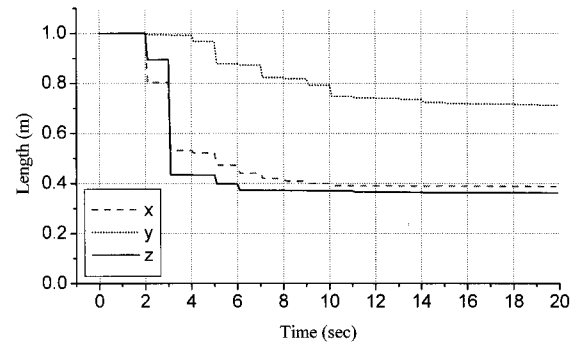


그림 12. 레버아암 추정오차의 STD.
Fig. 12. STD of lever arm estimation error.

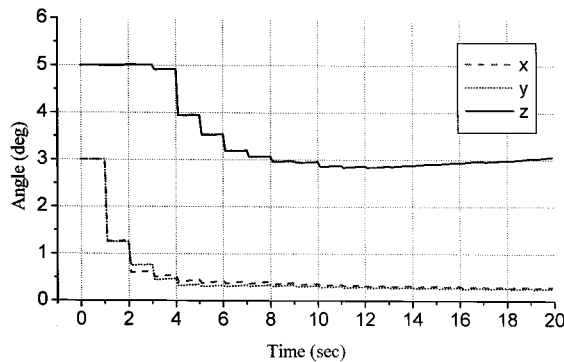


그림 9. 자세 추정오차의 STD.
Fig. 9. STD of attitude estimation error.

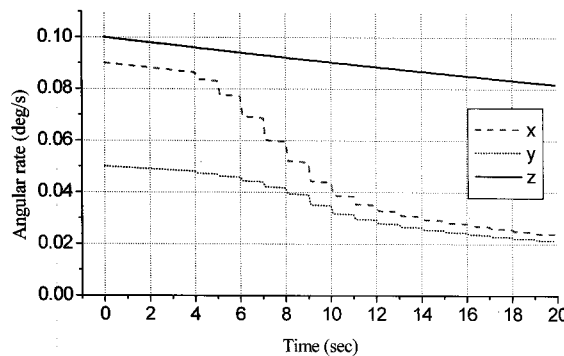


그림 10. 자이로편차 추정오차의 STD.
Fig. 10. STD of gyro bias estimation error.

앞 장의 GPS/INS 통합장치의 가관측성해석에서 관측불가능한 위치, 속도 및 가속도편차 오차들과 관측불가능한 자세, 자이로편차 및 레버아암의 오차들과 관계를 제시하였다. 그러나 그림 14에서 나타난 수치모의의 결과에서 위치, 속도 및 자세의 오차들의 STD는 앞 장의 가관측성해석에 의하여 가속도계 및 자이로의 편차들 및 레버아암의 오차들의 STD로부터 계산한 것들과 비슷하거나 다소 크게 나왔다. 이것의 원인으로는 공정잡음과 측정잡음을 들 수 있다. 앞 장의 가관측성해석에서는 잡음들이 고려되지 않았으며 실제 시스템에서는 이들 잡음에 의하여 오차는 보다 크게 될 수 있다. 따라서, 앞 장에서 얻은 가관측성해석 결과는 가속도계 및 자이로편차 그리고 레버아암의 오차들로부터 위치, 속도 및 자세의 오차들의 하한가를 추정하는데 쓰일 수 있다.

다음으로는, 앞의 항법오차 추정결과와 비교하기 위하여 정밀한 항법오차전파모델 (13)-(17), (24) 그리고 측정오차모델 (27)에 기초한 칼만필터를 사용하여 항법 상태변수를 추정하였고, 추정오차의 STD를 그림 7-12에 보였다. 이 그림들은 앞의 그림 1-6과 비교할 때, 수직성분의 자이로 편차와 수평성분의 가속도계 편차에 대한 추정치를 제외하고는 거의 동일한 결과를 보여준다. 정밀한 오차모델을 사용한 경우에 수직성분의 자이로 편차 추정은 약 20% 그리고 수평성분의 가속도계 편차추정은 약 25% 정도 개선되었음을 알 수 있다. 그림 10에서 수직성분의 자이로 편차의 감소폭은 수평성분들의 것들에 비하여 상대적으로 작은 것을 알 수 있다. 따라서 수직성분의 자이로 편차는 상대적으로 가관측성이 약함

을 알 수 있다. 그림 1-6과 그림 7-12를 비교해 볼 때, 항법오차 추정필터를 설계할 경우에 계산시간을 절약하는 데에 중점을 둘 경우에는 간단한 오차모델을 사용하는 것도 하나의 선택이 될 수 있음을 알 수 있다.

V. 결론

본 논문에서는 낮은 등급의 GPS/INS 통합장치의 가관측성 해석을 위한 간단한 방법을 소개하였다. 항법오차 전파식에서 비교적 작은 크기의 항을 무시함으로써, 18개의 전체 항법오차 상태요소 중에서 9개의 요소들 만에 대한 가관측성 시험으로 전체 요소의 가관측성 시험을 대신하였다. 즉, 자세, 자이로편차 그리고 레버아암의 오차들에 관한 관측성 판별로 전체 항법오차들의 가관측 특성을 결정하였다. 또한, 위치, 속도 그리고 가속도계편차의 관측불가능한 성분들을 자세, 자이로편차 그리고 레버아암의 관측불가능한 성분들로 표현하였다.

본 논문에서 제시한 가관측성 해석방법을 등속수평운동을 하는 항체에 적용하였다. 이 경우, 자세오차의 세 요소, 자이로편차오차의 수직성분 그리고 레버아암오차의 세 요소 등 모두 7개의 요소를 관측불가능하다고 취급할 수 있으며, 관측불가능한 오차상태들 사이의 관계를 간단히 표현하였다. 또한, 위의 운동조건에서 수치모의를 수행하여 해석적 가관측성 분석결과의 타당성을 검증하였다.

본 논문에서 제시한 가관측성해석은 시변과 시불변 운동 모두 적용 가능하지만, 가관측성해석의 간단한 적용사례로 수평등속운동을 고려하였다. 시변시스템은 종류가 다양하고 복잡하므로 이것에 대한 구체적인 상세한 가관측성해석은 미래의 추가연구로 적합할 것으로 사료된다.

참고문헌

[1] B. W. Parkins and J. J. Spilker Jr. (Eds), *Global positioning system: Theory and applications, volume II*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., Washington DC, 1996.
 [2] E. D. Kaplan (Ed.), *Understanding GPS, principles and applications*, Artech House, Boston, 1996.
 [3] J. A. Farrell, T. D. Givargis, and M. J. Barth, "Real-time differential carrier phase GPS-Aided INS," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 8, no. 4, pp. 709-721, 2000.
 [4] 박찬국, 조성윤, 진용, "칼만필터를 사용하는 INS/GPS 결

합시스템에서 측정치 지연에 의한 오차 분석 및 보상," 제어 · 자동화 · 시스템공학회 논문지, 제 6 권 제 11 호, pp. 1039-1044, 2000.
 [5] 이태규, 김광진, 제창해, "INS/GPS 결합 칼만필터의 측정치 스무딩 및 예측," 제어 · 자동화 · 시스템공학회 논문지, 제 7 권 제 11 호, pp. 944-952, 2001.
 [6] 유명중, "INS/GPS를 위한 적응필터 구성," 제어 · 자동화 · 시스템공학회 논문지, 제 11 권 제 8 호, pp. 717-725, 2005.
 [7] 오상현, 이상정, 박찬식, 황동환, "무인비행체용 저가의 ADGPS/INS 통합 항법 시스템," 제어 · 자동화 · 시스템공학회 논문지, 제 11 권 제 7 호, pp. 633-643, 2005.
 [8] S. Hong, M. H. Lee, J. A. Rios, and J. L. Speyer, "Observability analysis of INS with a GPS multi-antenna system," *KSMIE International Journal*, vol. 16, no. 11, pp. 1367-1378, 2002.
 [9] D. Goshen-Meskin and I. Y. Bar-Itzhack, "Observability analysis of piece-wise constant systems-Part II: Application to inertial navigation In-flight alignment," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 28, no. 4, pp. 1068-1075, 1992.
 [10] Y. F. Jiang and Y. P. Lin, "Error estimation of INS ground alignment through observability analysis," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 28, no. 1, pp. 92-97, 1992.
 [11] J. A. Farrell and M. Barth, *The Global positioning system & inertial navigation*, The McGraw-Hill Companies, Inc., New York, 1999.
 [12] M. Shibata, "Error analysis strapdown inertial navigation using quaternions," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 9, no. 3, pp. 379-381, 1986.
 [13] K. R. Britting, *Inertial Navigation System Analysis*, Wiley-Interscience, New York, 1971.
 [14] C. T. Chen, *Linear System Theory and design*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1984.
 [15] L. M. Silverman and H. E. Meadows, "Controllability and observability in time-variable linear systems," *Journal of SIAM Control*, vol. 5, no. 1, pp. 64-73, 1967.
 [16] S. Hong, M. H. Lee, H. H. Chun, S. H. Kwon, and J. L. Speyer, "Observability of error states in GPS/INS integration," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 54, no. 2, pp. 731-743, 2005.

명명법(Nomenclature)

P^a	a 좌표계를 기준으로 성분을 표시한 벡터 P	R_a^b	a 좌표계에서 b 좌표계로 변환하는 좌표변환 행렬
ω_{ab}^c	b 좌표계의 a 좌표계에 대한 각속도벡터로서 c 좌표계로 표시됨	Ω_{ab}^c	ω_{ab}^c 의 반대칭행렬 (skew symmetric matrix)
\hat{M}	M 의 추정치	δM	M 의 추정오차
\dot{M}	M 의 시간에 대한 미분	M^T	M 의 전치(transpose)
$ P $	P 의 절대치	$a \times b$	벡터 a 와 b 의 외적 (cross product)
${}^{(i)}A(t)$	행렬 $A(t)$ 의 i 차 시간미분 즉, ${}^{(i)}A(t) \triangleq \left(\frac{d^i}{(dt)^i} A(t) \right)$	I_n	$n \times n$ 단위행렬 (identity matrix)

0	영행렬(zero matrix)이며, 차원은 문맥상으로 결정됨	λ	위도
Φ	경도	h	고도

좌표계

i	지구중심관성(earth-centered inertial: ECI) 좌표계	e	지구중심 지구고정(earth-centered earth-fixed: ECEF) 좌표계
n	항법(navigation or geographic: north, east, down) 좌표계	b	항체(body: forward, right, down) 좌표계



홍 신 표

1982년 부산대학교 기계공학과(공학사).
 1985년 한국과학기술원 기계공학과(공학석사).
 1993 University of California, Los Angeles(공학박사).
 현재 (주)지엠비 책임연구원. 관심분야는 GPS/INS 통합 항법 시스템 분석 및 응용.