

타원 상대운동 여러 궤도 해의 단주기 비교

조중현^{1†}, 이우경¹, 백정호¹, 최남미²
¹한국천문연구원 우주측지연구부
²한국항공우주연구원 정책개발팀

SHORT-TERM COMPARISON OF SEVERAL SOLUTIONS OF ELLIPTIC RELATIVE MOTION

Jung Hyun Jo^{1†}, Woo-Kyoung Lee¹, Jeongho Baek¹, and Nammi Choe²

¹Space Geodesy Division, Korea Astronomy & Space Science Institute(KASI), Daejeon 305-348, Korea

²Policy Development Team, Korea Aerospace Research Institute(KARI), Daejeon 305-600, Korea

E-mail: jhjo39@kasi.re.kr

(Received September 10, 2007; Accepted October 30, 2007)

요 약

최근에 제안된, 이웃하는 타원 궤도의 상대운동에 대한 몇 가지 양함수형 해를 분석하였다. 이 해를 이용한 상대운동 결과를 일반 선형화 운동 방정식의 해석적 해와 비교했다. 수치계산 결과를 위한 초기 조건은 Hill-Clohesy-Wiltshire(HCW) 운동방정식에 의한 해의 역함수로 구했다. 기준 궤도의 차이에도 불구하고 상대적으로 작은 이심률의 궤도 일 경우에는 타원 상대운동 궤도와 원 상대운동 궤도의 결과는 근접했다. 주위성의 궤도가 상대적으로 큰 이심률을 가질 경우에는, 기본 궤도로 원 궤도를 이용하는 HCW 운동방정식은 다른 타원 상대운동 궤도 방정식의 해보다 상대적으로 큰 오차를 갖는다.

ABSTRACT

Recently introduced, several explicit solutions of relative motion between neighboring elliptic satellite orbits are reviewed. The performance of these solutions is compared with an analytic solution of the general linearized equation of motion. The inversion solution by the Hill-Clohesy-Wiltshire equations is used to produce the initial condition of numerical results. Despite the difference of the reference orbit, the relative motion with the relatively small eccentricity shows the similar results on elliptic case and circular case. In case of the 'chief' satellite with the relatively large eccentricity, HCW equation with the circular reference orbit has relatively larger error than other elliptic equation of motion does.

Keywords: Hill-Clohesy-Wiltshire equation, elliptic relative motion, rendezvous

1. 서 론

한 대의 인공위성을 우주공간에 발사하는 비용은 위성 자체의 제작 비용에 근접할 정도로 매우 비싸고, 발사 조건 또한 까다롭다. 이 같은 제약 요소로 인해 하나의 위성을 제작할 때 대부

[†]corresponding author

분 한가지 이상의 임무를 부여하게 된다. 여러 임무의 탑재체를 장착하고 임무를 수행 하기 위해서 위성체의 용량(크기, 전력)이 확대되고 관제시스템의 성능이 향상되었다. 그러나 위성 발사 기술의 향상으로 중소형 위성의 경우에는 한번의 발사에 다수의 위성을 동시 발사할 수 있게 됐고, GRACE(<http://www.csr.utexas.edu/grace/>)나 곧 발사될 GOCE(http://www.esa.int/esaLP/ESAYEK1VMOC_LPgoce_0.html) 등 다수의 위성을 동시에 필요로 하는 임무도 늘어나고 있다.

다수 위성의 임무를 성공적 수행을 위해서는 위성간의 편대 비행(formation flying)을 임무 요구에 맞게 정확히 제어할 필요가 있다. 이러한 제어를 위해서는 각 위성의 궤도 운동보다는 위성간의 상대적인 운동을 동력학적으로 표현하는 것이 중요하다. 이러한 근접 궤도 간의 운동을 상대운동(relative motion)이라 한다. 상대운동은 랑데부(rendezvous) 문제라고도 한다. 그러나 엄밀히 말하면 상대운동은 랑데부 문제 및 도킹(docking) 그리고 편대 비행을 모두 포함하는 포괄적 정의이다.

우주개발 경쟁 시대인 1960년대에 이러한 운동이나 기동을 기술하기 위해서 많은 연구가 이루어 졌다. 동력학적인 문제 해결뿐만 아니라 새로운 좌표계의 도입도 이루어 졌다. 주로 위성의 좌표를 기술하는 지구 기준 좌표계는 위성간의 동력학 문제를 기술하기에는 적합하지 않다. 따라서 근접 위성간의 좌표를 보다 잘 표현할 수 있는 위성중심 LVLH(Local Vertical Local Horizontal) 좌표계가 사용되기 시작했다.

대다수의 근접 상대 궤도 문제에 관한 연구는 잘 알려진 Hill-Clohessy-Wiltshire(HCW) 운동방정식을 사용했다(Melton 2000, Vallado 2001). 기본적인 HCW 운동방정식은 간단하기 때문에 널리 이용되고 있다. HCW 운동방정식은 기본적으로 원궤도를 가정하기 때문에 주위성의 궤도가 원궤도가 아닐 경우 궤도 이심률을 고려한 운동방정식이 필요하다. 타원목표궤도는 실제 활용에서 자주 고려되거나 사용되지 않았다. 타원 기준궤도에 의한 상대운동 궤도 문제는 1960년대 말에 많이 다루어졌고, 1990년대 말을 거쳐 2000년대 초까지 몇몇 학자에 의해서 새로운 해법의 시도가 알려졌다. 더 자세한 타원 상대운동 궤도론의 역사적인 고찰은 Broucke(2003)을 참조하기 바란다. 특이한 사실은 1960년에 Clohessy와 Wiltshire에 의하여 Hill의 1878년도 달궤도 이론이 재도입되기도 전에 이미 Lawden은 타원 상대 운동방정식의 해를 기술했다(Broucke 2003)는 것이다.

최근에 타원 상대 운동 궤도의 새로운 해가 몇 개 도출되었다. 그 중에서 Melton(2000), Broucke(2003), Yamanaka & Ankersen(2002)에 의해 도입된 해법이 주목을 받고 있다. 이 연구에서는 Broucke 과 Melton의 해법을 분석하고, 해의 결과 및 일반 선형화 타원 궤도 해, 그리고 HCW 해로부터 도출한 결과와 비교했다.

2. 상대 운동 궤도 운동방정식

2.1 HCW 운동방정식

그림 1의 회전 기준 좌표계에서 부위성('deputy' satellite)의 위치 벡터는 주위성('chief' satellite)의 위치벡터에 대해서 식 (1)과 같이 표현할 수 있다.

$$\vec{r}_d = \vec{r}_c + \Delta r \quad (1)$$

\vec{r}_c 는 주위성의 위치벡터이고, \vec{r}_d 는 부위성의 위치벡터이다. 궤도 각운동량 방정식과 식 (1)의 시간에 대한 이차 미분 결과로부터 부위성의 가속도 방정식을 산출한다. 식 (1)에서 주위성의 가속도 방정

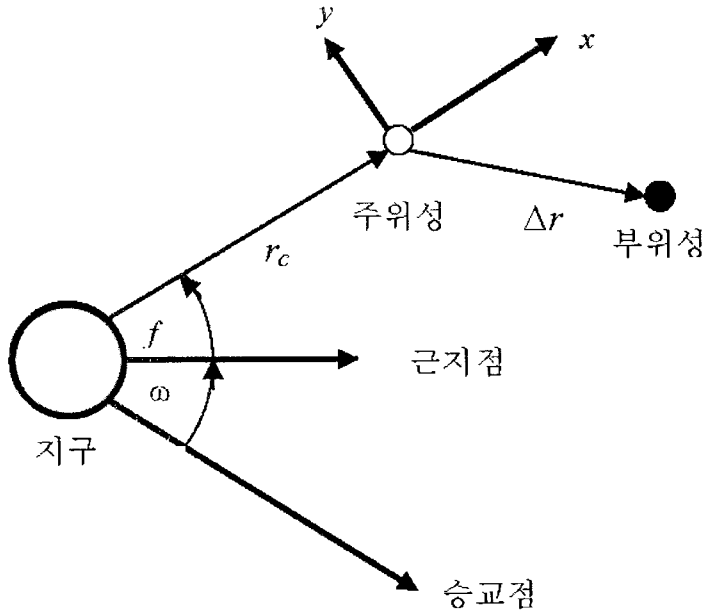


그림 1. LVLH 기준 좌표계를 주위성을 기준으로 설정하고 부위성의 운동을 이 좌표계에서 표현한다. 주위성의 위치는 관성 좌표계에서 고전궤도 6요소로 표시할 수 있다.

식을 빼고 원궤도 방정식을 대입하면 최종적으로 식 (2, 3, 4)와 같은 HCW 운동방정식을 얻게 된다.

$$\ddot{x} = 3n^2x + 2n\dot{y} \tag{2}$$

$$\ddot{y} = -2n\dot{x} \tag{3}$$

$$\ddot{z} = -n^2z \tag{4}$$

식 (2, 3, 4)에서 n 은 주위성의 평균궤도운동각속도(mean motion)이다. 원궤도의 경우에 n 은 상수이다.

HCW 운동방정식은 간단하게 해석적 해를 구할 수 있다. 그림 1에서 z 축 방향은 궤도 각운동량 벡터와 평행하다. Z 축 방향의 운동방정식은 단순 조화진동자와 매우 유사하고, 식 (2, 3, 4)의 나머지 축방향의 운동방정식에 대해 독립적이다. Radial축과 Transverse축 방향 (x, y)의 운동방정식은 서로 결합되어 있으나 쉽게 해를 구할 수 있다.

섭동을 고려하지 않은 HCW 운동방정식(식 2, 3, 4)는 식 (5, 6, 7)과 같은 해석적 해를 갖는다.

$$x(t) = -(3 \cos nt - 4)x_0 + \frac{\sin nt}{n}\dot{x}_0 - \frac{2}{n}(\cos nt - 1)\dot{y}_0 \tag{5}$$

$$y(t) = -6(\sin nt + nt)x_0 + y_0 + \frac{2}{n}(\cos nt - 1)\dot{x}_0 - \left(\frac{4}{n}\sin nt + 3t\right)\dot{y}_0 \tag{6}$$

$$z(t) = \cos nt \cdot z_0 + \left(\frac{\sin nt}{n}\right)\dot{z}_0 \tag{7}$$

2.2 일반 선형화 상대 운동 궤도 운동방정식

타원 궤도 상의 주위성에 대한 부위성의 일반 선형화 운동방정식은 기본 회전 기준좌표계와 LVLH 좌표계를 결합하여 구할 수 있다. 주위성과 부위성의 거리가 충분히 가깝다는 가정 하에, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 인 경우 r_c 의 Taylor 급수 전개로 식 (8, 9)가 유도될 수 있다.

$$r_d = r_c \sqrt{1 + 2\frac{x}{r_c} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r_c^2}} \quad (8)$$

$$\frac{1}{r_d} \approx \frac{1}{r_c} \left(1 - \frac{x}{r_c} + \frac{x^2}{r_c^2} - \frac{y^2}{2r_c^2} \right) \quad (9)$$

위도이각(argument of latitude) $\theta = \omega + f$ 는 비변수(invariant)인 근지점이각(argument of perigee) ω 를 갖는다. 진근점각(true anomaly) f 의 시간에 대한 미분 결과는 식 (10)과 같이 위도이각의 미분 결과와 같다.

$$\dot{f} = \dot{\theta} \quad (10)$$

$$\ddot{x} = \left(\dot{\theta}^2 + 2\frac{\mu}{r_c^3} \right) x + \ddot{\theta}y + 2\dot{\theta}\dot{y} \quad (11)$$

$$\ddot{y} = \left(\dot{\theta}^2 - \frac{\mu}{r_c^3} \right) y - \ddot{\theta}x - 2\dot{\theta}\dot{x} \quad (12)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\mu}{r_c^3}z \quad (13)$$

식 (14, 15, 16)의 고전 궤도 6요소(classical six orbital elements)와 같은 치환 변수의 도입 없이 식 (11, 12, 13)의 간단한 해석적 해를 구하는 것은 쉽지 않다. 원궤도 상의 주위성인 경우에는 $e = 0$, $\dot{\theta} = n$, $r_c = \text{const.}$ 이므로 식 (11, 12, 13)은 식 (2, 3, 4)와 동일해 진다.

2.3 Broucke의 타원 상대운동 궤도 운동방정식 해

Broucke(2003)은 비선형 연립미분방정식은 완전한 해석적인 해집합의 존재가 알려져 있기 때문에 식 (11, 12, 13)의 선형화 미분연립방정식의 완전한 해집합도 또한 존재한다고 했다. Broucke은 주위성과 부위성이 유사한 특성을 갖는 Keplerian 궤도 요소를 갖는다고 가정했다. 그리고 네 개의 고전 궤도 요소(a, e, M_0, ω)의 변분과 임의의 변수 α 에 대한 극좌표계를 도입하면 식 (14)와 같이 표현할 수 있다.

$$x_1 = r_1(\alpha) \cos \theta(\alpha), \quad y_1 = r_1(\alpha) \sin \theta(\alpha) \quad (14)$$

식 (11, 12, 13)은 변분법에 의해 식 (15)와 같은 네 개의 선형 독립 해를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} x &= \frac{\partial r_1}{\partial \alpha} \cdot \Delta \alpha \\ \dot{x} &= \frac{\partial \dot{r}_1}{\partial \alpha} \cdot \Delta \alpha \\ y &= r_1(\alpha) \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \cdot \Delta \alpha \\ y &= \left(\dot{r}_1(\alpha) \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + r_1(\alpha) \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \alpha} \right) \cdot \Delta \alpha \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 α 는 네 개의 고전 궤도 요소를 나타낸다.

Broucke(2003)에 의하면 모든 이 네 개 궤도 요소에 대한 편분 도함수는 식 (16)과 같은 행렬 형태로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A1}; \mathbf{A2}] \quad (16)$$

여기서 행렬 \mathbf{A} 의 각 성분은 식 (17, 18)과 같다.

$$\mathbf{A1} = \left[\begin{array}{c|c} \frac{r}{a} - \frac{3n(t-t_0)e \sin f}{2\sqrt{1-e^2}} & -\cos f \\ -\frac{3}{2}n(t-t_0)\sqrt{1-e^2}\frac{a}{r} & (1+\frac{r}{P})\sin f \\ \frac{-ne \sin f}{2\sqrt{1-e^2}} - \frac{3}{2}(t-t_0)e \cos f \cdot (\frac{na}{r})^2 & n \sin f \sqrt{1-e^2} \cdot (\frac{a}{r})^2 \\ \frac{3}{2}(t-t_0)e \sin f \cdot (\frac{na}{r})^2 - \frac{3}{2}\sqrt{1-e^2} \cdot (\frac{na}{r}) & n\sqrt{1-e^2}(1+\frac{r}{P})(\frac{a}{r})^2 \cos f + \frac{en \sin^2 f}{\sqrt{(1-e)^3}} \end{array} \right] \quad (17)$$

$$\mathbf{A2} = \left[\begin{array}{c|c} \frac{e \sin f}{\sqrt{1-e^2}} & 0 \\ \sqrt{1-e^2}\frac{a}{r} & \frac{r}{a} \\ en \cos f \cdot (\frac{a}{r})^2 & 0 \\ -en \sin f \cdot (\frac{a}{r})^2 & \frac{en \sin f}{\sqrt{1-e^2}} \end{array} \right] \quad (18)$$

그리고 기점 t_0 로부터 시간 t 까지의 상태벡터를 연관시킬 수 있는 상태전이 행렬(state transition matrix)을 식 (19, 20)과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) \quad (19)$$

$$\Phi(t, t_0) = \mathbf{A}(t)\mathbf{A}(t_0)^{-1} \quad (20)$$

원궤도의 경우 행렬 $\mathbf{A2}$ 의 두 열벡터가 동일해 지며, 이때 행렬 \mathbf{A} 는 특이 상태(singular)가 된다. 이러한 문제를 해결하기 위해서 Broucke는 행렬 $\mathbf{A2}$ 의 첫 번째 열벡터와 두 번째 열벡터의 선형 조합으로 첫 번째 열벡터를 대치했다. 이러한 치환을 통해 원궤도 경우의 새로운 유효 무특이(non-singular) 기본 해 행렬을 구할 수 있다.

Broucke(2003)은 또한 기본 해 행렬의 효과적인 역함수해법을 식 (21)과 같이 제시했다.

$$\mathbf{A}^{-1} = [\mathbf{L}; \mathbf{J} + 3(t-t_0)\mathbf{K}]^T \quad (21)$$

부분행렬 \mathbf{L} , \mathbf{J} , \mathbf{K} 는 부록 A1, A2, A3와 같다.

2.4 Melton의 타원 상대 궤도 운동방정식 해

외부 섭동요소가 없다는 가정 하에서는 상대운동 궤도 방정식으로 Melton(2000)이 이용한 첫 방정식은 기호의 상이성을 제외하곤 식 (11, 12, 13)과 동일하다. Melton에 따르면, 부위성의 상태벡터를 LVLH 좌표계에서 식 (22)와 같이 표현할 수 있다.

$$\delta \mathbf{x} = [\delta \mathbf{r} \quad \delta \dot{\mathbf{r}}]^T \quad (22)$$

여기서 $\delta \mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_c$

선형화된 운동방정식은 식 (23)과 같이 표현될 수 있다.

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\delta \mathbf{x} \quad (23)$$

여기서 행렬 $\mathbf{A}(t)$ 는 부록 A4와 같다.

행렬 $\mathbf{A}(t)$ 는 성분에 세 개의 시간변위 변수 r_c , θ , $\dot{\theta}$ 를 갖고 있다. 이 세 시간변위 변수는 Lagrange 급수를 사용하여 근사값을 구할 수 있다(Battin 1987). 주위성의 거리(radius)는 급수전개에 의해서 식 (24)와 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{r_c}{a} = 1 + \frac{1}{2}e^2 - e \cos M - \frac{1}{2}e^2 \cos 2M + \vartheta(e^3) \quad (24)$$

위도이각의 변화율은 식 (24)와 유사한 급수전개로 식 (25)와 같이 구할 수 있다.

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r_c^2} = \left(\frac{h}{a^2}\right) \left\{1 + 2e \cos M + \frac{1}{2}e^2(5 \cos 2M + 1) + \vartheta(e^3)\right\} \quad (25)$$

(x, y, z) 시스템의 회전을 변화도 같은 방식으로 식 (26)과 같이 표현될 수 있다.

$$\ddot{\theta} = \frac{-2h}{r_c^3} \dot{r}_c = \frac{-2h}{a^2} \{en \sin M + e^2 n \sin 2M + 3e^2 n \cos M \sin M + \vartheta(e^3)\} \quad (26)$$

식 (25)는 다시 식 (27)과 같이 표현 할 수 있다.

$$\dot{\theta}^2 = \frac{h^2}{r_c^4} = \frac{h^2}{a^4} \{1 + 4e \cos M + e^2(3 + 7 \cos 2M) + \vartheta(e^3)\} \quad (27)$$

식 (23)으로부터 시간 t 에서의 상태벡터는 식 (28)과 같이 정의된다.

$$\delta \mathbf{x}(t) = \Phi(t, 0) \delta \mathbf{x}(0) = \exp \left\{ \int \mathbf{A}(t) dt \right\} \delta \mathbf{x}(0) \quad (28)$$

행렬 \mathbf{A} 의 행렬지수함수는 시간종속적이므로 내재함수적(closed-form)으로 결정될 수 없다. 하지만 행렬 \mathbf{A} 는 주기적(periodic)이며, 이심률의 멱급수(power series)형태로 식 (29)처럼 전개할 수 있다.

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0 + e \mathbf{A}_1(t) + e^2 \mathbf{A}_2(t) + \dots \quad (29)$$

동시에 상태전이행렬은 이심률에 대해서 식 (30)처럼 급수전개할 수 있다.

$$\Phi(t, 0) = \Phi_0 + e \Phi_1(t) + e^2 \Phi_2(t) + \dots \quad (30)$$

여기서

$$\Phi_0 = e^{A_0 t} \quad (31)$$

식 (31)의 기본 상태전이행렬 Φ_0 는 단순히 원궤도 경우의 상태전이행렬이다. 이 행렬의 성분요소는 부록 A5와 같다. 식 (30)의 다른 고차항(higher order term)은 Melton(2000)에서 찾을 수 있다.

3. 초기 조건

타원 상대 궤도 운동방정식의 세가지 다른 해를 비교하기 위해 여러 시험 예를 적용하였다. 이 중 몇 가지 특정한 경우에서 HCW의 해와 다른 해를 비교 했다. 모든 경우를 식 (11, 12, 13)의 일반 선형화 타원 기준궤도 운동방정식의 직접 적분(전파) 결과와 비교 검증하였고, 세가지 다른 해의 결과 를 HCW의 해와 서로 비교하여 상대적인 정밀도를 검토하였다.

궤도면 바깥쪽 위치(z축 방향)의 운동 해는 이것이 궤도면 운동과 결합되어 있지 않기 때문에 쉽게 구할 수 있다. 따라서 이 방향의 해는 원형 HCW 운동방정식의 해와 일치한다.

$$z(t) = z_0 \cos \left(\sqrt{\frac{\mu}{r_c^3}} \cdot t \right) + \sqrt{\frac{r_c^3}{\mu}} \dot{z}_0 \sin \left(\sqrt{\frac{\mu}{r_c^3}} \cdot t \right) \quad (32)$$

표 1. 실험 주위성의 초기 조건.

궤도요소	값
궤도 장반경	590+6378.137(km)
이심률	0.01*
궤도 경이각	60(deg)
근이점 이각	30(deg)
승교점이각	30(deg)
평균 근점각	0(deg)
궤도주기	5788.7(sec)
이격거리	10(m)**
기동시간	300(dec)***

*이심률은 각 시험경우에 따라 변경한다.

**두 위성 간의 이격 거리는 각 경우에 따라 변한다.

***기동 시간은 최적 결과를 위해 변경한다.

여기서

$$n^2 a^3 = \mu \tag{33}$$

따라서 초기 조건 z_0 은 주어진 초기 이격 거리 z_0 , 초기 기동시간 T_m , 최종 조건 $z(t_f) = 0$ 에 의해서 산술적으로 얻어진다.

$$z_0 = -z_0 \sqrt{\frac{\mu}{r_c^3}} \cdot \cot \left(\sqrt{\frac{\mu}{r_c^3}} \cdot T_m \right) \tag{34}$$

궤도면에서의 상대운동은 식 (11, 12, 13)에서 보는 바와 같이 결합된 연립방정식의 집합으로 표현될 수 있다. Broucke과 Melton은 타원 상대운동 궤도 방정식을 풀기 위해서 서로 다른 접근 방법을 사용했다. 결과적으로 Broucke의 방법은 행렬 A와 A⁻¹의 편분 요소들의 곱에서 상태전이행렬을 구한다. 겉보기엔 매우 간단하나, 행렬 역함수에 특이상태의 위험이 있는 세 번째 열에 주의가 필요하다. 반면에 Melton의 방법은 선형방정식 집합인 식 (23)의 적분과 행렬 급수 전개를 사용함에 따라 Broucke의 방법보다 상대적으로 계산량이 더 크다.

지금까지의 운동방정식 해법을 비교하기 위해서 표 1에 제시한 임의의 위성 궤도 요소를 사용하여 수치계산 초기 조건을 구했다.

랑데부를 위한 초기 상태 벡터($\mathbf{r}(t_f) = 0, \dot{\mathbf{r}}(t_f) = 0$)는 식 (19)의 역함수로 식 (35)와 같이 결정할 수 있다. 기동시간 T_m (시점부터 종점까지), 초기 위치 벡터, 최종 속도, 최종 위치가 주어졌을 때, 부위성이 주위성을 랑데부하기 위한 초기 속도벡터를 결정한다.

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{A}(t_0)\mathbf{A}(T_m)^{-1}\mathbf{x}(T_m) \tag{35}$$

Broucke(2003)에 의하면 식 (35)의 해는 네 개의 변수(post-burn의 기동 속도 성분과 기동 시간)를 갖는 네 개 연립방정식의 해로 잘 표현된다.

이 연구에서는 랑데부 초기 조건을 구하기 위해 가장 간단한 HCW 운동방정식의 해(Vallado 2001, 이우경 등 2005)를 선형근사방법으로 사용하였다. 표 2는 이렇게 구한 네 가지의 시험 예 초기 조건이다. 이 초기 이격 조건에 따라 부위성은 주위성을 랑데부를 한다. 이 초기 조건은 완전히 임의로 결정할 수 없다. 초기 속도 조건에 대해 식 (35)와 HCW 방정식에 의해서 제한이 주어진다. HCW 방정식 해의 경우에는 일정 이격 거리 이상에서는 신뢰성이 높지 못하다. 즉 물리적으로 가능하지 않

표 2. 주어진 조건에서 HCW운동방정식의 해로부터 도출된 부위성의 랑데부를 위한 초기 속도 조건.

	Radial와 transverse 방향 초기 이격 거리(m)	초기속도(m/s)	기동 시간(s)
실험 예 1	$\delta x = -100, \delta y = 100$	$\dot{x}_0 = 0.462, \dot{y}_0 = -0.211$	300
실험 예 2	$\delta x = -500, \delta y = 500$	$\dot{x}_0 = 1.267, \dot{y}_0 = 0.238$	900
실험 예 3	$\delta x = -1000, \delta y = 1000$	$\dot{x}_0 = 1.690, \dot{y}_0 = 1.452$	1800
실험 예 4	$\delta x = -5000, \delta y = 5000$	$\dot{x}_0 = -1.725, \dot{y}_0 = 11.861$	7200

표 3. 동일한 장반경을 갖고 각기 다른 이심율을 갖는 실험 예 5와 6의 초기 조건.

궤도 요소	실험 예 5	실험 예 6
궤도 장반경	590 + 6378.137(km)	590 + 6378.137(km)
이심률	0.05	0.1
궤도 경사각	60(deg)	60(deg)
근지점 이각	30(deg)	30(deg)
승교점 이각	30(deg)	30(deg)
평균근점각	0(deg)	0(deg)
궤도 주기	5788.7(sec)	5788.7(sec)
radial와 transverse 방향 초기 이격 거리(m)	$\delta x = -500, \delta y = 500$	$\delta x = -500, \delta y = 500$
초기속도(m/s)	$\dot{x}_0 = 1.267, \dot{y}_0 = 0.238$	$\dot{x}_0 = 1.267, \dot{y}_0 = 0.238$
기동 시간	900(sec)	900(sec)

은 조건이 계산될 수도 있다. 따라서 초기 주위성과 부위성 간의 이격거리는 적절하게 작은 radial과 transverse성분을 가져야 한다.

표 2는 같은 이심율을 가지나 이격 거리가 다른 시험 예들이다. 따라서 이심율의 변화에 따른 각 상대 운동방정식 해의 결과를 보기 위해선 같은 이격 거리를 가지나 이심율이 다른 경우를 검토해야 한다(Jo et al. 2005).

표 3은 동일한 조건에서 이심율의 변화 따른 각 상대 운동방정식 해의 결과를 비교하기 위한 실험 예 5와 6의 초기 조건들이다. 이 조건들은 실험 예 2와 이심율을 제외하고 동일한 초기 조건을 갖는다. 이 실험 예의 궤도들은 장반경의 크기가 동일하므로 궤도 주기 또한 동일하다.

4. 수치계산 결과

표 2의 초기 조건을 사용하여 수치계산을 했다. 그러나 초기 이격 거리가 클 경우(약 1000m 이상), 긴 기동 시간(궤도 주기 보다 큼)이 주어짐에도 상대적으로 빠른 속도 성분을 갖게 된다(표 2 참조). 그림 2는 표 2의 초기조건을 LVLH 좌표계에서 일반 선형화 운동방정식으로 계산한 것이다[식 (11, 12, 13)]. 이때 이심율은 0.01이다. 이심율이 0.01인 경우 표1의 초기 조건에서 원 기준궤도와 타원 기준궤도의 최대 간격은 69.7km 이하이다. 그러나 LVLH 좌표계 상에서는 이 거리 변화의 효과는 보이지 않는다.

그림 3은 시험 예 2번에 대한 각 운동방정식의 계산 결과이다. 그림 4와 5는 각 속도 성분(x, y)의 비교를 보여주고 있다. Radial 방향과 transverse 방향 모두에서 속도 차이가 크지 않음을 알 수 있다. 일반선형화 방정식, Broucke의 방법, Melton의 방법 모두가 매우 근접한 수치 결과를 갖는 것을

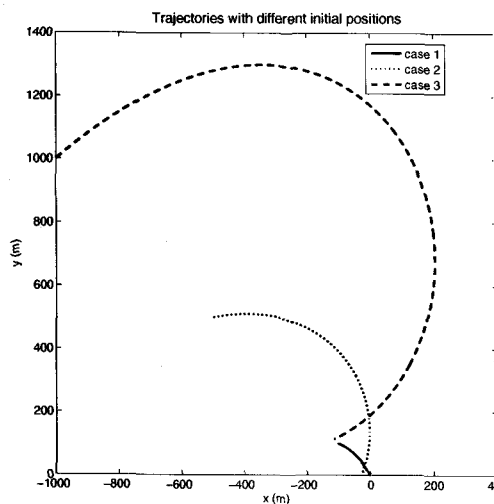


그림 2. LVLH 좌표계 상에서 각각 다른 초기 조건을 일반 선형화 운동방정식으로 계산한 부위성의 궤적. 실험 예 4번은 그 궤적의 크기 때문에 제외했다.

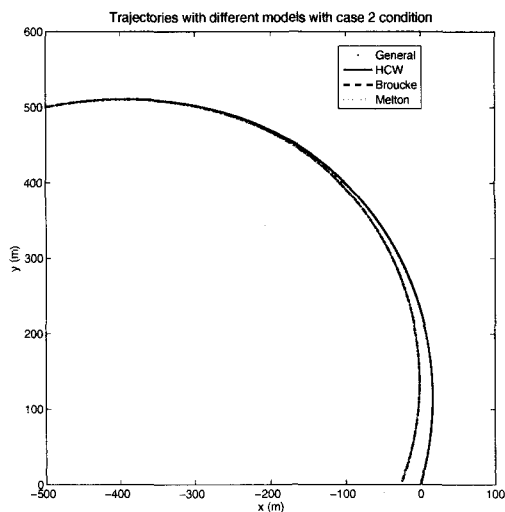


그림 3. 실험 예 2의 조건에 따른 여러 타원 상대궤도 해의 (x, y)평면상의 궤적 비교.

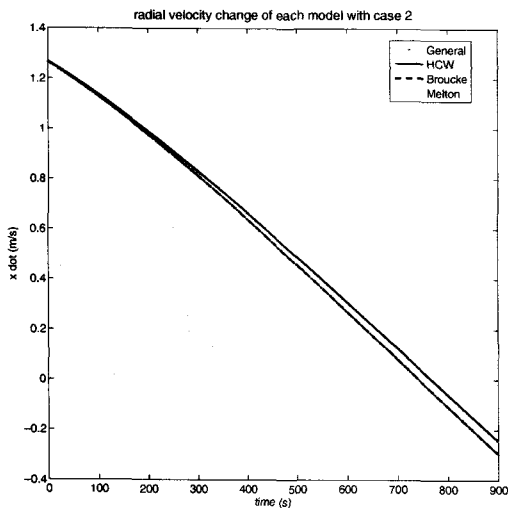


그림 4. 실험 예 2의 조건에 따른 각 운동방정식 해에 의해 계산된 radial속도 성분의 비교.

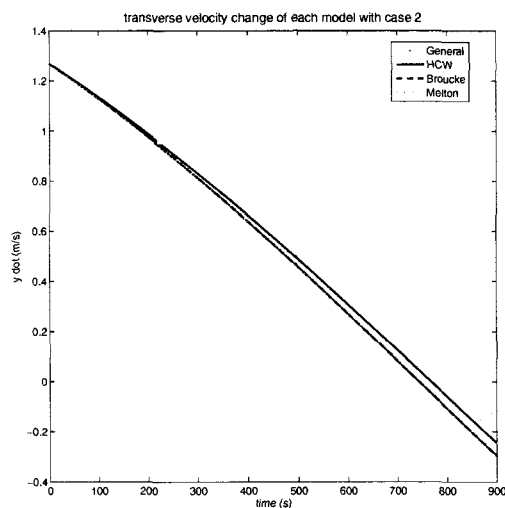


그림 5. 실험 예 2의 조건에 따른 각 운동방정식 해에 의해 계산된 transverse속도 성분의 비교.

확인 할 수가 있다. HCW 방정식은 타원 궤도가 아닌 원궤도를 가정하기 때문에, 동일한 초기 조건에서도 나머지 방법들과 다른 결과를 보여준다.

그림 3, 6, 7에서 보는 바와 같이 이심율의 변화(0.01 0.05 0.1)에도 Broucke과 Melton의 타원 상대 운동 궤도 방정식 해는 일반 선형화 타원 운동방정식의 적분 결과와 매우 근사하다.

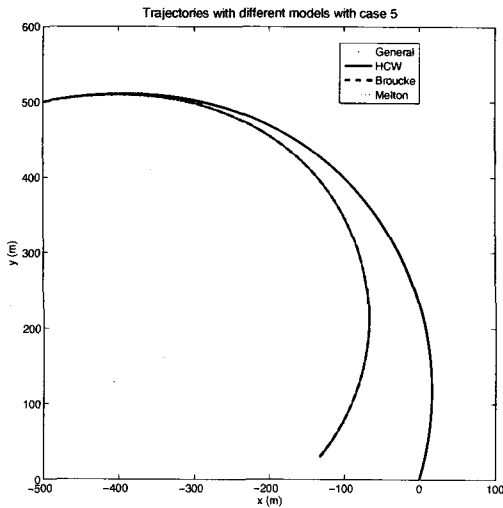


그림 6. 실험 예 5의 조건에 따른 여러 타원 상대궤도 해의 (x, y)평면상의 궤적 비교.

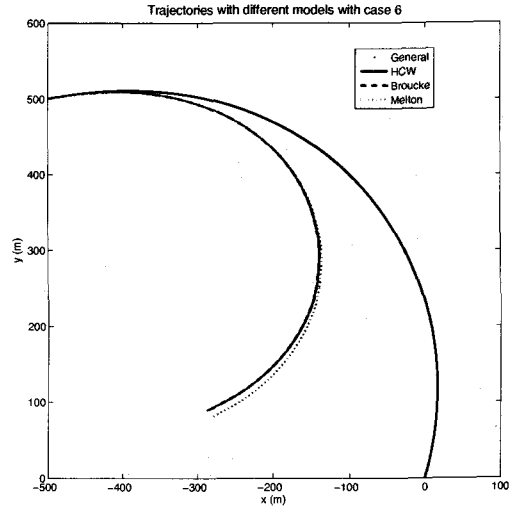


그림 7. 실험 예 6의 조건에 따른 여러 타원 상대궤도 해의 (x, y)평면상의 궤적 비교.

5. 결 론

상대적으로 이심률이 작은 상대운동 궤도에서는 원궤도 운동방정식과 타원궤도 운동방정식 해의 결과 차이는 크지 않다. HCW 운동방정식에서 유도된 초기조건을 사용할 경우 이심률 차이가 클수록 최종 궤도 간 거리의 증가한다. 초기 궤도간 거리가 증가할수록 실행 가능한(안전한) 초기 속도에 대응하는 기동 시간은 증가한다. 주어진 초기 이격 거리와 임의의 기동시간을 제한 요소로 도출된 초기 속도는 현실적이지 않을 수 있으므로, 적절한 기동 시간과 초기 속도를 구하기 위한 최적화 단계가 필요하다.

이 연구에서 검토된 두 개의 타원 상대궤도 운동방정식은 초기조건의 변화(이심률, 초기 이격 거리)에도 불구하고 일반 선형화 타원궤도 운동방정식과 매우 근접한 해를 갖고 있다. 따라서 두 방법(Broucke과 Melton)의 계산 정밀도 차이는 크지 않다. 또한 두 계산 방법의 수치 계산량의 차이도 미미한 수준이다. 이 결과를 실제로 활용화하기 위해서 특이상태 문제(Broucke)와 급수전개(Melton)에 따른 오차는 더 분석이 요구된다. 그러나 주위성의 궤도가 타원인 경우에는 타원 상대 운동방정식을 사용하면 기존 HCW 운동방정식에 비해 오차를 대부분 줄일 수 있다.

감사의 글: 이 논문의 천체역학 용어 한글정의를 최규홍(1997)을 참고했습니다.

참고문헌

최규홍 1997, 천체역학 (서울: 민음사), pp.34-81
 이우경, 유성문, 박상영, 최규홍, 장영근 2005, 한국우주과학회지, 22, 21
 Battin, R. H. 1987, An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics, AIAA Education Series (Washington, DC: AIAA), pp.199-202

- Broucke, R. J. 2003, *J. Guidance, Control, and Dynamics*, 26, 615
- Jo, J. H., Cochran, J. E., & Choe, N. J. 2005, 15th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Conference, Copper Mountain, Colorado, AAS05-293
- Melton, R. G. 2000, *J. Guidance, Control, and Dynamics*, 23, 604
- Vallado, D. 2001, *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*, 2nd Ed. (El Segundo: Microcosm Press), pp.374-397
- Yamanaka, K. & Ankersen, F. 2002, *J. Guidance, Control, and Dynamics*, 25, 60

부록 (Melton 2000, Broucke 2003)

$$\mathbf{L} = \left[\begin{array}{c|c} 2 \left(\frac{a}{r}\right)^2 \left(1 + \frac{P}{r}\right) & \left(\frac{a}{r}\right) \{3 \cos f + e(2 + \cos^2 f)\} \\ -2 \left(\frac{a}{r}\right)^2 e \sin f & -e \sin f \cdot \left(\frac{a}{P}\right) \{e + \cos f(2 + e \cos f)\} \\ \frac{2e \sin f}{n\sqrt{1-e^2}} & \frac{1}{n}\sqrt{1-e^2} \sin f \\ 2 \left(\frac{a}{r}\right) \frac{1}{n}\sqrt{1-e^2} & \frac{1}{n}\sqrt{1-e^2} \{\cos f + \frac{r}{P}(e + \cos f)\} \end{array} \right] \quad (\text{A1})$$

$$\mathbf{J} = \left[\begin{array}{c|c} \frac{-a}{P} \sin f \{e^2 + (1 + e \cos f)(3 + e \cos f)\} & \frac{-a^2}{Pr} e \sin f \left(2 + \frac{P}{r} + \frac{r}{P}\right) \\ \frac{a}{P} e \sin^2 f (2 + e \cos f) & \left(\frac{a}{P}\right)^2 \{1 + e \cos f - e^2(e \cos^3 f + 2 \cos^2 f - 1)\} \\ \frac{r}{Pn} \sqrt{1-e^2} \{\cos f + e(\cos^2 f - 2)\} & \frac{e \cos f - 1}{n\sqrt{1-e^2}} \left(1 + \frac{r}{P}\right) \\ \frac{-1}{n} \sqrt{1-e^2} \sin f \left(1 + \frac{r}{P}\right) & \frac{-e \sin f}{n\sqrt{1-e^2}} \left(1 + \frac{r}{P}\right) \end{array} \right] \quad (\text{A2})$$

$$\mathbf{K} = \left[\begin{array}{c|c} \frac{ne}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{a}{r}\right) \left(1 + \frac{P}{r}\right) & \frac{n}{\sqrt{(1-e^2)^3}} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \left(1 + \frac{P}{r}\right) \\ \frac{-ne^2 \sin f}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{a}{r}\right)^2 & \frac{-ne \sin f}{\sqrt{(1-e^2)^3}} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \\ \frac{e^2 \sin f}{1-e^2} & \frac{e \sin f}{(1-e^2)^2} \\ \frac{1}{r} ae & \frac{a}{(1-e^2)r} \end{array} \right] \quad (\text{A3})$$

$$\mathbf{A}(t) = \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2\frac{\mu}{r_c^3} + \theta^2 & \dot{\theta} & 0 & 0 & 2\theta & 0 \\ -\dot{\theta} & -\frac{\mu}{r_c^3} + \theta^2 & 0 & -2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\mu}{r_c^3} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{A4})$$

$$\Phi_0 = \left[\begin{array}{cccccc} 4 - 3 \cos nt & 0 & 0 & \frac{\sin nt}{n} & \frac{2}{n}(1 - \cos nt) & 0 \\ 6(\sin nt - nt) & 1 & 0 & -\frac{2}{n}(1 - \cos nt) & \frac{1}{n}(4 \sin nt - 3nt) & 0 \\ 0 & 0 & \cos nt & 0 & 0 & \frac{\sin nt}{n} \\ 3n \sin nt & 0 & 0 & \cos nt & 2 \sin nt & 0 \\ -6n(1 - \cos nt) & 0 & 0 & -2 \sin nt & 4 \cos nt - 3 & 0 \\ 0 & 0 & -n \sin nt & 0 & 0 & \cos nt \end{array} \right] \quad (\text{A5})$$