

망원경의 자동추적장치를 위한 이산시간 동적모델 분석

이준화

서울시립대학교 전자전기컴퓨터 공학부

DISCRETE TIME DYNAMIC MODEL FOR TELESCOPE AUTO-GUIDING SYSTEM

Joon Hwa Lee

School of Electrical and Computer Engineering University of Seoul, Seoul 130-743, Korea

E-mail: joonhwa@uos.ac.kr

(Received October 15, 2007; Accepted November 27, 2007)

요 약

천체의 장시간 노출을 위한 망원경 자동추적장치는 CCD 카메라의 영상 관측결과를 피드백하여 제어한다. 그러나 대기 시상효과에 의해 영상 관측의 정확도가 변하면 제어의 정확도도 달라진다. 본 연구에서는 제어공학에서 사용하는 이산시간 동적 이론을 적용하여 자동추적장치의 효율을 극대화 할 수 있는 이론을 개발하였다. 망원경의 추적장치에 기계적인 오차가 있는 경우, CCD 카메라의 영상 관측결과에 나타나는 대기시상 효과를 구체적으로 모델링한 후, 제안된 성능지표에 주는 영향을 수식적으로 유도하고 분석하였다. 그리고 기계적인 오차와 대기시상 값의 이론적인 상관관계를 실제 관측 실험을 수행하여 검증하였다.

ABSTRACT

In the auto-guiding system for obtaining a long exposure astrophotography, CCD camera is usually used for measuring guide errors which are affected by optical dispersion and mechanical disturbances. In this paper, a discrete time dynamic model and a performance index are proposed for analysing the auto-guiding system. The optimal gain for proportional control is derived considering the optical dispersion and the disturbances. Some experiments are provided to illustrate that the optimal control gain is lower as the optical dispersion is higher.

Keywords: telescope, tracking control, CCD camera, automatic control system, instrumentation

1. 서 론

지상에서 광학 및 적외선 망원경(조승현 외 2006)을 사용하여 어두운 천체를 관측하려면 망원경이 천체를 장시간 추적해야 한다. 망원경을 움직이기 위한 구동장치로는 전기적인 모터와 웜 기어 등의 기계적인 부품이 사용된다. 기계적인 부품들은 가공 오차가 존재하고 따라서 구동장치가 회전하는데 어느 정도의 회전 오차가 발생하게 된다. 또한 바람 또는 대기의 산란 등 외부적인 요인에 의해서 망원경이 관측대상을 정확히 추적하지 못하고 추적오차(tracking error)가 발생하게 된다.

여러 가지 요인에 의해 발생하는 추적오차를 감소시키기 위해서는, 오차를 감지하고 이에 맞는 보정을 해주어야 한다. 추적오차를 감지하는 도구로는 회전검출기(rotary encoder) 및 CCD(Charge Coupled Device) 센서가 많이 사용되며 감지된 추적오차를 이용하여 구동모터를 적절히 제어하면 추적오차를 줄일 수 있다.

CCD 카메라를 추적오차 검출기로 사용하기 이전부터 적도의 추적제어기(tracking controller)에 관한 연구들이 발표되었다(Richard & Louis 1967). 많은 연구들이 적도의 등에 기계적으로 결합되어 설치된 회전검출기를 이용하여 PID 제어기(문병식 외 2006) 및 LQG(linear quadratic gaussian) 제어기(Wodek 2007) 등을 사용하여 추적제어 시스템을 구성하고 성능을 분석하였다. 같은 필터를 사용하여 회전 검출기의 오차를 줄이는 연구도 발표되었다(Yaguang et al. 2002).

천문대급 대형 망원경의 경우에는 위에 살펴본 연구결과와 같이 회전검출기를 사용하여 기계적인 회전오차를 감소시키고, CCD 카메라 및 동작속도가 빠른 Tip-Tilt 또는 적응광학(adaptive optics)장치를 사용하여 광학적인 오차요인을 제거하는 경우가 많다. 그러나, 중소형 망원경을 사용하는 경우에는 Tip-Tilt 또는 적응광학 장치를 사용하기가 현실적으로 어려우며 많은 경우에 CCD 카메라를 광학 및 기계적인 요인에 의한 오차 검출기로 사용하여 제어시스템을 구성하고 있다.

CCD 카메라를 사용한 망원경의 추적제어는 15년 전부터 연구되었으며, 국내에서도 CCD 카메라를 사용하여 망원경의 추적제어를 해오고 있다(윤요나 외 2006, 정용섭 외 1999). 또한 상용의 CCD 카메라를 사용하여 망원경의 추적제어가 가능하게 하는 프로그램도 판매되고 있다. 상용의 프로그램을 사용하여 망원경 제어시스템을 구성하는 경우, 사용자가 적당한 값으로 제어기의 이득을 설정하여 사용할 수 있도록 되어 있다.

CCD 카메라를 사용하여 제어시스템을 구성하는 경우, 전체 시스템의 안정도가 유지되는 범위에서는 어떠한 제어이득의 값을 사용해도 추적제어는 가능하지만, 제어이득의 값에 따라 얻어지는 관측영상의 질이 다르게 된다. 관측영상의 질은 추적오차가 작을수록 좋아지므로, 여러 가지 오차요인이 추적오차에 주는 영향을 작게 할수록 좋은 관측영상을 얻게 된다.

이 연구에서는 여러 가지 오차요인들이 추적오차에 미치는 복합적인 영향을 구체적으로 분석하였다. 이러한 분석을 위하여 먼저, 추적오차 값을 사용하여 추적제어 시스템의 성능지표를 제안하고, CCD 카메라를 추적오차 검출기로 사용하는 망원경 및 적도의 제어시스템을 이산시간 시스템(discrete time system)으로 모델링 하였다. 또한, 기계적인 오차요인 및 광학적인 오차요인들을 분석하여 모델링하고 이러한 오차요인들이 시스템을 통하여 추적오차에 주는 영향을 구체적으로 유도하였다. 이러한 분석결과를 바탕으로 비례제어기의 경우 제어이득의 변화에 따라 각각의 오차요인이 추적오차에 주는 영향을 분석하여 최적의 제어이득 값이 어떻게 결정될 수 있는지 알아보았으며, 실험을 통하여 연구내용이 타당함을 검증하였다.

2. 시스템 모델링

2.1 천체 망원경 제어시스템의 구성

이 연구는 천체의 추적이 간단한 적도의를 목표로 하였다. 적도의는 적위 축과 적경 축이 독립적으로 구동되며, 두 축에 대한 제어시스템의 구성은 각각 그림 1과 같다. 주기오차는 천구의 회전과 동일하게 계속 회전하는 적경 축의 경우에만 나타나며, 적위축의 경우에는 주기오차가 나타나지 않

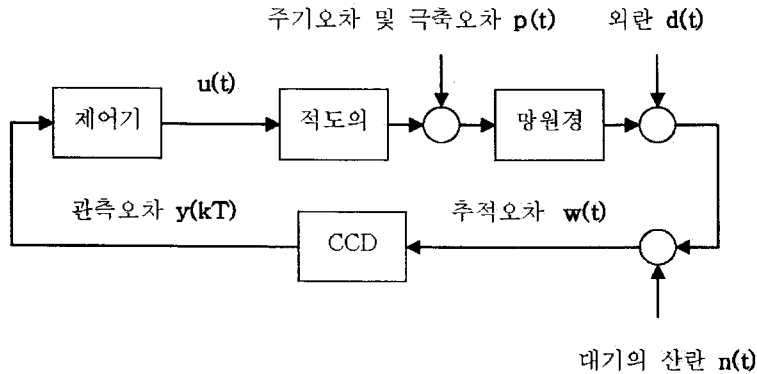


그림 1. 천체 망원경 제어시스템의 구성도.

을 뿐, 시스템의 구성은 적경 축과 동일하게 된다.

망원경은 적도의에 연결되어 있으며 적도의가 향하는 방향의 영상을 받아서 CCD 카메라에 보내 주고 CCD 카메라는 추적오차를 검출하여 제어기에 보내준다. 그림 1에서 $w(t)$ 는 연속적인 추적 오차 값을 의미하며, 추적오차가 없는 경우 $w(t)$ 값은 0이다.

CCD 카메라로 영상을 얻어 추적오차를 검출하기 위해서는 일정시간 노출을 주어야 한다. 이러한 노출시간은 추적오차를 검출하는데 사용되는 별의 밝기와 망원경의 종류 및 형식 등 여러 가지 요인에 의해 결정된다. 노출 시간이 T 라면 CCD 카메라는 T 의 시간 간격으로 추적오차 신호 $y(kT)$ 를 제어기에 보내주게 된다. 제어기는 센서로부터 주기적으로 보내지는 오차신호를 이용하여 적절한 제어신호 $u(t)$ 를 발생시켜 적도의에 보내준다. 이때 제어신호 $u(t)$ 는 CCD센서가 새로운 오차신호를 보내주기 전까지 일정한 값을 갖게 된다.

적경 축 구동 모터의 경우, 제어신호가 0인 경우에도 천구의 회전과 동일하게 회전할 수 있도록 일정한 속도로 모터가 회전하게 되며, 모터에 인가되는 제어신호에 따라서 모터의 속도가 증가되거나 감소된다. 적위 축 구동 모터의 경우, 제어신호가 0인 경우 모터는 정지하고, 0 이외의 제어신호에 대해서는 모터가 정 방향 또는 역 방향으로 회전하게 된다.

2.2 추적오차의 발생원인과 성질

추적오차를 발생시키는 요인은 크게 3가지로 분류된다. 첫째는 적도의 및 망원경의 기계적인 정밀도 한계 및 불안정성에 의해 발생하는 것으로, 주로 주기오차(periodic error)와 극축오차가 여기에 해당한다. 둘째는 적도의 및 망원경의 외부에서 가해지는 바람 또는 기계적인 불안정성 의해서 발생하는 외란(disturbance)이다. 셋째는 별빛이 대기층을 통과하면서 산란되어 발생하는 광학적인 요인이다.

기계적인 원인 중 주기오차 $\delta_0(t)$ 는 적경축의 경우에만 나타나며, 모터의 회전을 적도의로 전달하는데 사용되는 웜기어의 가공오차에 의해 주기적으로 발생하며 식 (1)과 같이 근사적으로 표현할 수 있다.

$$\delta_0(t) = p_0 \sin(2\pi t/T_p) \quad (1)$$

여기에서 p_0 는 주기오차의 최대 크기 이고, T_p 는 주기오차가 나타나는 주기 값이다. 적도의에 따라서 주기 T_p 및 p_0 는 다른 값을 갖는다. 예를 들어 Meade사 제품인 LX200 적도의 경우 읽기여가 1회 전하는 시간인 4분의 주기를 가지며, 주기오차 p_0 크기는 25arcsec이다(윤요나 외 2006). 정상상태에서 천구의 회전과 동일한 속도로 회전하는 적경 축과는 달리 적위 축의 경우에는 주기오차가 나타나지 않는다. 극축의 불일치에 의해서 발생하는 극축오차 $\delta_1(t)$ 는 24시간의 주기를 갖게 되며 따라서 식 (2)와 같이 표현할 수 있다.

$$\delta_1(t) = p_1 \sin(2\pi t/T_a) \quad (2)$$

여기에서 T_a 값은 24시간이고, p_1 값은 극축오차의 크기에 따라서 달라지며, 극축을 정확히 맞추는 경우 0의 값을 갖게 되지만, 이동용 중소형 적도의 경우 극축을 정확히 맞추기 어렵기 때문에 0보다 큰 값을 갖게 된다. 극축오차의 경우에는 적위 축과 적경 축 방향 모두에 나타날 수 있다.

망원경에 부는 바람이나 편심오차 등 기타 모델링 되지 못한 기계적인 요인들에 의해서 발생하는 오차 $d(t)$ 는 펄스형태의 오차신호로 나타난다. 실제로 LX200 마운트의 주기오차를 측정된 자료(윤요나 외 2006)를 보면 식 (1)과 같은 정현파에 불규칙적인 펄스들이 추가되어 있는 형태임을 알 수 있다. 실험에 사용된 마운트의 경우에도 오차의 크기나 주기는 다르지만, 비슷한 형태의 주기오차를 관측할 수 있었다.

별빛이 대기를 통과하면서 산란되어 일어나는 광학적인 오차 $n(t)$ 는 주기오차에 비해 상대적으로 빠르게 변하는 오차신호들이다. 관측지의 시상에 따라서 다른 값을 갖게 되고, 오차신호를 검출하는 CCD의 노출시간에 비해서도 상대적으로 빠르고 불규칙적이다.

실험에 사용된 이동용 중소형 적도의에 망원경과 CCD 카메라를 부착하고, 추적제어를 하지 않는 상태에서 적경 및 적위 축의 추적오차를 실제로 측정하면 극축오차의 영향으로 적경 및 적위 축의 오차 값은 시간에 따라 증가하고, 적경방향의 경우 주기오차의 영향으로 오차의 크기가 커짐과 작아짐을 반복하는 것을 알 수 있다.

극축오차만 나타나는 적위축의 경우를 보면, 광학적인 오차는 불규칙하고 빠르게 변하는 특징을 가지며, 광학적 오차를 푸리에 변화해보면 광학적 오차는 전 주파수 대역에서 고른 에너지 분포를 갖고 평균값이 0인 백색잡음(white noise)과 유사한 확률적인 신호(stochastic signal)로 생각할 수 있다.

2.3 이산시간 전달함수 모델

오차 검출용 CCD 카메라는 망원경을 이용하여 기준이 되는 별의 영상을 주기적으로 촬영하고, 촬영된 별의 위치가 중심으로부터 벗어난 정도를 계산함으로써 추적오차를 검출하게 된다. CCD 카메라로 기준별의 영상을 얻기 위해서는 일정한 노출시간이 필요하고, 따라서 제어시스템은 오차 검출용 CCD 카메라의 노출시간에 맞추어 일정한 제어주기를 갖는 이산시간 제어시스템으로 구성된다.

오차 검출용 CCD 카메라는 일정한 노출시간 동안 망원경으로부터 입력되는 영상 신호를 누적하는 장치이다. T 를 노출시간 및 제어주기라고 하자. 오차 검출용 CCD 카메라가 kT 시점에 제어기로 보내주는 오차신호 $y(kT)$ 값은 $(k-1)T$ 시점부터 kT 시점까지의 연속적인 오차신호 $w(t)$ 를 평균

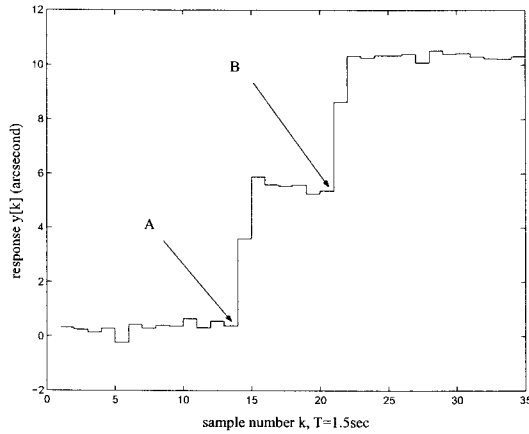


그림 2. 제어를 사용하지 않은 상태의 망원경의 계단입력 응답(적경축).

해서 얻는 신호로서 식 (3)과 같다.

$$y(kT) = \frac{1}{T} \int_{(k-1)T}^{kT} w(\tau) d\tau \tag{3}$$

따라서 식 (3)과 같이 적분으로 표현 되는 $y(kT)$ 값은 $w((k-1)T)$ 와 $w(kT)$ 를 사용하여 식 (4)와 같이 근사적으로 표현할 수 있다.

$$y(kT) \approx \frac{w((k-1)T) + w(kT)}{2} \tag{4}$$

따라서 식 (4)의 우변을 z-변환(z-Transform) 하면, 오차검출용 CCD 카메라의 전달함수 $G_{ccd}(z)$ 는 식 (5)와 같이 나타낼 수 있다.

$$G_{ccd}(z) = \frac{1}{2} \frac{z+1}{z} \tag{5}$$

망원경은 기계적인 장치로서 고유진동수(Natural Frequency) w_n 및 제동상수(Damping Constant) ζ 를 갖는 동적인 시스템(Dynamic System)으로 식 (6)과 같이 모델링 될 수 있다.

$$G_{telescope}(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{w_n}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{s}{w_n}\right) + 1} \tag{6}$$

이러한 시스템을 제어주기가 T 인 쌍선형 변환 (Bilinear Transform)에 의해 이산시간 시스템으로 변환시키면 다음과 같다.

$$G_{telescope}(z) = \frac{1}{\left(\frac{2}{w_n T}\right)^2 \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{2}{w_n T}\right) \left(\frac{z-1}{z+1}\right) + 1} \tag{7}$$

따라서, 고유진동수 w_n 이 충분히 커서 $w_n \gg \frac{1}{T}$ 를 만족하는 경우, 식 (7)은 $G_{telescope}(z) \approx 1$ 로 근사된다. 실제로 실험에 사용된 망원경에 적도의를 통하여 계단입력을 인가하고 망원경의 응답을 CCD 카메라로 실측한 결과는 그림 2와 같다.

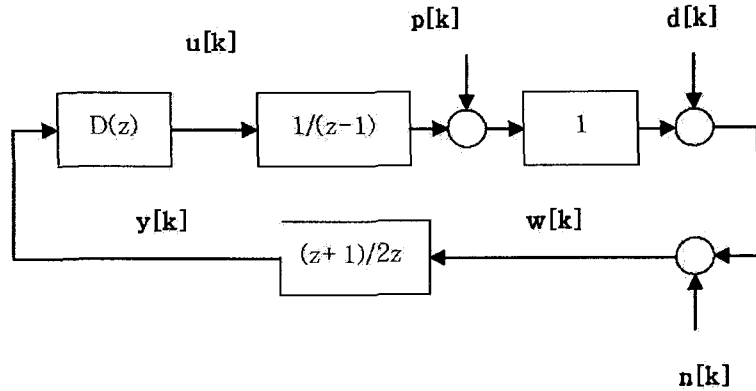


그림 3. 천체 망원경 제어시스템의 이산시간 시스템 표현.

그림 2의 A와 B 시점에 크기가 5 및 10인 계단 입력을 인가하고 CCD 카메라로 기준별의 위치를 측정 한 결과이다. 식 (5)의 전달함수로 주어지는 CCD 카메라의 시간지연 효과 때문에 2스텝 이후에 스텝 입력에 대응하는 출력이 바로 나타나고, 진동형태의 과도 특성은 나타나지 않는 것을 알 수 있다. 즉, 실험에 사용된 망원경의 경우 망원경의 전달함수는 1로 근사될 수 있음을 알 수 있다.

이 연구에서는 실험에 사용된 시스템과 같이 제어주기에 비해 상대적으로 빠른 응답을 갖고 있어서 망원경 및 적도의의 동적특성을 모델링에 반영하지 않아도 큰 문제가 없는 경우를 가정한다. 이러한 가정을 하는 경우 적도의는 제어 입력의 크기에 비례하는 모터의 속도가 누적되어 각도가 변화되는 단순한 적분기로 생각할 수 있고, 망원경은 적도의의 움직임을 그대로 반영하는 시스템으로 생각할 수 있다.

즉, 제어기의 출력 $u(t)$ 는 한 제어주기 ($kT, (k+1)T$) 동안 일정한 값, $u(kT)$ 값을 유지하고 적도의는 이 값을 한 제어주기 동안 적분하는 시스템으로 생각할 수 있고, 따라서 적도의의 전달함수 $G_{mount}(z)$ 는 식 (8)과 같다.

$$G_{mount}(z) = \frac{T}{z-1} \tag{8}$$

지금까지의 분석을 정리하면, 천체망원경의 제어시스템은 그림 3과 같은 이산시간 시스템으로 표현할 수 있다. 그림 3에서 $p[k]$ 는 $t = kT$ 시점의 $p(t)$ 값, 즉 $p(kT)$ 값을 의미하고, $d[k], n[k], w[k]$ 및 $y[k]$ 도 마찬가지로이다. 이렇게 얻어지는 이산신호(Discrete Time Signal)들의 z-변환(z-transform)을 $p[z], d[z], n[z], w[z], y[z]$ 이라 하자.

기계적인 오차 $p(t)$ 는 식 (1)의 주기오차 $\delta_0(t)$ 와 식 (2)의 극축오차 $\delta_1(t)$ 의 합으로 식 (9)와 같다.

$$p(t) = p_0 \sin(2\pi t/T_p) + p_1 \sin(2\pi t/T_a) \tag{9}$$

따라서 $p[k]$ 는 식 (10)과 같다.

$$p[k] = p_0 \sin(k(2\pi T/T_p)) + p_1 \sin(k(2\pi T/T_a)) \tag{10}$$

식 (10)에 대응하는 z-변환 $p(z)$ 는 식 (11)과 같이 구해진다.

$$p(z) = p_0 \frac{\sin(2\pi T/T_p)z}{z^2 - 2 \cos(2\pi T/T_p)z + 1} + p_1 \frac{\sin(2\pi T/T_a)z}{z^2 - 2 \cos(2\pi T/T_a)z + 1} \tag{11}$$

식 (11)에서 제어주기 T 에 비해서 주기오차의 주기 T_p 및 극축오차의 주기 T_a 값이 큰 경우, 즉, $T/T_p, T/T_a \ll 1$ 을 만족하는 경우, $\cos(2\pi T/T_p)$ 와 $\cos(2\pi T/T_a)$ 는 1로 근사되고, $\sin(2\pi T/T_p)$ 와 $\sin(2\pi T/T_a)$ 값은 $2\pi T/T_p$ 와 $2\pi T/T_a$ 로 근사 할 수 있다. 따라서 $p(z)$ 는 식 (12)와 같이 근사적으로 나타낼 수 있다.

$$p(z) \approx T \left(\frac{2\pi p_0}{T_p} + \frac{2\pi p_1}{T_a} \right) \frac{z}{(z-1)^2} \quad (12)$$

그림 3로부터 오차요인들 $p(z), d(z), n(z)$ 에서 추적오차 $y(z)$ 로 가는 전달함수 $G(z)$ 는 식 (13)과 같이 주어진다.

$$G(z) = \frac{\frac{z+1}{2z}}{1 - D(z) \frac{T(z+1)}{2z(z-1)}} = \frac{z^2 - 1}{2z^2 - 2z - TD(z)(z+1)} \quad (13)$$

식 (13)에서 $D(z)$ 는 제어기의 전달함수를 의미한다. 식 (13)의 전달함수를 사용하여 $y(z)$ 는 다음과 같이 표현 된다.

$$y(z) = G(z)[p(z) + d(z) + n(z)] \quad (14)$$

3. 제어기 설계

3.1 제어목적 및 오차요인의 영향 분석

천체망원경 제어의 목적은 관측용 CCD에 흔들리지 않는 정지된 영상이 맺히도록 하는 것이다. 즉, 그림 3의 시스템에서 추적오차 검출기의 $y[k]$ 값을 모든 시점에서 가능한 작게 하는 것이 제어목적이 된다.

추적오차를 발생시키는 원인 중 주기오차 및 추적오차인 $p[k]$ 와 광학적인 오차인 $n[k]$ 는 지속적으로 존재하는 파워신호(power signal)이고, 망원경에 부는 바람과 같은 외란 $d[k]$ 는 $p[k]$ 및 $n[k]$ 와 무관하게 불규칙적으로 발생하고, 지속시간도 일정하지 않지만 유한한 에너지를 갖는 신호이다. 세 가지 오차의 원인들은 서로 독립적으로 발생하므로 각각의 오차원인이 추적오차에 주는 영향을 각각 살펴본다.

먼저 광학적 오차신호 $n[k]$ 는 확률적 신호로 생각할 수 있으므로 이의 영향을 받아 나타나는 추적오차 신호 $y[k]$ 또한 확률적 신호가 된다. 이때 확률적 신호 $y[k]$ 의 크기를 작게 한다는 것은 기대치 $E\{y[k]^2\}$ 값을 작게 한다는 것이다.

$n[k]$ 를 평균값이 0인 백색잡음으로 가정하면 $n[k]$ 의 파워스펙트럼 $S_{nn}(w)$ 은 모든 주파수에서 같은 값을 갖게 되고, $S_{nn}(w) = N_0$ 의 형태로 주어진다. 따라서 기대치 $E\{y[k]^2\}$ 는 식 (15)와 같이 얻어진다.

$$E\{y[k]^2\} = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} |G(e^{jwT})|^2 N_0 dw \quad (15)$$

따라서 복소함수 $G(z)$ 의 H_2 -norm(Kemin et al. 1996)을 사용하면 식 (15)로 주어지는 광학적 오차요인의 영향 E_o 는 식 (16)과 같이 표현할 수 있다.

$$E_o = N_0 \|G(z)\|_2^2 \quad (16)$$

유한한 에너지를 갖는 외란 $d[k]$ 의 영향을 줄여준다는 것은 $d[k]$ 에 의한 추적오차 $y[k]$ 의 에너지를 최소화 한다는 의미이고 $y[k]$ 의 에너지는 $(\|y(z)\|_2)^2$ 로 주어지므로, $y(z) = G(z)d(z)$ 의 관계로부터

터 외란의 영향 E_d 는 식 (17)과 같다.

$$E_d = \|G(z)d(z)\|_2^2 \quad (17)$$

외란은 불규칙적으로 나타나는 적당한 크기의 계단신호들의 합으로 표현이 가능한데, 크기가 δ 인 계단 형태의 외란이 발생하는 경우 외란 $d(z)$ 는 식 (18)과 같이 표현된다.

$$d(z) = \delta \frac{z}{z-1} \quad (18)$$

식 (17)로부터, 식 (18)로 주어지는 외란의 영향은 식 (19)와 같이 구해진다.

$$E_d = \delta^2 \|G(z) \frac{z}{z-1}\|_2^2 \quad (19)$$

계단형태의 외란이 불규칙하게 반복적으로 발생하는 경우, 식 (19)로 주어지는 영향을 모두 더하면 전체 외란에 의한 영향을 계산할 수 있게 된다.

기계적인 오차신호 $p[k]$ 는 지속적으로 존재하는 신호이고, 식 (12)와 같이 기울기(Ramp) 신호로 표현된다. 이러한 신호에 대한 응답 $y[k]$ 의 크기를 작게 한다는 것은 정상상태(Steady State)에서의 $y[k]$ 의 값을 작게 한다는 것이다. 이때 $y[k]$ 의 정상상태 값 y_{ss} 는 식 (20)과 같이 구해진다.

$$y_{ss} = \lim_{k \rightarrow \infty} y[k] = \lim_{z \rightarrow 1} G(z)p(z) \frac{z-1}{z} = \lim_{z \rightarrow 1} A_0 G(z) \frac{1}{z-1} \quad (20)$$

식 (20)에서 상수 A_0 는 식 (12)로부터 다음 식 (21) 같이 주어지는 상수이다.

$$A_0 = T \left(\frac{2\pi p_0}{T_p} + \frac{2\pi p_1}{T_a} \right) \quad (21)$$

3.2 비례 제어기

여러 가지 오차요인의 영향을 최소화하는 제어기로 다음과 같은 비례 제어기를 생각한다.

$$D(z) = -K \quad (22)$$

식 (22)에서 $D(z)$ 는 제어기의 전달함수이고 K 는 양의 실수로서, 식 (22)와 같은 비례제어기의 출력은 오차신호에 $-K$ 를 곱하여 얻어진다. 식 (22)의 비례제어기를 사용하는 경우 전달함수 $G(z)$ 은 식 (23)과 같이 주어진다.

$$G(z) = \frac{z^2 - 1}{2z^2 + (KT - 2)z + KT} \quad (23)$$

시스템이 안정되기 위해서는 식 (23)으로 주어지는 전달함수 $G(z)$ 의 모든 극점(pole)이 복소평면 상의 단위원 안에 있어야 한다. 이러한 조건을 만족하는 제어이득 K 의 범위를 계산하면 $0 < K < \frac{2}{T}$ 와 같은 안정도 조건을 얻게 된다.

주기오차와 같이 정현파형태의 오차요인에 의한 추적오차의 크기를 작게 하기 위해서는 식 (20)으로 주어지는 정상상태 오차 y_{ss} 를 작게 하여야 한다. 제어이득이 K 일 때 정상상태 오차는 식 (24)와 같이 구해진다.

$$y_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} A_0 G(z) \frac{1}{z-1} = \frac{A_0}{KT} \quad (24)$$

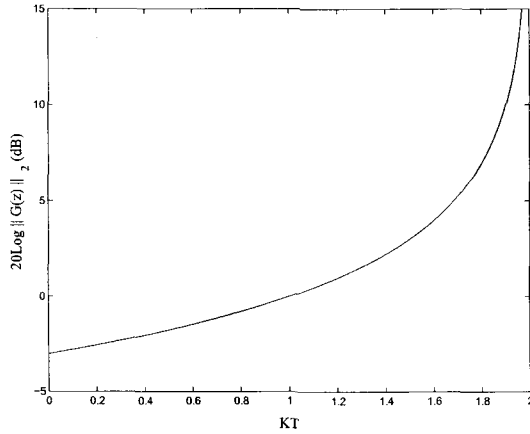


그림 4. KT 의 변화에 따른 $\|G(z)\|_2$ 값의 변화.

식 (21)로 주어지는 A_0 값을 사용하면 y_{ss} 는 식 (25)와 같이 얻어진다.

$$y_{ss} = \frac{A_0}{KT} = \frac{2\pi p_0}{KT_p} + \frac{2\pi p_1}{KT_a} \quad (25)$$

따라서 정현파형태의 주기적인 오차요인에 의한 영향을 줄이기 위해서는 제어이득 K 값을 가능한 크게 해야 함을 알 수 있다. 예를 들어 주기오차의 크기 p_0 는 가 2.5arcsec 이고, T_p 는 360sec 라고 하고, 극축이 정확히 맞는 경우, 즉 $p_1 = 0$ 을 가정하면 정상상태 오차 y_{ss} 는 식 (26)과 같이 계산된다.

$$y_{ss} = \frac{0.0436}{K}(\text{arcsec}) \quad (26)$$

대기의 산란이 추적오차에 주는 영향은 식 (16)으로 주어지므로, $\|G(z)\|_2$ 값을 작게 할수록 광학적인 요인의 영향은 줄어든다. $\|G(z)\|_2$ 값을 구하기 위하여 식 (23)으로 주어지는 전달함수를 다음 식 (27)과 같이 상태변수 모델로 변환한다.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bn(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Dn(k) \end{aligned} \quad (27)$$

식 (27)에서 각 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -KT/2 & 1 - KT/2 \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} \\ C &= [-(KT/2 + 1) \quad -(KT/2 - 1)], & D &= 1/2 \end{aligned} \quad (28)$$

식 (29)의 Lyapunov 행렬 방정식(Kemin et al. 1996)의 해를 L 이라고 하면

$$ALA^T - L + BB^T = 0 \quad (29)$$

전달함수 $G(z)$ 의 H_2 -norm, $\|G(z)\|_2^2$ 값은 식 (30)과 같이 구할 수 있다(Kemin et al. 1996).

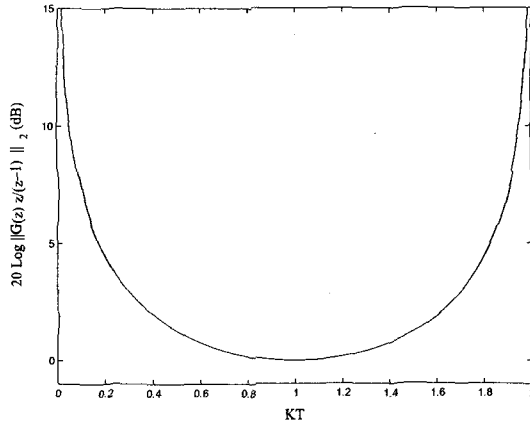


그림 5. KT 의 변화에 따른 $\|G(z) \frac{z}{z-1}\|_2$ 값의 변화.

$$\|G(z)\|_2^2 = \text{Trace}(D^T D + CLC^T) \tag{30}$$

식 (29)의 Lyapunov 방정식은 선형 방정식이므로 행렬 L 은 비교적 쉽게 계산되며, 식 (30)에 대입하여 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\|G(z)\|_2^2 = \frac{1}{2 - KT} \tag{31}$$

제어이득 K 값을 변화시키며 식 (31)로 주어지는 $\|G(z)\|_2$ 값의 변화를 그래프로 표현하면 그림 4와 같다. 그림 4에서 알 수 있듯이 광학적인 요인이 추적오차에 미치는 영향은 제어이득 K 의 값이 커질수록 급격히 증가함을 알 수 있다. 따라서 제어이득의 값을 작게 할수록 광학적인 요인이 관측 영상에 주는 영향이 줄어든다는 것을 알 수 있다.

외란의 영향은 식 (19)로 주어지므로 외란의 영향을 최소화 하려면 $\|G(z) \frac{z}{z-1}\|_2$ 값을 최소화해야 한다. 식 (23)으로 주어지는 $G(z)$ 의 전달함수를 사용하면 식 (32)를 얻는다.

$$G(z) \left(\frac{z}{z-1} \right) = \frac{z^2 + z}{2z^2 + (KT - 2)z + KT} \tag{32}$$

식 (32)로 주어지는 전달함수의 H_2 -norm, $\|G(z) \frac{z}{z-1}\|_2$ 값은 $G(z)$ 의 경우와 마찬가지로 계산이 가능하며, 식 (33)과 같이 구해진다.

$$\|G(z) \frac{z}{z-1}\|_2^2 = \frac{1}{KT(2 - KT)} \tag{33}$$

제어이득 K 의 값을 변화시키면서 얻어지는 $\|G(z) \frac{z}{z-1}\|_2$ 값의 변화를 그래프로 나타내면 그림 5와 같다. 그림 5에서도 알 수 있듯이 제어이득 K 의 값을 $\frac{1}{T}$ 로 하는 경우, 즉 $KT = 1$ 인 경우 외란이 관측 영상에 주는 영향이 최소가 됨을 알 수 있다.

$G(z)$ 의 전달함수를 갖는 시스템에 단위계단(unit step) 형태의 외란을 인가하고 얻어지는 응답을 각 제어이득별로 살펴보면 그림 6과 같다. 그림 6에서 볼 수 있듯이 제어이득 K 가 커질수록 응답이 빠른 반면에 진동이 심해짐을 알 수 있다.

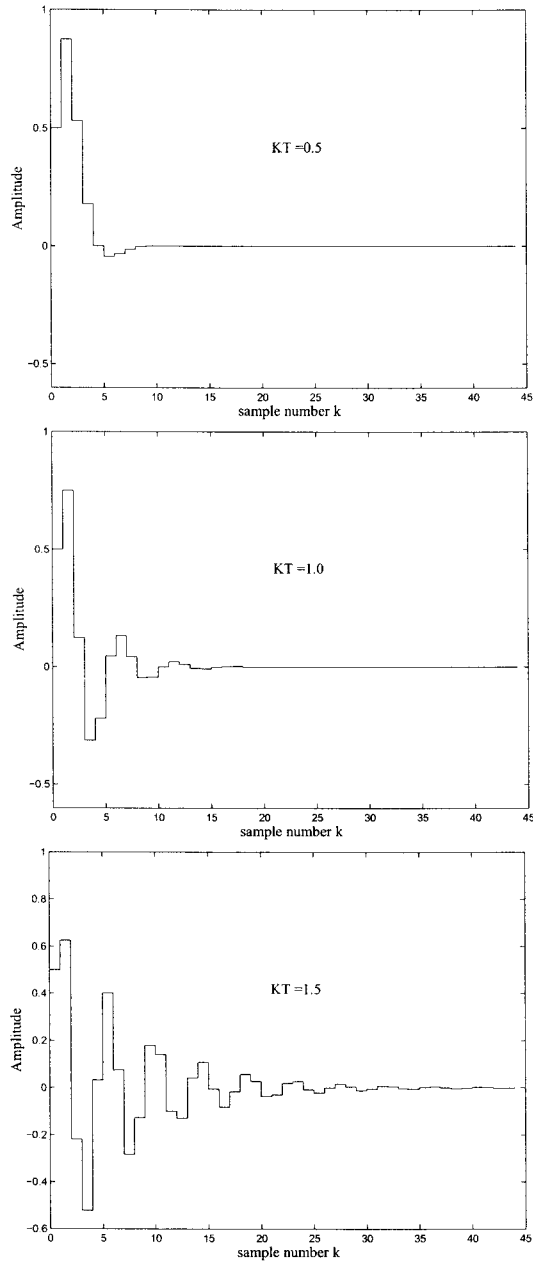


그림 6. 제어이득의 변화에 따른 단위계단 응답 $y[k]$.

비례제어기를 사용하는 경우, 안정도 조건, 정현파 형태를 갖는 주기오차의 영향, 계단형태를 갖는 외란의 영향, 백색 잡음으로 모델링된 대기산란의 영향 등은 다음과 같이 정리된다.

$$\text{안정도 조건} : 0 < KT < 2 \quad (34)$$

$$\text{주기오차의 영향} : \frac{2\pi p_0}{KT_p} + \frac{2\pi p_1}{KT_a} \quad (35)$$

$$\text{외란의 영향} : \delta^2 \frac{1}{KT(2-KT)} \quad (36)$$

$$\text{대기산란의 영향} : N_0 \frac{1}{2-KT} \quad (37)$$

M 의 제어주기 동안 계단형태의 외란이 불규칙적으로 m 개 발생하고, 각 계단의 크기가 $\delta_k, k = 1, \dots, m$ 이라고 가정하자. 이러한 외란들이 M 의 제어주기 동안 추적오차에 미치는 영향은 각 외란의 영향을 모두 더하여 다음 식 (38)로 표현할 수 있다.

$$\left(\sum_{k=1}^m \delta_k^2 \right) \frac{1}{KT(2-KT)} \quad (38)$$

식 (37)은 한 제어주기 동안 대기산란에 의해 발생하는 추적오차의 기대치이므로, M 의 제어주기 동안 관측이 이루어 졌다면, 그동안 광학적 요인이 추적오차에 미치는 영향은 식 (39)와 같게 된다.

$$MN_0 \frac{1}{2-KT} \quad (39)$$

정현파 형태로 나타나는 주기적인 오차요인은 정상상태에서 추적오차에 일정한 상수 값으로 나타나므로, 정상상태에서는 관측된 영상의 질을 떨어뜨리지 않는다. 관측영상의 질을 나쁘게 하는 주요 원인은 불규칙적으로 발생하는 외란에 의해 발생하는 과도응답(Transient Response)과 빠르게 변하는 대기의 산란이다. 즉, 식 (38)과 식 (39)로 얻어지는 두 가지 영향이 관측영상의 질을 결정하게 된다.

대기의 산란과 외란은 서로 독립적으로 발생하므로, 두 가지 요인이 복합적으로 발생하는 경우에도 추적오차에 미치는 영향은 각각의 영향을 더해서 식 (40)과 같이 얻어진다.

$$\left(\sum_{k=1}^m \delta_k^2 \right) \frac{1}{KT(2-KT)} + MN_0 \frac{1}{2-KT} \quad (40)$$

식 (40)으로 주어지는 값을 최소로 하는 KT 값을 구하면 다음과 같다.

$$KT = \sqrt{\left(\frac{\delta_0}{N_0} \right)^2 + 2 \left(\frac{\delta_0}{N_0} \right)} - \left(\frac{\delta_0}{N_0} \right) \quad (41)$$

식 (41)에서 δ_0 는 식 (42)와 같이 주어지는 값이다.

$$\delta_0 = \left(\sum_{k=1}^m \delta_k^2 / M \right) \quad (42)$$

식 (42)로 주어지는 δ_0 는 관측이 이루어지는 M 의 제어주기 동안 나타나는 외란 크기의 평균적인 파워로 생각할 수 있다. 식 (41)로 주어지는 KT 값을 N_0/δ_0 값에 따라서 구해보면 그림 7을 얻게 된

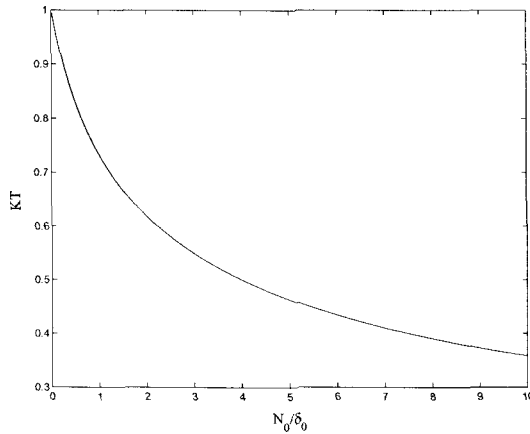


그림 7. N_0/δ_0 값의 변화에 따른 최적 KT 값의 변화.

다. 그림에서 알 수 있듯이 KT 값은 1보다 작아야 하며, 광학적인 오차요인의 척도인 N_0 값이 δ_0 값보다 상대적으로 클수록 KT 값이 작아져야 한다는 것을 알 수 있다.

외란의 요인은 바람이 부는 것과 같이 망원경 및 적도의 외부에서도 발생하지만, 구동부의 기계적인 불균일성 등에 의해서도 발생한다. 예를 들어, 이 논문의 2.2절에서 주기오차를 정현파로 모델링 하였지만, 실측된 데이터들을 보면(윤요나 외 2006), 정현파에 펄스형태의 오차들이 추가된 형태로 발생함을 알 수 있다. 즉, 이러한 펄스들은 기계적인 외란으로 간주할 수 있다.

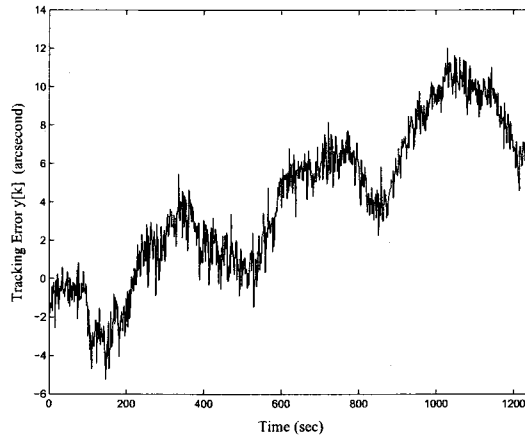
망원경 및 적도의의 기계적인 시스템에서 발생하는 이러한 외란들은 시간이 지나도 형태 및 크기가 쉽게 변하지 않으므로 식 (42)로 주어지는 외란의 평균적인 파워 값은 큰 변동이 없다고 볼 수 있다. 이와 같이 δ_0 값에 큰 변화가 없는 경우에는, 광학적인 오차요인의 척도인 N_0 값의 변화에 따라 최적의 KT 값이 달라져야 하는데, 대기의 산란이 심할수록 KT 값이 작아져야 한다는 것을 그림 7로부터 알 수 있다.

또한 그림 5와 그림 6으로부터 KT 값이 1보다 작은 경우에는 KT 값이 커질수록 광학적인 오차요인이 추적오차에 상대적으로 많은 영향을 주고, KT 값이 작아질수록 기계적인 외란이 추적오차에 상대적으로 많은 영향을 주게 된다. 이와 같은 분석결과는 다음과 같이 실제 실험을 통하여 확인할 수 있었다.

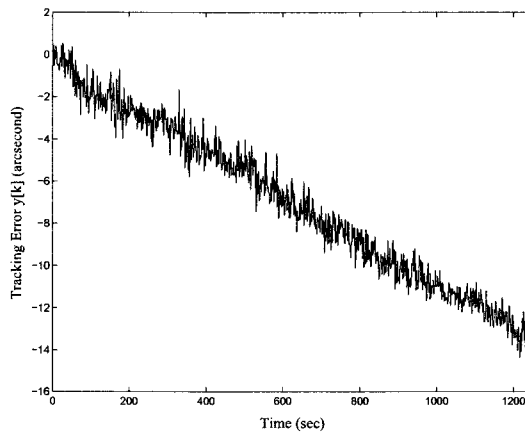
4. 실험

본문의 분석과 같이, 제어주기 T 값이 고정된 경우, 제어이득 K 값이 커짐에 따라서 광학적인 오차요인의 영향이 커지고, 제어이득 K 값이 작아질수록 외란의 영향이 커지는 현상을 실제 실험을 통하여 알아보았다. 즉, 제어주기를 고정하고, 제어이득에 변화를 주면서 추적오차 신호를 측정하였으며, 얻어진 오차신호를 분석하여 광학적 오차요인이 클수록 비례제어기의 최적 제어이득 값이 작아져야 함을 알아보았다.

실험에 사용된 적도의는 일본의 Takahashi사에서 소형 망원경용으로 제작한 적도의로 NJP Temma



(a) 적경축



(b) 적위축

그림 8. 제어기를 사용하지 않는 경우 발생하는 추적오차.

II라는 모델이다. 적도의에 탑재된 망원경은 초점거리가 1200mm인 10인치 뉴턴식 반사망원경과, 구경 80mm 초점거리 640mm의 굴절망원경이었으며, 80mm 굴절 망원경을 추적제어용으로 사용하였다. NJP Temma II는 스텝모터와 감속기어 및 워기어를 사용하여 한 펄스에 0.0049arcsec를 이동한다. 워기어의 잇수는 240개로 워이 1회전할 때 6분이 소요되며, 이 값이 주기오차의 주기가 된다. 또한 NJP Temma II의 주기오차의 크기는 최대 4arcsec이다.

오차를 검출하기 위하여 사용된 CCD 카메라는 Sbig사의 ST-402ME이다. 실험에 사용된 카메라는 상온대비 -25도까지 냉각이 가능하며, 온도 조절이 가능하다. 16-bit AD 변환기를 사용하며, 망원경을 제어하기위한 별도의 제어신호 발생장치를 가지고 있다.

사용된 CCD 카메라의 CCD는 한번의 길이가 $9\mu\text{m}$ 인 정방형태의 화소를 가지며, 전체 화소는 756×510 으로 총 390K의 화소를 가지고 있다. 따라서 초점거리 640mm의 굴절망원경을 추적오차 검출용으로 사용한 이 실험의 경우 한 픽셀에 대응하는 각도는 $\tan^{-1}(9/640000) \approx 2.9\text{arcsec}$ 이고, 전

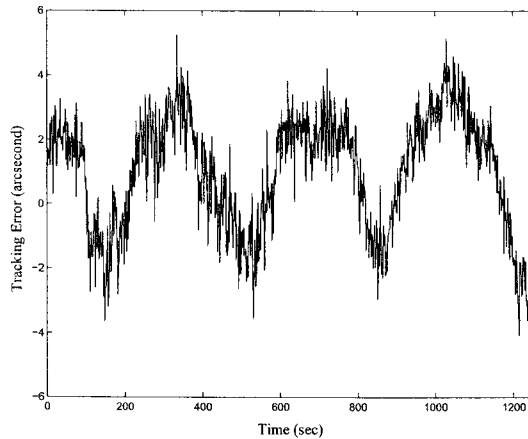


그림 9. 기울기 성분을 제거한 적경 축 오차.

체 화각은 36.5×24.7 arcmin이다.

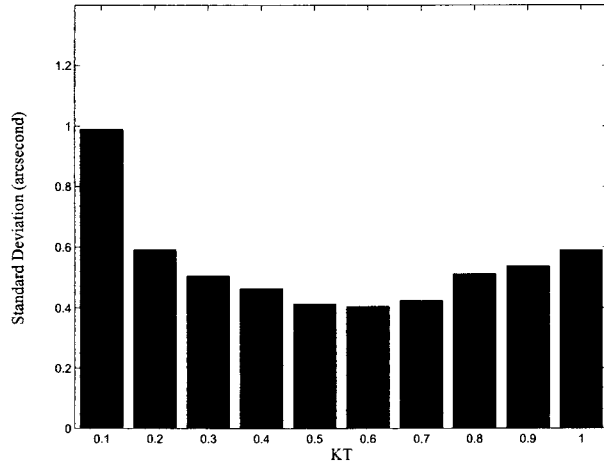
CCD 카메라로 얻어진 756×510 의 영상은 천문용 소프트웨어인 MAXIM/DL을 사용하여 처리하였다. MAXIM/DL은 가이드에 사용된 별을 중심으로 32×32 픽셀 영역의 영상만을 PC로 보내고 영상의 무게중심(centroid)을 계산하여 별의 위치를 판단하고 추적 오차를 계산한다. 또한 계산된 오차를 사용하여 적당한 보정신호를 적도의에 보내주게 된다. MAXIM/DL의 가이드 파라미터 중 aggressiveness 값은 본문의 내용 중 KT 값에 해당한다.

주기오차를 관측하기 위하여 제어를 하지 않고, 천구의 적도에 있는 별을 사용하여 얻어지는 적위 축과 적경축의 오차 그래프는 그림 8과 같다. 적경축의 경우 워기어가 계속 회전하므로 주기오차가 나타나고, 적위 축에는 주기오차가 없음을 알 수 있다. 적경 및 적위 축 모두 극축오차에 의해서 기울기 성분이 나타남을 알 수 있다. 적경축의 경우 이러한 기울기 성분을 제거하면 그림 9의 그래프를 얻는다. 그래프로부터 ± 4 arcsec 정도의 오차가 있음을 알 수 있다. 측정값에는 광학적인 산란에 의한 오차가 포함되어 있으므로, 실제 주기오차는 ± 4 arcsec 이내임을 알 수 있다.

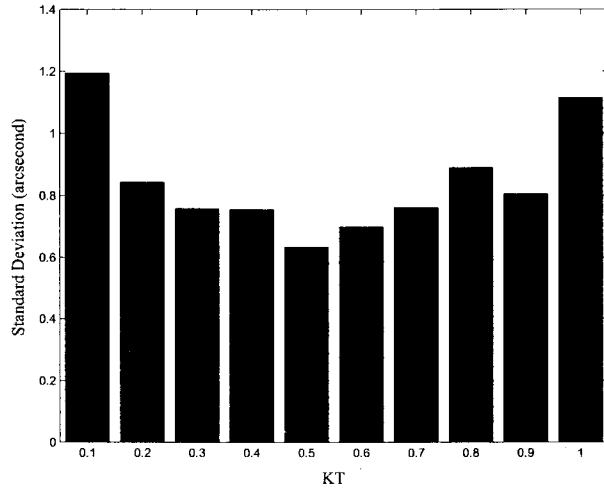
관측 장소는 강원도 횡성군 강림면에 위치한 NADA 제1 천문대이다. 시상의 변화에 따른 최적 제어이득의 변화를 알아보기 위하여 천구 적도 근처의 별 중에서 고도가 53° 인 별과 고도가 30° 인 별을 추적제어용 별로 사용하였다.

제어주기 T 는 1.2초를 사용하였고, 0.1부터 1.0까지 0.1 간격으로 KT 값을 사용하여 비례 제어를 수행하였다. 각 제어이득별로 주기오차의 주기보다 큰 7~8분 동안 관측을 수행하였으며, 실험 중 별의 고도가 계속 변하므로 각 제어이득에 따른 실험마다 정해진 고도에 맞는 새로운 별을 다시 선택하여 실험을 수행하였다.

고도가 낮은 경우 시상이 좋지 않아 광학적 산란이 많이 발생하며, 고도가 높을수록 광학적 산란이 상대적으로 작게 된다. 고도가 30° 인 경우에는 FWHM 값이 1.8픽셀에서 2.8픽셀까지 변하는 것이 관찰되었고, 평균적인 FWHM 값은 2.3픽셀로 관측되었다. 고도가 53° 인 경우에는 FWHM 값이 1.6픽셀에서 2.0픽셀까지 관측되었으며, 평균적인 FWHM 값은 1.8픽셀로 관측되었다. 두 위치에서



(a) 추적제어용 별의 고도가 53°인 경우



(b) 추적제어용 별의 고도가 30°인 경우

그림 10. 제어이득 및 고도 변화에 따른 오차신호의 표준편차.

추적제어를 실시하고 얻은 데이터를 사용하여 추적오차의 표준편차(standard deviation) 값을 구하면 그림 10의 그래프가 얻어진다.

그림 10에서 알 수 있듯이 고도가 53°인 경우 $KT = 0.6$ 근처에서 가장 작은 값이 얻어짐을 알 수 있었고, 고도가 30° 경우에는 $KT = 0.5$ 근처에서 가장 작은 값이 얻어짐을 알 수 있었다. 즉, 시상이 나쁜 경우 최적의 제어 이득 값이 작아진다는 본문의 연구결과와 일치한다.

고도가 53°이고, 값이 0.2, 0.6, 1.0인 경우의 추적제어 오차는 그림 11과 같다. 그림에서 알 수 있듯이 KT 값이 작은 경우 주기오차의 영향이 많이 남아있고, KT 값이 클수록 광학적 산란의 영향이 크다는 것을 알 수 있다.

제어를 하지 않고 얻어진 그림 8의 적경 축 오차 성분을 푸리에 변환(Fourier transform) 하여 구

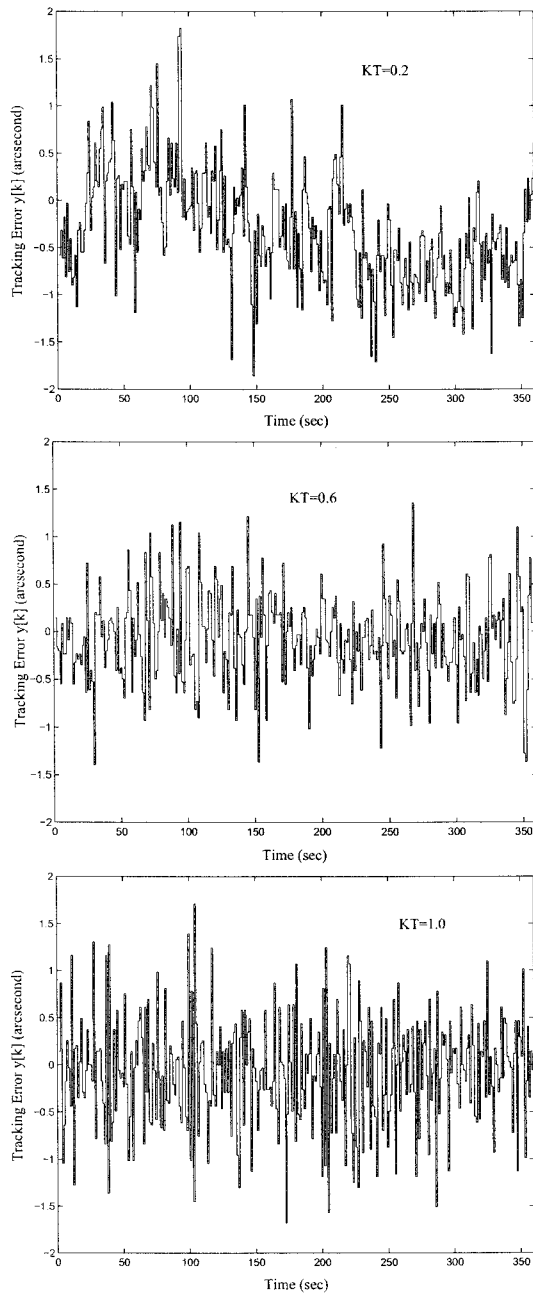


그림 11. 고도가 53° 인 경우 KT 값의 변화에 따른 추적오차 그래프.

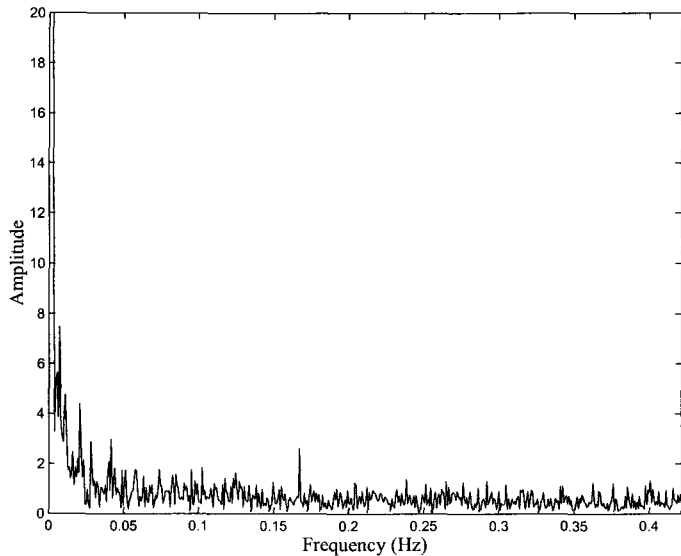


그림 12. 제어를 하지 않는 경우 얻어지는 적경 축 오차의 파워 스펙트럼.

해진 주파수 성분을 그래프로 나타내면 그림 12와 같다. 그림에서 알 수 있듯이 기울기 오차 성분과 주기오차 성분에 의해 저주파 영역에 큰 값이 나타나고, 전 주파수 대역에 광학적인 오차요인이 고루 분포함을 알 수 있다.

제어기를 사용하여 얻어진 그림 11의 추적오차를 푸리에 변환을 하여 주파수 성분을 살펴보면 그림 13과 같다. 그림에서 알 수 있듯이 제어 이득이 작을수록 기계적인 오차요인 등에 의한 저주파 대역의 오차신호가 많이 존재하고 제어 이득이 클수록 광학적인 오차 요인 등에 의한 고주파 대역의 신호가 크게 분포함을 알 수 있다. 이러한 결과는 본문의 분석과 일치하는 것이다.

5. 결 론

이 연구에서는 망원경으로 관측되는 CCD 영상에 관련하여 추적제어기의 성능지표를 제안하고, 추적오차를 CCD 카메라로 검출하는 적도의 제어시스템을 이산시간 시스템으로 모델링 하였다. 또한 시스템에 인가되는 광학적인 산란 및 기계적인 오차, 외란을 구체적으로 모델링한 후, 제안된 성능지표에 주는 영향을 수식적으로 유도하고 분석하였다. 각각의 오차요인들을 분석한 결과, 비례제어기를 사용하는 경우, 제어이득의 크기가 클수록 광학적 오차요인의 영향이 커지며, 제어이득의 크기가 작을수록 기계적인 오차요인의 영향이 커짐을 알 수 있었다. 이러한 결과는 실제 시스템을 사용한 실험을 통하여 검증하였다.

이러한 분석을 바탕으로 기계적인 오차요인에 큰 변화가 없는 경우에는 제어이득의 크기는 관측시의 시상에 따라서 달라져야 하며, 시상이 상대적으로 나쁠수록 제어이득의 크기를 상대적으로 작게 하는 것이 좋은 관측영상을 얻게 한다는 사실도 구체적인 수식을 통하여 유도하였다.

이 연구의 결과는 CCD 카메라로 위치오차를 검출하여 제어하는 많은 시스템에 적용될 수 있

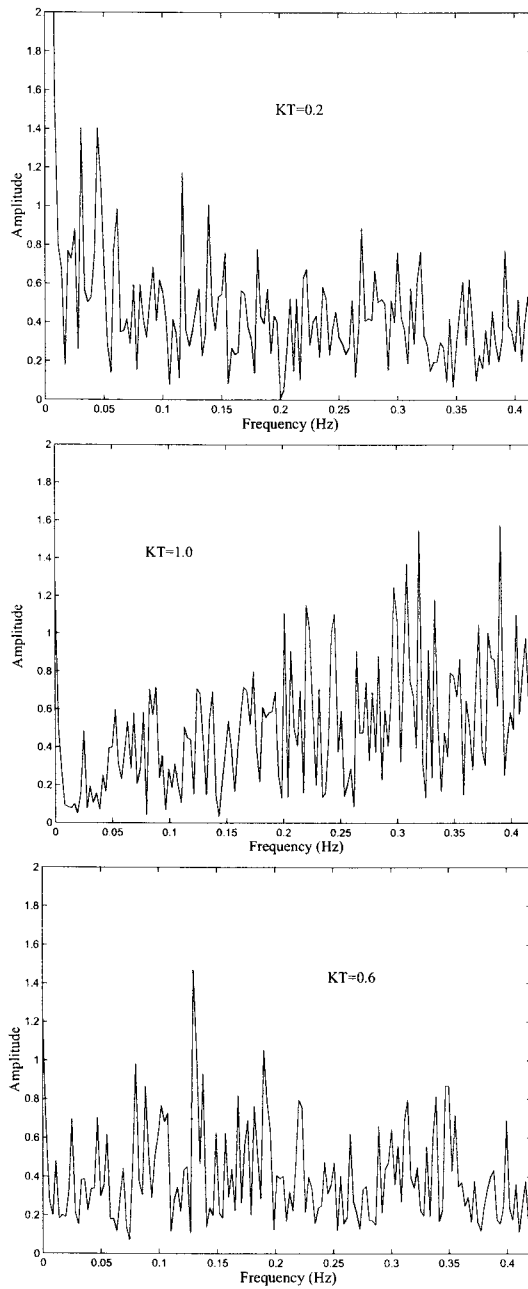


그림 13. KT 값의 변화에 따른 추적오차의 주파수 특성.

며, 정밀한 영상관측을 위한 제어기의 제어이득을 결정하는데 활용이 가능하다. 또한 이 연구의 분석 결과들은 비례제어기 이외의 다른 형태의 제어기 설계에도 활용될 수 있다.

감사의 글: 이 연구는 2006년 서울시립대학교 국외연구년교수 사업의 지원에 의해 이루어졌습니다. 이에 감사드립니다.

참고문헌

- 문병식, 김상준, 장민환, 민상용, 설경환, 문기석 2006, 한국천문학회논문, 21, 81
윤요나, 이충욱, 차상목, 김용기 2006, 한국우주과학회지, 23, 143
정웅섭, 이상각, 박수중 1999, 한국천문학회논문, 14, 47
조승현, 진호, 남옥원, 차상목, 이성호, 육인수, 박영식, 박수중, 한원용, 김성수 2006, 한국천문학회논문, 21, 67
Kemin, Z., John, D., & Keith, G. 1996, Robust and Optimal Control (New Jersey: Prentice Hall), pp.535-561
Richard, A. V. & Louis, F. K. 1967, IEEE-AC, 12, 359
Wodek, G. 2007, IEEE-CST, 15, 276
Yaguang, Y., Nick, R., & Tim, C. 2002, IEEE-CST, 10, 149