

드 모르간의 수학교육 철학과 교수법의 재조명

한국교육과정평가원 손홍찬
hcsn@kice.re.kr

한국교육과정평가원 고희경
koho@kice.re.kr

드 모르간은 집합 단원에서 나오는 이름으로, 학생들에게 널리 알려진 수학자이다. 그는 19세기 영국의 대수학과 논리학에 영향을 끼치는 등 매우 폭넓은 연구업적을 남긴 수학자임과 동시에 위대한 수학 선생이기도 하였던 인물이다. 본고에서는 이러한 드 모르간의 생애와 수학에서의 업적을 간단히 살펴본 후, 그의 수학교육에서의 철학과 교수법에 대하여 살펴봄으로써 훌륭한 수학 교사가 갖추어야 할 사항에 대하여 고찰해보고자 한다.

주제어: 드 모르간, 업적, 교수법

0. 들어가는 말

아우구스투스 드 모르간(Augustus De Morgan, 1806.06.27~1871.03.18)은 고등학교 집합 단원에 나오는 ‘드 모르간의 법칙(De Morgan’s laws)’으로 인하여 대부분의 사람들에게 매우 익숙한 이름이라 할 수 있다. 드 모르간의 법칙은 명제 ‘P and Q’의 부정은 명제 ‘not P or not Q’와 동치이며, 명제 ‘P or Q’의 부정은 명제 ‘not P and not Q’와 동치, 즉;

$$\sim(P \wedge Q) \equiv \sim P \vee \sim Q,$$

$$\sim(P \vee Q) \equiv \sim P \wedge \sim Q$$

임을 일컬으며, 이것은 어떤 집합의 합집합의 여집합은 각각의 여집합의 교집합과 같고 또한 어떤 집합의 교집합의 여집합은 각각의 여집합의 합집합과 같다;

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

을 의미하는데, 집합의 경우에는 벤다이어그램을 통해서도 쉽게 확인할 수 있을 뿐 아니라 매우 중요한 내용으로서 고등학교 집합 단원부터 소개되어 그의 이름과 함께 널리 알려져 있다.

그러나 드 모르간은 집합론의 발전에 많은 공헌을 한 사람이라는 것은 많은 사람이 익히 알고 있으나, 런던 대학에서 매우 뛰어난 수학 강사로 유명하였다는 것을 아는 이는 그리 흔하지 않을 것이다. 게다가 그는 여성들의 권리를 공개적으로 지지했던 사람으로, 여성들의 교육을 중요시 않았던 그 당시에 여학생들을 위한 수학 강의를 무료로 개설하는 등 여성이 수학을 공부할 수 있도록 애를 썼던 인물이기도 하였다.

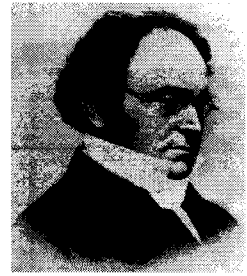
19세기 영국의 수학자인 드 모르간은 집합론에서 익숙한 이름이나 논리학자임과 동시에 기호를 체계화시킴으로써 불(Boole) 대수에 영향을 끼친 대수학자였고(Smith, 1958) 복소수의 기하학적 표상을 시도함으로써 해밀톤(Hamilton)의 4원수 발견에 영향을 끼치는 등 매우 폭넓은 연구업적을 남긴 수학자였다([14]). 드 모르간은 종교적 위선을 비판하며 종교 시험을 거부해 케임브리지대학에서 학위를 받지 못하였음에도 불구하고, 학문적 재능을 인정받아 1826년에 혁신적으로 건립된 런던대학(University College London)에서 30여 년간 강의를 하게 됨으로써, 런던의 고등 교육기관을 선도하는 대학에서 빅토리아 시대의 수학이나 과학 분야 등에 현저한 지적 업적을 남겼다([18]).

그러나 본 교에서는 드 모르간의 수학적 업적이나 그가 연구했던 수학적 논의가 아닌 위대한 수학 교육자라 알려진 그의 교수법에 초점을 맞추어 논하고자 한다. Rice(1996)에 의하면, 그는 학생들의 재능과 문제점을 세심히 관찰해 나가며 지도해 나갔을 뿐 아니라, 자신이 가르치는 내용을 학생들 스스로 이해하는 것이 가장 중요하다는 생각으로 학생들에게 협동 학습과 집에서 푸는 시험을 실시하는 등 교육 방법론 측면에서도 많은 업적을 남겼던 인물이라 한다. 그의 교수법을 직접적으로 알 수 있는 자료들은 많이 남아있지 않지만, 강의용으로 사용했던 교재들은 많이 남아있는데, 드 모르간 자신의 강의 내용을 담은 이 교재들은 그 수가 무려 320여권에 달하며 모두 드 모르간이 자필로 쓴 것으로, 19세기 영국에서 수학을 공부하는 학생들에게 가장 유용한 교재였던 것으로 평가받았다([16]). 수학적 업적 뿐 아니라 일생동안 지속적으로 수학 교육에 지대한 관심과 업적을 남겼던 드 모르간의 교수 방법론에 대하여 살펴봄으로써, 수학자이자 수학교육자인 그가 평생 실천하고자 하는 수학교육에 대한 철학은 무엇이며 어떻게 이를 실천해 왔는지를 조명하고 이를 통해 오늘날 우리가 수학교육을 실천함에 있어서의 시사점을 얻고자 한다.

1. 드 모르간의 생애

본 장에서는 드 모르간의 법칙을 만들었고 그 용어를 도입한 최초의 사람이었으며 수학적 귀납법의 아이디어를 엄밀하게 만들었던 영국 수학자이자 논리학자였던 드 모르간의 생애를 Macfarlane A. (2006). Laith L. M. (1979)을 기반으로 간단히 언급하고자 한다.

드 모르간은 1806년 6월 27일 인도의 Madura(지금은 Tamil Nadu의 Madurai)에서 태어났다. 그의 아버지와 할아버지도 모두 인도에서 태어났는데, 그의 부친은 동인도 회사에서 여러 직책을 수행한 대령 De Morgan이었고 그의 어머니는 안티로 가리즘(anti-logarithms)의 표를 계산한 James Dodson의 후손이었다. 그의 아버지 드 모르간 대령은 세포이(Sepoy) 반란이 일어나자 드 모르간이 7개월 되었을 때 영국으로 재 이주하였다.



[그림 4] Augustus De Morgan (1806~1871)

드 모르간이 열 살 때 아버지가 돌아가셨고, 그 후 잉글랜드의 남서부 여러 지역에서 살게 되면서 초등교육을 여러 학교에서 받았다. 그의 수학적 재능은 14살이 될 때까지 알려지지 않았다. 또한 그는 발육부진으로 한쪽 눈이 보이지 않아 같은 또래의 아이들과 함께 어울려 놀지 않았으며, 그 이후까지도 줄곧 도서관에서 보내는 시간이 많았다.

드 모르간은 중등 교육을 옥스퍼드의 Oriel 대학의 Parsons으로부터 받았다. 그의 어머니는 성공회의 독실한 교인으로 아들이 성직자가 되기를 바랐으나 그는 성공회를 신봉하지 않았고 일생 종교적으로는 무심했거나 중립을 유지하였었기에 그의 어머니의 많은 걱정과 권유에도 불구하고 성직자로서의 삶을 살지 않았다.

1823년 드 모르간이 16살이 되면서 그의 관심은 고전 어학에서 수학으로 옮겨갔고,

16살에 캠브리지의 트리니티 대학에 입학하여 George Peacock 으로부터는 대수를 배우고 William Whewell로부터는 논리학을 배웠는데, 이 두 가지는 그의 평생의 가장 중요한 영향을 미치는 일이 되어 일생동안 논리학과 대수학의 연구에 이바지한 계기가 되었다. 또한 그는 어렸을 때부터 혼자 책 읽는 것을 즐겨 운동에 별다른 관심을 보이지 않았으며 대학에서도 운동 경기



[그림 5] 영국의 캠브리지 트리니티 대학 전경(본고 저자가 2007년 9월 캠퍼스를 방문하여 찍음)

에는 거의 참가하지 않았었다. 반면 음악을 대단히 좋아했을 뿐 아니라 플루트를 매우 잘 연주하여 음악 클럽활동에 열성이었고 재능도 보였다. 당시 수학 학위 시험으로 문학사 취득 여부가 결정되었는데, 드 모르간은 이 시험에서 상위 네 번째를 기록하였음에도 불구하고 신학 시험을 통과해야 학위 취득이 주어지는 것에 심한 반감을 느껴 포기해버렸다. 그는 종교와 학문적 자유에 대해 강한 신념을 가지고 있어서 이로 인하여 여러 차례 어려움을 겪었다. 그가 21세 때 잠시나마 학문이 끊길 위기에

있었던 것도 그러한 이유 때문이었다.

드 모르간은 졸업 후 대학에서 일자리를 구할 수 없게 되자 법정 변호사가 되기 위해 런던에 주거를 정하였으나 법률을 공부하는 것보다 수학을 가르치는 것이 자신의 적성과 더 잘 맞는다는 것을 깨달았다. 때마침, 종교적으로 중립적인 런던 대학이 세워졌고, 드 모르간의 학문적 능력을 높이 산 대학측은 22세인 드 모르간을 수학 교수에 임명하였다. 그러나 1831년에 대학 당국이 해부학 교수를 해고하는 사건이 발생하였는데, 드 모르간은 이러한 사건이 교수의 권한을 부당하게 침해하였다고 생각하고 교수직을 사직하였다. 그 후 드 모르간의 뒤를 이은 White 교수가 1836년 여름 방학 때 의사 사고로 세상을 떠나는 일이 발생하였다. 학생과 대학 측은 드 모르간이 다시 그 자리를 맡아주기를 요청하였고, 그는 급작스런 교수의 부재를 도와주기위해 그 해 크리스마스 때까지 강의를 맡아주려 했다. 그러나 결국 계속 남기를 바라는 대학측의 권유를 받아들여, 그 후로 30여 년 동안 그 대학에서 생애의 중대한 활동들을 하였다. 드 모르간이 교수로 재직하였던 런던 대학은 10년 후쯤 University of London의 교육대학으로 편입되면서 University College London으로 이름이 바뀌었다.

스코틀랜드 사람으로 과학과 정치에 탁월했고 런던 대학을 세웠던 Brougham경이 주도한 개혁단체는 '유용한 지식의 확산을 위한 학회(Society for the Diffusion of Useful Knowledge, SDUK)'을 설립하였다. SDUK의 설립 목적은 그 당시의 가장 훌륭하고 명료한 논문들을 과학 또는 다른 분야에 쉽게 확산시켜 지식 기반을 다지는 데 있었다. 여기에 가장 다작가이면서 영향을 많이 끼친 사람 중의 한 사람이 바로 드 모르간이었다. 그는 저작 「미분적분학The Differential and Integral Calculus」을 그 학회를 통해 발표하였고 Penny Cyclopaedia¹⁾의 논문 중 약 육분의 일을 저술하여 학회지에 여러 차례에 걸쳐 실었다.

드 모르간은 George Cambell이라는 아들이 있었는데, 그는 University College London과 University of London에서 수학에 대한 특별한 재능을 인정받았다. 드 모르간과 동창생들은 George Cambell과 함께 왕립학회(Royal Society)처럼 수학 논문을 투고 받아, 읽고 토론할 수 있는 런던의 수학회 설립하려는 뜻을 세웠다. 이를 위한 첫 번째 회의가 UCL에서 열렸으며 드 모르간이 제 1대 회장을 지냈고 그의 아들 George Cambell이 제 1대 총무(secretary)를 지냈다. 그것이 바로 런던수학회의 창시이다.

1866년 드 모르간은 University College London이 그 종교적 중립성이라는 오랜 전통이 퇴색되었다고 생각되자 즉시 교수직을 사임하였는데, 그 때 그의 나이 60세였다. 2년 후, 그의 아들 George가 죽었고 곧이어 1870년에 그의 딸 역시 먼저 세상을 떠나게 되었다. 드 모르간은 교수직의 사직과 연이은 자녀들의 죽음으로 정신적으로

1) Penny Cyclopaedia는 런던대학 후원 하에 SDUK에서 발행되었는데, 가난한 사람도 읽을 수 있도록 한다는 취지 하에 얇게 쪼개서 발행된 책자이다. 모르간은 수년에 걸쳐 712편의 논문을 여기에 발표한 바 있다.

어려움을 많이 겪었으며, University College London을 퇴직한 지 5년 후인 1871년 65세를 일기로 신경쇠약으로 세상을 떠나게 되었다.

2. 드 모르간과 수학교육

(1) 드 모르간의 업적

드 모르간은 관대한 성품의 소유자로 매우 친절하면서도 신념이 강했다고 하는데, 수학자로서는 대수학, 삼각법, 미적분학, 변분법, 확률론에 관한 교재를 저술하였다. 그의 저서 「삼각법과 이중 대수 Trigonometry and Double Algebra, 1849」는 현대 추상 대수학의 기초가 되었으며, 「확률론 소고 Essay on Probabilities, 1838」에서는 확률론에 관한 다양한 법칙을 발견하였다. 또한 수수께끼와 역설을 좋아했던 그는 「역설 모음집 A Budget of Paradoxes, 1872」을 출간하기도 하였다. 수학 분야에서의 그의 업적은 일일이 나열하기도 힘이 든 만큼 다양한 분야에서 방대한 업적을 남기었으나, 본 고에서는 다음의 논고에 따른 수학 교수법 분야에서의 그의 업적을 현대 수학 교수법의 관점에서 논하고자 한다.

드 모르간은 매우 정열적이고 뛰어난 수학 선생이었다. 한 시간을 강의하는 동안, 수업의 말미에 강의된 내용을 잘 보여줄 수 있는 문제와 다양한 예제를 과제로 내고 학생들은 이들을 풀어 그 결과를 제출하도록 하였는데, 다음 강의를 시작되기 전까지 이것들을 모두 읽고 나서 첨삭지도를 통해 틀린 부분을 교정하여 주고 생각을 넓혀주기 위한 제언을 달아주었다. 드 모르간의 견해로는 위대한 원리를 철저하게 이해하고 정신적으로 동화시키는 것이 설익은 이해를 하여 적용하는 단순한 해석적 기교의 숙련보다 훨씬 중요하다고 보았다.

Grattan-Guinness (1992)가 드 모르간의 수학교육에 대한 신념과 실천에 관하여 출간한 바 있었는데, 그에 따르면 드 모르간은 논쟁을 즐기는 사람이며 신문 기고가로써도 재능이 뛰어나고 위트가 넘치는 저술가로서 방대한 저작을 남겼다고 한다. 그의 저술로는 그가 가장 심혈을 기울여 연구한 논리학을 비롯하여 대수학과 해석학의 다양한 분야에서 연구 논문이 있으며, Encyclopaedia Metropolitana에 실린 두 권의 책의 분량에 해당하는 논문, SDUK가 발행하는 Penny Encyclopaedia에 실린 수백 건의 짧은 논문, 저널에 발표한 많은 서평, 여러 권의 역사서와 논문들, 많은 교과서, 특히 그가 교육에 관하여 처음 글을 쓰기 시작한 SDUK의 Quarterly Journal of Education을 비롯한 교육에 관한 논문 등 수 많은 분야를 망라한 다양한 저서들이 있다.

특히 교수직을 한 동안 사임하였던 시기인 5년 동안(1831-1836년)은 수학교육에 관해 중요한 저술 활동을 하였다. Quarterly Journal of Education은 1831-1835년에 10권의 책으로 발행되었고 드 모르간의 30여편의 논문들이 실려 있다. 여기에는 파리의 Ecole Polytechnique과 Oxford의 과학에서의 결과에 대한 논평과 대수, 수학의 다른

분야에 대한 서평, 그리고 수학의 기초 분야 교육에 대한 일련의 논문들을 포함하고 있다. 예를 들어 Quarterly Journal of Education(1833)의 'On teaching arithmetic'에서 "흔히 이 과목(arithmetic)은 쉽다고 생각하기 때문에, 만일 학생이 수의 개념을 쉽게 습득하지 못하면 그를 바보로 취급한다. 그러나 확신하건대 이것은 잘못된 생각이다. 만일 그렇지 않다면 미개 국가라 할지라도 실제적인 필요에 따라 셈법과 그것의 응용 지식을 가지고 있어야 하지만 실제로는 그렇지 않다."라고 하며, 아동들의 수 개념 형성에 대한 이해를 도우려하였다.

1831년에 드 모르간은 교육적 질문을 다룬 On the study and difficulties of mathematics를 SDUK에 출판하였다. 이 내용은 관련 글들을 더 모아 5년 후에 재 간행되었고 미국에서는 1902년 재판되었다. 이 책은 주로 산술과 대수를 다룬 것으로 음수의 인식론적 지위와 산술과 대수에서의 음수의 통합에 관한 것으로 교사들이 가질 수 있는 교육적 질문에 답하고자 한 것으로 교과서와 함께 쓰일 수 있는 것이었다.

On the study and difficulties of mathematics를 출판한 후 그는 그 당시 수학계의 주된 관심사였던 미적분에 주의를 돌려 저술활동을 시작했으며 1836에는 The differential and integral calculus를 SDUK에 발행하기 시작하였다. 이 책은 그가 쓴 책 중에서 가장 교재의 성격이 짙은 것으로, 가난한 자도 읽을 수 있도록 하자는 SDUK의 취지에 따라 1842년까지 24권으로 나뉘어져 출판되었다. 이 책은 미적분의 기초에서부터 당시 최신의 결과까지 다루었고, 그 당시 영국에서의 극한에 관한 개념의 변화를 엿볼 수 있는 귀중한 자료로 여겨지고 있다.

On the study and difficulties of mathematics의 마지막 부분은 논리학을 다룬 것으로, 드 모르간은 유클리드의 평행선 공준의 진리성과 증명 불가능성을 주된 이슈로 이론을 펼쳐나갔다. 이것은 1839년에 First notions of logic으로 발표되어졌고 1847년에 발행된 책 Formal logic의 앞 장에 그대로 실렸다. 드 모르간은 수학에서의 연역법의 모델이라고 할 수 있는 유클리드 기하와 아리스토텔레스의 삼단논법과 같이 수학과 논리학 사이의 관계를 2000여 년 만에 처음 탐구한 사람이며, 그것들 사이의 복잡한 관계를 밝혀내었다. 그는 1840년대에 술어의 양화(quantification of predicate)에 대해 중요한 역할을 하였고 1860년대에 관계의 일반적 논리를 도입하는 등 논리학에 중요한 공헌을 하였다.

Pycior H. M.(1983)에 따르면, 1820년대 말부터 1840년대에 이르기까지 영국의 대수학은 큰 변화를 겪었고 드 모르간은 Peacock과 Hamilton 등과 함께 영국의 대수학을 변모시킨 중심인물이었으며, Peacock과 Hamilton 중에서도 드 모르간은 이 대수학에서의 기호적 접근(symbolic approach)를 발전시킨 핵심 인물이었다는 것이다. 반면, 수학 내용에 대한 전통적인 강조와 수학의 교육학적 유용성을 고려하였기 때문에 기호적 접근은 대수적 내용에 대한 강조로 방향을 선회하게 되어 영국에서 19세기 초반에 추상 대수로의 발전이 더디게 되었다는 견해도 있다([14]).

(2) 드 모르간의 수학교육 철학

(가) 수학교육의 목적

드모르간이 생각하는 교육관이란 무엇일까?

드 모르간은 교육을 다 받은 대부분의 젊은이들에게 수학을 교육받은 것에 대한 의견을 들어본다면, 아마도 전통적인 수학 학습에서 기쁨은 어느 정도 얻었다 할지라도 그들에게 기억되는 수학의 본 면목은 힘들고 머리아픈 것이라고 말하는 것을 발견할 수 있을 것이라고 하였다([15]).

드 모르간의 수학교육의 신념과 특성은 그의 제자이자 후에 University College London에서 동료 연구가로서 활동을 한 Sylverster(University College London에서 드모르간에게 배운 제자였으며, 1838~41년 동안은 University College London의 교수였음)의 다음의 한 마디로 요약할 수 있다. “그는 수학을 가르치지 않았다. 그는 수학에 관하여(about Mathematics) 가르쳤다!([11], p.188)” 이는 드 모르간이 수학 그 자체의 중요성 못지않게 수학을 통해 우리가 얻어야 할 것이 무엇이며 추구해야 할 것이 무엇인지에 대한 그의 교육적 철학이 묻어 나온 것이라 할 수 있다. 그는 자유로운 교육의 장점은 독창성을 보장한다고 확신하였다. 또한, 시간이 지나면 학생들은 자신이 배운 외국어나 유클리드 이론을 잊어버리거나 그 기억들은 희미해질 수 있어도 그러한 교육을 통하여 남는 것은 그 배운 지식만이 아니라는 것이다. 교육을 통하여 정신을 가다듬고, 무엇인가에 엄격하게 적용할 수 있게 되며, 바르게 생각하고, 불확실한 것을 인지할 수 있고, 보다 현명하게 판단할 수 있게 되는 소위 말하는 잘 교육된 인간이 될 수 있는 것을 지향하였다. 또한 그는 지식을 과소평가한 것은 아니고, 지식을 가르쳐 나가야 하는 것은 당연한 것이나, 궁극적으로는 무엇보다도 바른 습관을 갖는 것에 관심을 두어야 하며, 얻어진 습관이 학생들을 좌우하게 된다는 것을 확신하였다([10]).

“어떤 학생이 모든 것을 잊어버렸다고 하자. 예를 들어 라틴어의 모든 단어와 유클리드 기하의 공준을 모두 잊어버렸다고 하자. 그에게 남은 것은 무엇인가? 만일 아무 것도 남지 않거나 거의 남지 않았다면 그에게 있어 교육은 교육이라고 불릴 가치가 없다. 그러나 그가 습득한 것으로 매일 기억할 필요가 없는 것을 잊어버렸다고 하더라도, 그가 잘 훈련된 정신을 가지고 있어서 그 지식을 활발하게 응용하고, 공정하게 생각하고, 사려 깊게 의심하며, 현명하게 결정할 수 있다고 한다면 그는 잘 교육받은 것이며 그가 습득했던 구체적인 지식을 잊어버렸다고 해도 그것은 작은 일에 불과하다” -1853년 11월 Michael Foster 교수에게 보낸 편지에서([10], pp222-223).

(나) 수학 교수·학습의 목적

Rauff(1992)에 의하면, 드 모르간은 궁극적인 수학 교수·학습의 목적은 어떤 것을 추론하는 힘에 있다고 여겼다고 한다. 어떤 것을 추론하기 위하여서는 기초가 되는 기술을 익히고 지식을 습득하여야 하는 것은 분명하나, 결국은 필요한 것을 추론해

내고 그것을 적용해 낼 수 있도록 하는 것에 초점을 두어야한다는 것이다. 가령, 유클리드 논리는 상당히 정교하고 무려 이천년에 걸쳐 발전돼오면서 의심할 여지가 없을 만큼 완벽하다 할 수 있다고 보았는데, 기하학 원론(*Elements of Geometry*)이나 삼단 논법(*sylogism*)과 같은 것의 도움으로 우리는 논리를 발전시켜 나갈 수 있었던 것이 사실이고, 삼단논법과 같은 것을 이용하여 어떤 것을 증명하기 전에 그 사실이 당위성이 있음을 물론 먼저 알아야한다는 것이다. 그러나 자신과 같은 수학자들도 처음부터 추론 능력들이 갖추어져 어떤 내용들을 추론하는 게 가능하였던 것은 아니라고 하였다([15]).

따라서 어떤 정신이나 물질의 성질들을 학습하거나, 언어를 배우고, 수학이나 역사를 배워나가는 것들도 결국은 마찬가지로 이러한 목적 하에 있다는 것이다. 학생들은 여러 가지 많은 수단들, 가령, 측정이나 시각적 증명들을 이용하여 어떤 것이 사실인지 거짓인지를 밝혀내는 과정을 거쳐나가야 하며 이러한 활동들은 결국 어떤 것들을 제대로 추론할 수 있는 힘을 키워나가는 일련의 과정이라는 것이다. 눈에 보이는 것만 아니라 볼 수 없는 것들도 인간의 무한한 상상력을 발휘하여 배우고 추론해나가는 과정을 배우는 것이 바로 교육이라는 것이다.

“상상하는 것(*imagine*)은 머리속에서 어떤 이미지를 만들어 내기 위한 활동이다. 그러나 그것은 개념을 형성해 나가기 위하여 구체적으로 마음속에서 그려나가는 것으로 표현되어 왔다. 지구에서 태양까지의 거리는 개념이다. 그것에 대한 이미지를 나는 갖고 있지 않다. 그러나 6 피트(*feet*)는 눈을 감고도 그것에 대한 이미지와 개념 모두를 가지고 있다. 많은 사람들이 어떤 것을 상상할 수 없기 때문에 그것을 인지하는 것이 불가능하다고 말한다. 그러나 무한한 우주를 상상할 수 없지만 우리 모두 그것에 대한 개념을 갖고 있다고 생각된다. 무한(*infinity*)이라는 개념을 갖기 위하여 수를 계속해서 더해가는 활동을 통해 끝에 다다른 것이 불가능하다는 것을 인지해 나간다. 그러나 이러한 과정은 어찌 보면 반대의 활동이다. 무한이라는 개념을 우리가 갖고 있지 않다면 끝이 없음을 알지 못한다. 어느 누가 실제로 10,000,000,000,000,000까지 세어 보았겠는가? 아무도 없을 것이다. 만일 10^{16} 이 단지 기호에 불과하다고 확신한다면 이걸 자연 세계에 접목하려고 시도하는 사람이 있다면 무한이라는 개념을 가져오기 위해서 다른 어떠한 장치가 필요할 것이다. 따라서 내가 확신하는 바는, 무한이란 것은 공간과 시간에 대한 의식과도 유사한 실제적인 주제인 것이다. 따라서 ‘무한히 작은’ 또는 ‘무한히 큰’에 대한 개념은 유한한 공간에서 시작하여 다룰 수 있을 것이다.”([10], p.313)

또한, 어떤 자석의 성질을 처음 배웠다면, 그 다음 반드시 필요한 것은 이러한 자석이 항해에서 쓰이는 것에서부터 생각이 미치는 여러 분야에 이르기까지 어떻게 사용될 수 있는가를 생각할 수 있고, 또한 이러한 자석이 영향을 미치는 구간이 어느 정도인지를 알아내야 한다는 것이다. 바로 이러한 것이 추론의 힘이라는 것이다. 어떠한 사실을 전적으로 참으로 받아들이기 이전에 추론 과정이 있어야 하고, 이것들은 다른

수단들에 의해 우리가 추론한 결과들이 참인지 거짓인지 판명되어야 한다. 그렇다면 수학은 이러한 목적을 위한 가장 좋은 도구라 할 수 있다고 하였다. 어떤 결과가 추론에 의해 얻어진 후에 그것이 사실인지 거짓인지 판명되어 질 수 있는데, 가령, 기하에서는 실제 측정에 의해서 얻어낼 수 있고, 대수는 일반적인 산술 계산에 의해서 밝혀질 수 있다는 것이다. 이러한 것들은 학생들에게 어떤 지식에 대하여 확신을 주기 때문에 절대적으로 필요한 과정이라는 것이다. 그러나 드 모르간이 주장한 추론 과정은 가르치는 사람에 의해 이끌어진 것이 아니라 학습자에 의해 일어나가게 되는 것이 강조되었다([4]).

드 모르간은 당시에 수학을 너무나 기계적으로 하는 경향들이 있다고 보았고, 이런 경향들이 특히 초등과정에서 많이 나타나는 것에 대하여 우려하였다. 문제를 풀기 위한 수치들만 끄집어내어 공식에 넣고 답을 산출하는 이른바 정형화된 문제에 익숙해져 있는 것을 걱정하였다. 그는 기계적이고 반복적인 수학 연산 과정을 배틀에서 섬유를 짜는 과정과 비교하며, 결과를 빠르고 정확하게 내는 데는 효과적이나 정신을 수양하고 두뇌를 개발하는 데는 무효함을 주장하였다. 새로운 아이디어는 결코 어떤 오래된 지식을 숙달하는 것에서 나오지는 않는다는 확고한 주장을 펴며, 억지로 밀어넣는 지식의 한계를 느끼게 될 시대가 곧 도래할 것이라는 신념을 갖고 있었다(De Morgan, 1915).

뿐만 아니라, 수를 처음 배우는 아동들에게도 관심을 가졌었는데, 사람들은 수 계산이 쉽다는 일반적인 통념 하에 수 계산을 제대로 못하는 아이들을 영리하지 못한 것으로 취급해 버리곤 한다고 하면서 이러한 것들이 잘 못 된 것들임을 강력히 피력하였다. 그는 부모들이 정확한 하나의 개념이 형성되기 전에 얼마나 많은 실패의 경험들이 있었으며 얼마나 많은 불안정한 시도들이 이루어졌는지를 알아야 한다고 하였다. 또한 유아들이 부모의 말을 흉내 내면서 “파파papa”, “맘마mamma”라고 했을 때는 마치 아이가 장성해서 데모스테네스Demosthenes가 될 것처럼 너무나 기뻐하고 기대하지만 수학에 대해서는 그렇지 못하다는 것이다. 게다가 약간의 실수에도 아이들이 수학에 재능이 없는 것으로 취급하며 아이들에 대한 높은 기대는 커녕 자신감을 꺾어 놓기 일쑤라고 하였다([3]).

또한 연습과 훈련 역시 학생들의 수준에 맞는 수학적 규칙과 이를 통한 추론을 해 나갈 수 있도록 해 나가는 데 그 의의가 있다고 보았다([5]).

대부분의 어린 학생들은 수학적 내용을 일반화하여 진술하는 것이나 어떤 새로운 내용에 대한 추론을 시도하는 것에 두려움을 갖고 있다. 대수 내용 그 자체를 배우는 것 보다 추론하는 것을 배우는 것이 더 필요하다고 확신할 수 있다. 그러나 어린 학생들에게 기본적인 수학 내용을 너무나 형식화된 내용으로 배우고 익히며 따르도록 하는 것이 일반적이라 할 수 있는데, 학생들이 증명의 본질을 알 수 있도록 학생의 수준에 맞게 추론해 나갈 수 있도록 지도해야 한다.”([5], pp.278-279)

(3) 드 모르간의 수학교수법

드 모르간이 학생들의 추론 능력과 그가 생각하는 수학교육 본연의 목적을 달성하기 위하여 수학을 가르치면서 그가 행하였던 다양한 교수법 중 오늘날 우리가 다시 한 번 되짚어 봄 직한 내용을 간단히 언급하고자 한다.

(가) 상황 학습과 반성적 사고 유발

드 모르간은 익숙하지 않은 추론 과정을 학습하는 것은 전적으로 생소한 물질을 다루는 것과 같다고 하였다. 학생들이 자신이 속해있는 세계, 자기와 관련이 있는 어떠한 사건이나 일과 연관된 예를 가지고 배우는 것은 훨씬 친숙함과 편안함을 느낄 수 있으나 그렇지 못한 경우는 전혀 동떨어진 관계로써 인식될 뿐 아니라 사고의 모순, 어려움, 불균형을 초래하게 될 수 있다고 하였다. 그러나 한편, 관련된 용어가 일상적이지 못한 이름일 경우에는 아무리 그 경우가 일반적이라 할지라도 관계를 파악하는데 어려움을 준다는 것이다.

“내가 신문에서 찾은 한 예에 불과하나 이러한 일이 실제로 있을 수 있다고 확신한다. 어떤 학교에서 교사와 학생들 간에 벌어지는 다음의 대화는 추론을 처음 배우는 학생들에게 능히 있을 수 있는 일이다:

교사: 썸과 햄과 제퍼스는 노아의 아들이었다. 누가 썸과 햄과 제퍼스의 아버지인가?

학생: (대답 없음)

교사: 애들아 우리학교 목수아저씨 스미스씨가 아들이 있지?

학생: 네 맞아요. 빌과 벤이란 아들이 있어요.

교사: 그래. 그럼 빌과 벤의 아버지는 누구니?

학생: 당연히 스미스씨지요.

교사: 그래 그럼 다시 예전으로 돌아가서, 썸과 햄과 제퍼스는 노아의 아들이었다. 누가 썸과 햄과 제퍼스의 아버지이지?

학생: (한동안 아무 말 없다가 한 소년이 속임수라고 여기고 소리친다.) 어떻게 그들의 아버지가 스미스씨일 수 있어요?”([9], pp.211-212).

드 모르간은 재미있는 한 에피소드를 가지고, 한 번도 아버지와 아들의 관계를 바꾸어 생각해 본 경험이 없었기 때문에 추론 관계를 이해하는 것에 대한 어려움을 가질 수 있다는 예를 들며, 상황의 중요성을 강조하였던 것이다.

한 가지 더 예를 들면, 드 모르간은 학생들은 어떤 이론에 의해서가 아니라 자신의 경험에 의해 음수의 개념을 형성해나갈 수 있어야 한다고 하였는데, 주위의 많은 상황들을 관찰함으로써 규칙과 의미를 발견할 수 있어야 진실로 음수에 대한 개념이 성립한 것이라고 하였다([6],[15]). 또한 분수의 개념에서도 그와 같은 견해를 피력하였는

데, 학생은 $5/6$ 가 1을 6으로 나눈 것 중의 다섯 개라는 것, 또는 5의 6번째 조각이라는 것을 생각해낼 수 있어야 한다는 것이다. 이러한 추론이 가능하기 위해서는 특별한 주변의 친숙한 예를 통해서 반성적 사고를 거쳐 사고가 확립될 수 있는 일련의 추론과정을 거쳐야 한다고 하였다([6],[15]). 또한 이러한 추론과정을 구체화시키는 과정 속에서, 예를 들어 이와 같은 제곱근 계산에서 규칙을 찾았다고 하면, 학생에게 맹목적으로 믿도록 강요하는 것이 아니라 손에 펜을 쥐고 실제로 그렇게 되는지를 직접해보도록 해야 한다는 것이다([6],[15]).

(나) 확장과 일반화

“우리가 기존의 것들 위에 새로운 개념을 받아들이는 것은 어려운 것이 사실이다. 수를 처음 배우는 아동들에게 수의 일반적인 개념들을 한 번에 확장시켜서 이해시킬 수 있다면 더할 나위없겠으나 우리의 인지적 구조는 이러한 것들이 불가능하다. 어떠한 사실이나 원리들을 하나씩 차례로 인지하고 난 후에 소위 말하는 일반적 개념에 도달하게 되어있다. 또한 우리는 어떤 사실을 비교함에 따라서 어떤 사실을 받아들이고 발견하는 과정에 이를 수 있는 것이다. 학생들은 지식을 섬유의 울처럼 한 올 한 올 꼬아 결국 확장이란 단계에 오를 수 있는 것이다. 처음에는 한정된 관점과 부분적인 연습만이 있을 수밖에 없으며 부분적인 용어밖에 배울 수 없지만, 나중에 다 배우고 난 후에는 반드시 앞의 개념을 뒤돌아 볼 필요가 있다. 그렇게 되면 부분적으로 배워온 내용의 과정들을 통찰해 볼 수 있을 뿐 아니라 서로 다른 규칙들을 연결시켜 나감과 동시에 전체적인 관점을 얻어나갈 수 있다는 것이다. 이러한 과정에서 주의할 점은 용어인데, 확장시켜 나가야 할 혹은 서로 대칭되는 개념들에 대한 용어가 전혀 생소하면 혼동을 초래한다는 것이다. 따라서 우리는 두 가지를 하나의 의미로 통합할 수 있도록 전체적으로 연결성이 있고 확장된 용어들을 붙여나갈 필요가 있다. 또한 우리가 어떤 규칙을 발견하고 적용시켜 나갈 때, 이러한 과정들이 전체적인 일반적인 과정 중 어느 일부분임을 밝혀 둘 필요가 있다. 그리하여 다른 모든 경우들이 처음의 경우와 일관성 있게 적용이 가능하며 부분적 과정이 나중에는 좀 더 일반적인 과정이 되도록 통합할 필요가 있다.”([2],[4])

19세기 후반은 자연수의 기본적인 성질이 일반화되어 추상적인 대수체계의 공리로 자리 잡게 된 시기였다. 1930년 영국의 G. Peacock는 자신의 저서 *Treatise on Algebra*에서 ‘산술대수(arithmetic algebra)’와 ‘기호대수(symbolic algebra)’를 구분하고 산술대수에서 기호대수로의 확장을 피하였다. 드 모르간 역시, 일반화된 대수적 원리에 따라 수의 계산 방법을 이끌어 낼 수 있도록 지도할 것을 주장하였으며, 연산은 자연수의 연산의 성질이 유지하면서 일반성을 갖도록 확장시켜 나갈 것을 주장하였다.

다) 치유적 인터뷰

드 모르간의 수업은 반영적 메타-담화(reflexive meta-discourse)로 항상 시작되었는데, 그의 이러한 교수법은 후에 영국의 중기 빅토리아여왕(mid-Victorian) 시대 동안 다른 교수자들에게 중대한 영향을 주었다([1]). 또한 드 모르간이 대화법을 이용하여 수학을 지도할 때, 주로 학생의 수학에 대한 이해에 관심을 가졌다. 그는 옳은 답에는 표시를 해주고, 단순 잘못에는 짚막한 수정을 해주되, 원리에서 잘못이 있을 경우에는 불러서 대화를 나눔으로써 학생이 갖고 있는 오류와 사고로부터 시작하여 이를 교정하고자 하였다([10],[15]).

8살 넘짓 된 딸과 다음과 같은 대화를 나눈다.

Q: 이 돌맹이를 여기서 놓으면 어떻게 되지?

A: 아래로 당연히 떨어지죠.

Q: 항상?

A: 항상.

Q: 그것을 어떻게 알지?

A: 당연한 것이니까요.

Q: 그것을 어떻게 확신하지? 북극에서 해본다고 해도 그렇게 될까? 북극에 가 본 사람은 아무도 없는데?

A: 북극에 아무도 가보지 않았다면 북극에 아무도 살지 않는다는 것을 어떻게 알지요?

Q: 북극 근처에는 있지, 그러나 북극에 가 본 사람은 아무도 없지.

A: 그렇지만 북극에도 같은 땅과 같은 공기가 있을테니. 더 춥거나 덥다고 해서 다른 공기를 만들어 돌맹이가 떨어지는 것을 막을 수는 없죠.

Q: 7과 3을 더하면 얼마가 되지?

A: 당연히 10이지요.

Q: 여기서만 아니면 북극에서도?

A: 당연하죠.

Q: 어떤 게 가장 확실할까? 돌맹이가 아래로 떨어지는 거? 아니면 7과 3이 10이 되는 거?

A: 둘 다 확실하지요.

Q: 돌맹이가 위로 올라가는 거 상상해 봤니?

A: 그건 불가능해요. 새가 돌맹이를 물고 놓치지 않고 꼭 물고 올라가면 되죠.

Q: 북극에서는 7과 3으로 12를 만들 수 있겠니?([10], pp.197-198)

그는 도전적이고 어떤 확실성을 유도할 수 있는 질문을 통해서 아이가 자신의 생각에 대한 증거와 확실성을 찾아나갈 수 있도록 이끌어 나갔다.

3. 마치는 말

수학자이자 논리학자였던 드 모르간은 논리의 형식과 기하의 추론을 통합하자고 줄기차게 노력하였으며, 논리학을 교육의 일부로 체계적으로 다루는 것이 유익하다고 확신하고 이를 위해 많은 노력을 기울였던 사람이다([6],[15]). 또한 이에 못지않게 훌륭한 수학교사로서도 이름을 날렸던 사람이다. 그의 학생 중 한 명이었던 Sedley Tayler는, 드 모르간의 설명은 여러 측면에서 탁월하였으며 엄청난 독서와 놀랄만한 기억력으로 항상 많은 예를 들어 설명하였고 그 설명은 명료하면서도 생동감 있고 압축되어 있다고 술회하였다([10],[15]). 뿐만 아니라 그는 설명함에 있어서도 학생들의 입장에서의 세심한 배려를 항상 잊지 않았다고 한다. 가령 대수에서의 한 예를 들어 보면, 대수의 새로운 기호를 학생에게 한꺼번에 모두 설명해서는 안 된다는 것이다. 예를 들면 먼저 aa , aaa 등을 사용하고 a^2 와 a^3 은 각각 $2a$, $3a$ 와 서로 혼동을 일으킬 염려가 없을 때 사용하여야 한다([7],[15])고 말할 만큼 “학생의 수학”을 이해하려 애쓰고, 늘 바로 거기서부터 수학교수가 시작되었다.

드 모르간은 절친한 친구인 William Frend의 딸 Sophia Elizabeth와 결혼하였다. 그의 아내 Sophia Elizabeth De Morgan은 드 모르간이 세상을 떠난 후, 드 모르간을 가장 가까이에서 지켜보면서 그의 성격과 삶을 자세히 기술한 한 권의 책을 출간하였는데, 이것이 바로 드 모르간의 일생과 업적에 대하여 기록된 「Memoir of Augustus De Morgan(1882)」이다. 이 책에서 그의 아내 Sophia는 드 모르간이 30여 년 동안 교실에서 학생들에게 철학적·심리학적 원리와 근본을 긍정적으로 심어주기위하여 노력하였다고 기술하고 있다. 수학적 원리는 바로 이러한 목적으로 사용될 수 있으며, 정신적 구조를 형성하는 데 가장 효과적이라고 믿었으며, 또한 인간은 지적이고 능동적인 창조물인 만큼 사물의 성질을 탐색하고 영원한 사고의 법칙을 강조하였다고 한다. 우리보다 200여년 앞서 수학을 가르쳤던 그의 사상과 교수법을 통하여 오늘날 우리가 학생들에게 수학을 왜 가르치며, 또 어떻게 가르쳐야 하는가에 대한 중요한 시사점들을 얻을 수 있다고 여겨진다.

마지막으로, 드 모르간은 오늘날 우리가 겪고 있는 수학 교육의 딜레마인 ‘경쟁의 불합리성’에 대하여 언급한 바가 있는데, 여기서의 그의 생각을 들여다봄으로써, 그의 교육에서의 가치관을 빌어 교사가 갖추어야 할 자질을 반추해 보고자한다.

일등이 되기 위해 분투하는 학생이나 그 분투 속에서 괴로워하는 학생들 모두에게 필요한 것은 배움에 있어서의 즐거움이라는 자극이다... 만일, 학생들로 하여금 즐거움을 느끼게 할 수 없다면 그는 교사라고 불릴 자격이 없다. ...교사의 철학적 입장을 옹고 그름으로 나누는 기준이란 애매하며 편협될 수 있다. 그것은 어찌 보면 유클리드의 공리처럼 누가 봐도 자명하고 명백한 진실은 될 수 없을지 모른다...그러나 한

가지 분명한 사실은 지적인 연습에 그 가치를 두어야 한다는 것이며, 교사를 선정할 때에도 단지 어떤 학교 출신 등과 같은 극히 추상적인 배경이 아닌 여기에 초점을 맞추어 능력 있는 후보자인가를 판단해야 한다([10], pp349-350).

참고 문헌

1. Anderson, R., *Augustus De Morgan's Inaugural Lecture of 1828*. The Mathematical Intelligencer 28(3), 19-28(2006).
2. Arcavi, A., Bruckheimer, M., *The Didactical De Morgan: a Selection of Augustus De Morgan's Thoughts on Teaching and Learning Mathematics*. For the Learning of Mathematics, 9(1). 34-39 (1989).
3. De Morgan, A., *On Teaching Arithmetic*. The Quarterly Journal of Education 5, 1-16. (1833).
4. De Morgan, A., *On the study and Difficulties of Mathematics*. London: The Open Court Publishing Co. (1898).
5. De Morgan, A., *A Budget of Paradoxes*. London: The Open Court Publishing Co. (1915).
6. De Morgan, A., *The Study and Difficulties of Mathematics*, Open Court Publishing. (1943).
7. De Morgan, A., *On mathematical instruction*, The Quarterly Journal of Education, 1, 264-279. (1831).
8. De Morgan, A., *On the method of teaching geometry II*, The Quarterly Journal of Education, 6, 237-251. (1833).
9. De Morgan, A., *On the Syllogism and other Logical Writings*. London: Routledge & Kegan Paul. (1966).
10. De Morgan, Sophia, E., *Memoir of Augustus De Morgan*, Longmas, Green, and Co. (1882).
11. Halsted, G. B., *De Morgan to Sylvester*. The Monist, 10, p.188. (1900).
12. Laith L. M., *Influences on Boole's Logic: The Controversy between William Hamilton and Augustus De Morgan*, Annals of Science, 36, 45-65. (1979).
13. Macfarlane A., *Ten British Mathematicians of the 19th Century*, February, 2006 [EBook #9942], The Project Gutenberg EBook. 10th edition. 9-18. (2006).
14. Pycior H. M., *Augustus De Morgan's algebraic work: the three stages*, Isis 74. p.272. (1983)
15. Rauff, J. V., *Augustus De Morgan on the Teaching of Mathematics*, The

- Mathematical Gazette, 76(475), 97-99. (1992).
16. Rice, A., *Augustus De Morgan: historian of science*. History of Science, 34, 201-240.
 17. Smith, D. E., *History of Mathematics*. Vol. I. New York: Dover Publications Inc.,
 18. Smith, G. C., *The Boole-De Morgan Correspondence 1842-1864*, Oxford: Clarendon Press. (1982).
 19. http://faculty.ed.uiuc.edu/westbury/paradigm/grattan_grattan_guinness.html.
 20. Grattan-Guinness I., *An eye for method: Augustus De Morgan and mathematical education*, Paradigm, 9. (2009.08.23). (1992).

De Morgan's Thoughts and Pedagogics of Mathematics Education

Korea Institute of Curriculum and Evaluation **Hong chan Son**

Korea Institute of Curriculum and Evaluation **Ho kyung Ko**

In the nineteenth century was Augustus De Morgan, British mathematician, a great mathematics teacher. Although his name is well known to everybody who is interested in set theory, his major mathematical legacy would arise from his novel research in logic. In this article, we first investigate De Morgan's life briefly; we then consider his precious philosophy of mathematics education based on his students' remarks and his works. Finally, by considering his teaching style, we highlight some of the ingredients that go into making a great mathematics teacher.

Key words : De Morgan, achievements, teaching methods

2000 Mathematical Subject Classification : 01A30, 01A50

논문 접수 : 2007 년 10월 30일

심사 완료 : 2007 년 11월 20일