한국수학사학회지 제20권 제4호(2007년 11월), 105 - 122

Erdös-Mordell 부등식에 대한 연구들의 분석

경상대학교 한인기
inkiski@gsnu.ac.kr

본 연구에서는 Erdös-Mordell 부등식에 대한 관련된 연구들을 다양한 증명 방법에 대한 연구들, 다양한 평균에 관련된 연구들, Erdös-Mordell 유형의 부등식에 대한 연구들로 연구 방향을 분류하고, 이들을 분석하였다.

주제어 : Erdös-Mordell 부등식, Erdös-Mordell 유형의 부등식, 평균

0. 서론

수학의 역사는 수많은 수학자들의 탐구와 발명의 역사이다. 김용운([2])은 수학의 창조적 연구들에 대한 수학사적인 고찰이 뒤따라야 하며, 이를 통해 수학 발전의 과정의 규칙성을 얻을 수 있다고 하였다. 즉, 수학자들에 의해 발명된 수학적 개념들, 정리들이 어떤 형태로 변형되고, 어떤 개념들과 연결되어 어떤 방향으로 발전되는가에 대한 체계적인 고찰은 수학사 연구의 중요한 주제들 중의 하나가 될 것이다.

최근 들어, 국내의 다양한 연구들에서 수학의 구체적인 개념들, 정리들에 대한 수학사적 고찰을 폭넓게 수행하고 있는 것은 수학사적 측면뿐만 아니라, 수학교육의 측면에서도 가치로운 접근이라 할 수 있다. 예를 들어, 김성숙([1])은 e의 역사적 기원과 그 의의를 밝혔으며, 정문자([5])는 비버바흐 추측과 루퀴켕 추측에 대한 역사적 고찰을, 이종희([4])는 원뿔곡선 이론의 발달에 대한 역사적 고찰을, 김주영, 김성숙([3])은 영의 역사와 영에 얽힌 오류들을 연구하였다. 이들 연구를 통해, 관련된 수학적 개념들, 추측들의 발생, 발전에 대한 폭넓은 고찰이 이루어졌다.

본 연구에서는 삼각형의 내부점에서 변들까지의 거리의 합과 꼭지점들까지의 거리의 합의 관계를 나타내는 Erdös-Mordell 부등식에 대한 다양한 연구들을 분석할 것이다. 20세기의 유명한 수학자인 Paul Erdös는 1935년 The American Mathematical Monthly에 다음과 같은 문제를 게재하였다([10, p.396]).

주어진 삼각형 ABC의 내부에 있는 점 O로부터 변들에 수선 OP, OQ, OR을 그었다. $OA+OB+OC \geq 2(OP+OQ+OR)$을 증명하여라.

이 부등식에 대한 증명 방법은 Mordell, Barrow에 의해 처음으로 1937년에 The American Mathematical Monthly에 각각 게재되었으며, 후에 Erdös 부등식은 문제해결자인 Mordell의 이름을 덧붙여 Erdös-Mordell 부등식이라 불리고 있다.

본 연구에서는 Erdös-Mordell 부등식에 관련된 다양한 연구들을 분석하여, 어떤 연구들이 수행되었으며, 어떤 개념들과 관련되어 발전되어 왔는가를 고찰할 것이다. 본 연구에서는 Erdös-Mordell 부등식에 관련된 연구들을 다양한 증명 방법에 대한 연구들, Erdös-Mordell 부등식과 평균들에 관련된 연구들, Erdös-Mordell 유형의 부등식에 대한 연구들로 연구 방향을 분류하여, 이들에 관련된 구체적인 연구들을 분석할 것이다. 본 연구의 결과를 통해, Erdös-Mordell 부등식에 관련된 다양한 연구들을 체계적으로 정리하며, 이것의 발전 방향에 대한 시사점을 얻을 수 있을 것으로 기대된다.

1. Erdös-Mordell 부등식의 증명 방법들

Erdös-Mordell 부등식에 대한 많은 증명 방법들이 알려져 있으며, 최근에도 몇몇 학술지에서 새로운 증명 방법이 소개되고 있다. Erdös-Mordell 부등식의 증명 방법을 증명에 사용된 개념들, 방법들을 중심으로 몇 가지로 분류할 수 있는데, 첫째 Mordell의 방법([17]), Bankoff의 방법([7]), 둘째 Barrow의 방법([8]), Gotman & Skopets의 방법([12]), Dinca & Bencze의 방법([9]), 셋째 Kazarinoff의 방법([14]), Prasolov의 방법([19]), Komornik의 방법([15]), Shklyarski, Tsentsov & Yaglom의 방법([22]), Avez의 방법([6]), Lee Hojoo의 방법([16]) 등이 있다. 이들 증명에 사용된 수학적 생각들, 개념들, 정리들을 분석하고, 이들 방법의 유사점 및 차이점을 살펴보자.

(1) Mordell의 증명 방법

1937년 The American Mathematical Monthly에 Mordell, Barrow는 Erdös 부등식에 대한 자신의 증명 방법을 각각 게재하였다. Mordell([17, p.252])의 증명 방법을 살펴보자.

삼각형 ABC의 내부점 O로부터 변 BC, CA, AB에 내린 수선 OP, OQ, OR의 길이를 x, y, z, 선분 OA, OB, OC의 길이를 a, b, c라 하자. 이때, α, β, γ를 삼각형의 각들이라 하면, 다음이 성립한다.

$$QR = (y^2 + z^2 + 2yz\cos\alpha)^{1/2}, \quad a = QR/\sin\alpha$$

이로부터, 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} a+b+c &= \sum_{\alpha,\beta,\gamma} (y^2+z^2+2yz\cos\alpha)^{1/2}/\sin\alpha \\ &= \sum [(y\sin\gamma+z\sin\beta)^2+(y\cos\gamma-z\cos\beta)^2]^{1/2}/\sin\alpha \\ &\geq \sum (y\sin\gamma+z\sin\beta)/\sin\alpha = \sum x\left(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}+\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right) \\ &\geq 2(x+y+z). \end{aligned}$$

그러므로 부등식이 증명된다. □

Mordell의 증명과정을 다음과 같이 분석할 수 있다.

① QR을 y, z, $\cos\alpha$로 나타내고, $a=QR/\sin\alpha$을 유도한다.

② b, c를 PR과 $\sin\beta$, PQ과 $\sin\gamma$로 각각 나타낸다.

③ $a+b+c$를 x, y, z, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$로 나타낸다.

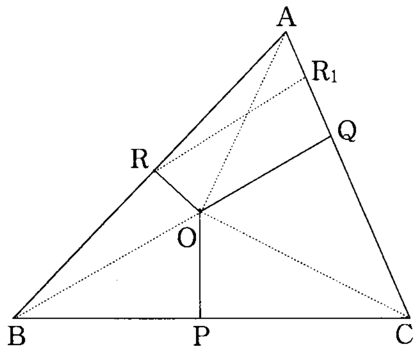
④ 식 $y^2+z^2+2yz\cos\alpha$를 $(y\sin\gamma+z\sin\beta)^2+(y\cos\gamma-z\cos\beta)^2$로 변형시킨다.

⑤ $(y\sin\gamma+z\sin\beta)^2+(y\cos\gamma-z\cos\beta)^2 \geq (y\sin\gamma+z\sin\beta)^2$을 이용하여 식을 정리한다.

⑥ $\left(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}+\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right)\geq 2$을 이용하여, 부등식을 증명한다.

Mordell의 증명은 간결하지만 함축적으로 기술되어 있다. Mordell의 증명 과정을 상세히 살펴보자. QR을 y, z, $\cos\alpha$로 나타내려면, 사각형 $AROQ$의 내각의 합이 360°, $\angle A+\angle ROQ=180°$, $\angle ROQ=180°-\angle A$라는 것과 삼각형 ORQ에 대한 코사인 정리를 이용해야 한다.

실제로, $RQ^2=OR^2+OQ^2-2OR\cdot OQ\cos\angle ROQ$이고 $RQ^2=y^2+z^2+2yz\cos\alpha$이므로, $QR=(y^2+z^2+2yz\cos\alpha)^{1/2}$이 얻어진다.



<그림 1>

이제, $a = QR/\sin\alpha$을 유도하자. <그림 1>에서 각 AQO, ARO가 직각이므로, 사각형 $AROQ$는 원에 내접한다. 그리고 각 RAO와 RQO는 같은 호에 대한 원주각이므로, 이들은 서로 같다. 이제, 점 R에서 변 AC에 수선 RR_1을 그으면, 각 RQO과 QRR_1은 평행한 직선에서의 엇각이 되며, 이들은 서로 같다. 결국, 삼각형 OAR과 QRR_1은 닮음이며, $RR_1 : AR = QR : AO$가 성립한다. 그런데, 삼각형 ARR_1에서 $\sin\alpha = \frac{RR_1}{AR}$이므로, $\sin\alpha = \frac{RR_1}{AR} = \frac{QR}{AO}$가 성립한다.

이제, $QR = (y^2 + z^2 + 2yz\cos\alpha)^{1/2}$에서 $y^2 + z^2 + 2yz\cos\alpha$을 완전제곱의 합으로 나타내는 방법을 살펴보자. $\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$이므로, $y^2 + z^2 + 2yz\cos\alpha = y^2 + z^2 - 2yz\cos(\beta + \gamma)$이다. 한편, $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$, $\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1$이므로, 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} y^2 + z^2 - 2yz\cos(\beta+\gamma) &= (\sin^2\gamma + \cos^2\gamma)y^2 + (\sin^2\beta + \cos^2\beta)z^2 - 2yz\cos(\beta+\gamma) \\ &= (\sin^2\gamma + \cos^2\gamma)y^2 + (\sin^2\beta + \cos^2\beta)z^2 - 2yz(\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma) \\ &= y^2\sin^2\gamma + 2yz\sin\beta\sin\gamma + z^2\sin^2\beta + y^2\cos^2\gamma - 2yz\cos\beta\cos\gamma + z^2\cos^2\beta \\ &= (y\sin\gamma + z\sin\beta)^2 + (y\cos\gamma - z\cos\beta)^2. \end{aligned}$$

결국, Mordell의 증명에서는 첫째, 원에 내접하는 사각형 $AROQ$, $BPOR$, $CQOP$에서 크기가 같은 원주각들을 이용하여 삼각형들의 닮음을 유도하였고, 둘째 식 $y^2 + z^2 + 2yz\cos\alpha$를 제곱들의 합으로 변형시켰고, 셋째 산술평균-기하평균의 부등식을 이용하여, Erdös 부등식을 증명하였다.

(2) Bankoff의 증명 방법

Erdös-Mordell 부등식에 대한 Mordell의 증명 방법은 Bankoff에 의해 개선되었다. Bankoff의 접근 방법은 Mordell과 같이 사각형의 내접, 삼각형의 닮음을 이용하였지만, Mordell의 방법에 비해 훨씬 간결한 방법을 제시하였다. Bankoff([7, p.521])의 증명 방법을 살펴보자.

삼각형 ABC의 임의의 내부점 O로부터 변 BC, CA, AB로 수선을 내려 그 발을 P, Q, R이라 하자. 이제, RQ, PR, QP를 BC, CA, AB로 각각 사영시켜 P_1P_2, Q_1Q_2, R_1R_2라 하자. 그러면, 다음이 성립한다.

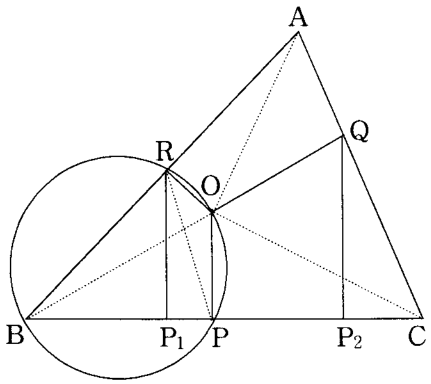
(1) $$OA + OB + OC \geq OA(P_1P + PP_2)/RQ + OB(Q_1Q + QQ_2)/RP + OC(R_1R + RR_2)/PQ$$

내접사각형 $BPOR$에서 각 ROB, RPP_1은 같으므로, 직각삼각형 PRP_1과 OBR은 닮음이며, $P_1P = RP \cdot OR/OB$가 성립한다. 같은 방법으로, $PP_2 = PQ \cdot OQ/OC$,

$Q_1Q = PQ \cdot OP/OC$, $QQ_2 = RQ \cdot OR/OA$, $R_1R = RQ \cdot OQ/OA$, $RR_2 = RP \cdot OP/OB$ 를 얻을 수 있다. 이들을 식 (1)에 대입한 다음, 얻어진 식을 OP, OQ, OR에 대해 정리하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$OA + OB + OC \geq OP\left(\frac{RP \cdot OC}{PQ \cdot OB} + \frac{PQ \cdot OB}{RP \cdot OC}\right) + OQ\left(\frac{PQ \cdot OA}{RQ \cdot OC} + \frac{RQ \cdot OC}{PQ \cdot OA}\right) + OR\left(\frac{RP \cdot OA}{RQ \cdot OB} + \frac{RQ \cdot OB}{RP \cdot OA}\right) \geq 2(OP + OQ + OR). \ \square$$

Bankoff의 증명에서는 선분의 사영, 같은 호에 대해 원주각의 성질, 평행한 직선에 대한 엇각의 성질, 산술평균-기하평균의 부등식이 사용되었다. 실제로, <그림 2>에서 사각형 $BPOR$이 원에 내접하므로, 호 OR에 대한 원주각 OBR과 OPR은 서로 같다. 그리고 각 OPR과 PRP_1은 평행한 OP, RP_1에 대한 엇각이므로, 서로 같다. 결국, 각 OBR과 PRP_1은 서로 같고, 직각삼각형 PRP_1과 OBR은 닮음이 된다. 그리고 원에 내접하는 사각형 $PCQO$, $QARO$에서도 닮음인 직각삼각형들을 얻을 수 있다. 이제, 얻어진 식들에 산술평균-기하평균의 부등식을 사용하여, Erdös-Mordell 부등식을 증명하였다.



<그림 2>

(3) Barrow의 증명 방법

Barrow의 증명 방법은 Mordell의 증명과 함께 The American Mathematical Monthly에 게재되었다. Barrow([8, pp.252-254])의 증명 방법을 살펴보자.

점 O로부터 삼각형의 변들에 그은 수선은 이 점으로부터 변들에 그은 어떤 선보다 짧기 때문에, 다음 정리를 증명하면 부등식이 증명될 수 있다.

정리. 삼각형의 임의의 내부점과 꼭지점들을 연결하여 얻어진 세 각에 대한 이등분선들의 합을 두 배하면, 이것은 그 점에서 꼭지점들까지의 거리의 합보다 작거나 같다.

주어진 삼각형을 ABC, 내부점을 O, 삼각형 BOC, COA, AOB의 각의 이등분선들과 변 BC, CA, AB의 교점을 U, V, W라 하고, 다음 부등식을 증명하면 된다.

(1) $$2(OU+OV+OW) \le OA+OB+OC$$

다음 보조정리들이 정리를 증명하는데 사용된다.

보조정리 1. 세 각 α, β, γ가

(2) $$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$$

을 만족시키고, a, b, c는 양의 상수라 하면, 다음이 성립한다.

(3) $$a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma \le \frac{ab}{2c}+\frac{bc}{2a}+\frac{ca}{2b}$$

이것을 증명하기 위해, (3)의 좌변을 독립변수 α, β의 함수로 보고, 이 함수의 최대값을 조사하자. 그러면, 어떤 값 a, b, c에 대해, 함수의 최대값은 (3)의 우변이 되지만, a, b, c의 다른 값들에 대해 함수의 최대값은 다음 식들 중의 하나가 될 것이다: $a+b-c$, $a-b+c$, $-a+b+c$. (3)의 우변은 이 식들 각각보다 크다. 실제로, 첫 번째 식보다 $(-ab+bc+ca)^2/2abc$만큼 크다. 이로부터, 보조정리가 증명된다.

보조정리 2. 다음 항등식이 성립한다.

(4) $$\frac{2x^2(y+z)}{(x+y)(z+x)}+\frac{2y^2(z+x)}{(x+y)(y+z)}+\frac{2z^2(x+y)}{(y+z)(z+x)} \equiv x+y+z-\frac{xy(x-y)^2+yz(y-z)^2+zx(z-x)^2}{(x+y)(y+z)(z+c)}.$$

보조정리 3. 삼각형에서 어떤 각의 이등분선은 이 각의 변들의 곱을 두 배한 다음 이들 변의 합으로 나누어, 여기에 이 각의 절반의 코사인을 곱한 것과 같다.

삼각형 BOC에서 각의 이등분선 OU는 다음과 같다.

(5) $$OU=\frac{2(OB)(OC)}{OB+OC}\cos\tfrac{1}{2}(BOC)$$

이것을 유도하기 위해, 필자는 삼각함수와 각의 이등분선이 대변을 인접변에 비례하는 선분들로 나눈다는 것을 이용하였다. 이것이 비교적 간단한 방법으로 생각된다.

정리의 증명. 각 BOC, COA, AOB를 각각 2α, 2β, 2γ라 하자. 그러면, α, β, γ가 (2)를 만족시킨다. 한편, OA, OB, OC를 각각 x, y, z라 하자. 그러면, 보조정리 3을 이용하여, 다음을 얻을 수 있다.

$$(6) \qquad 2(OU+OV+OW)=\frac{4yz}{y+z}cos\alpha+\frac{4zx}{z+x}cos\beta+4\frac{xy}{x+y}cos\gamma$$

보조정리 1의 (3)을 이용하면, (6)의 우변은 (4)의 좌변보다 크지 않다는 것을 알 수 있다. 이로부터, 정리의 타당성이 증명된다.

따름정리. (1)에서 등호는 ABC가 정삼각형이고 O가 삼각형의 중심일 때만 성립한다. □

Barrow의 증명 방법은 증명의 구조는 단순하지만, 증명과정에서 복잡한 대수적인 연산을 수행해야 했다. 그리고 Barrow의 증명 방법은 삼각형 ABC의 내부점 O로부터 변들까지 거리의 합은 삼각형 BOC, COA, AOB에서 O로부터 그은 각의 이등분선들의 합보다 크지 않다는 수학적 생각을 바탕으로 하고 있다. Barrow의 증명과정을 분석하면, 다음과 같다.

① 삼각형 BOC, COA, AOB에서 꼭지점 O로부터 그은 각의 이등분선의 길이를 등식 (5)에 의해 구하고, 이로부터 등식 (6)을 유도한다.

② 등식 (3)을 이용하여, 등식 (6)에서 삼각함수를 없앤다.

③ 얻어진 식에 등식 (4)를 이용하여, Erdös-Mordell 부등식을 유도하였다.

한편, Barrow의 증명에서 부등식 (3)의 다른 표현을 살펴보자. 양수 l, m, n에 대해, $\frac{ab}{2c}=l^2$, $\frac{bc}{2a}=m^2$, $\frac{ca}{2b}=n^2$이라 놓으면, $a=2mn$, $b=2nl$, $c=2ml$을 얻을 수 있다. 그러면, 부등식 (3)은 부등식

$$l^2+m^2+n^2 \geq 2mn\cos\alpha+2nl\cos\beta+2ml\cos\gamma$$

와 같게 된다.

이제, 얻어진 부등식의 우변을 좌변으로 이항하여 정리하고, $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$임을 감안하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} &l^2+m^2+n^2-2mn\cos\alpha-2nl\cos\beta-2ml\cos\gamma \\ &\qquad =(l\cos\beta+m\cos\alpha-n)^2+(l\sin\beta-m\sin\alpha)^2 \end{aligned}$$

얻어진 등식의 우변은 각각 0보다 크거나 같으므로, 등식의 좌변은 0보다 크거나 같게 되어, 부등식 (3)이 증명된다. 특히, Gotman & Skopets([12])는 $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$에 대해 부등식 $l^2+m^2+n^2 \geq 2mn\cos\alpha+2nl\cos\beta+2ml\cos\gamma$을 이용하여 Erdös-Mordell 부등식을 증명하였다.

(4) Gotman & Skopets의 증명 방법

각의 이등분선의 길이를 이용하는 Barrow의 증명 방법은 Gotman & Skopets에 의해 개선되었다. Gotman & Skopets([12, p. 139])의 증명을 살펴보자.

삼각형 BOC, COA, AOB에 대해, 꼭지점 O로부터 각의 이등분선들을 긋고, 이를 l_1, l_2, l_3라 하자. 이제, $R_1+R_2+R_3 \geq 2(l_1+l_2+l_3)$를 증명하면 된다. $\angle BOC=2\alpha$, $\angle COA=2\beta$, $\angle AOB=2\gamma$라 하자. 그러면, $l_3=\dfrac{2R_1R_2}{R_1+R_2}cos\gamma$이다. 그리고 $2\sqrt{R_1R_2} \leq R_1+R_2$이므로, $l_3 \leq \sqrt{R_1R_2}\,cos\gamma$이다. 같은 이유로, $l_1 \leq \sqrt{R_2R_3}\,cos\alpha$, $l_2 \leq \sqrt{R_1R_3}\,cos\beta$가 성립한다. 결국, 다음이 성립한다.

$$l_1+l_2+l_3 \leq \sqrt{R_1R_2}\,cos\gamma+\sqrt{R_1R_3}\,cos\beta+\sqrt{R_2R_3}\,cos\alpha$$

단, 등호는 $R_1=R_2=R_3$인 경우에 성립한다. 이제, 다음 부등식을 증명하면 된다.

$$R_1+R_2+R_3 \geq 2(\sqrt{R_1R_2}\,cos\gamma+\sqrt{R_1R_3}\,cos\beta+\sqrt{R_2R_3}\,cos\alpha)$$

이제, $\sqrt{R_1}=x$, $\sqrt{R_2}=y$, $\sqrt{R_3}=z$라 하자. 그러면, 위의 부등식을 다음과 같이 쓸 수 있다: $x^2+y^2+z^2 \geq 2(xy\cos\gamma+xz\cos\beta+yz\cos\alpha)$. 단, $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$. 이것은 이미 증명하였으므로, 결국 부등식 $R_1+R_2+R_3 \geq 2(l_1+l_2+l_3)$이 성립한다. 이때, 등호는 $\alpha=\beta=\gamma$이고 $R_1=R_2=R_3$인 경우, 즉 점 O가 정삼각형의 중심인 경우에만 성립한다. □

Gotman & Skopets는 Barrow 증명에서 등식 (6)을 산술평균과 기하평균의 부등식을 이용하여 간단한 식으로 변형시켰으며, Barrow 증명에서 부등식 (3) 대신에, 부등식 $l^2+m^2+n^2 \geq 2mn\cos\alpha+2nl\cos\beta+2ml\cos\gamma$을 이용하여, Erdös-Mordell 부등식을 간결하게 증명하였다.

(5) Dinca & Bencze의 증명 방법

부등식 $x^2+y^2+z^2 \geq 2(xy\cos\gamma+xz\cos\beta+yz\cos\alpha)$, $\cos\alpha\cos\beta \leq \cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}$을 이용하여 Erdös-Mordell 부등식을 증명하는 방법을 Dinca & Bencze가 제시하였다. Dinca & Bencze([9, pp.191-192])의 증명 방법을 살펴보자.

삼각형 ABC의 내부점 M을 변 BC, CA, AB에 사영시킨 점을 M_1, M_2, M_3라 하고, 부등식을 증명하자. 우선, 실수 x, y, z, $\alpha+\beta+\gamma=\pi$에 대해, 다음 부등식을 증명하자.

$$(*) \qquad xy \cdot \cos\gamma + yz \cdot \cos\alpha + zx \cdot \cos\beta \le \frac{x^2+y^2+z^2}{2}.$$

부등식 $(z \cdot \cos\alpha + x \cdot \cos\gamma - y)^2 + (z \cdot \sin\alpha - x \cdot \sin\gamma)^2 \ge 0$을 생각하자. 부등식의 좌변을 정리하면, $x^2(\cos^2\gamma + \sin^2\gamma) + z^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + 2xz(\cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma) - 2yz\cos\gamma - 2xy\cos\gamma + y^2 \ge 0$, $x^2+y^2+z^2 \ge 2yz\cos\alpha + 2xy\cos\gamma - 2xz\cos(\alpha+\gamma)$를 얻을 수 있다. 이때, $\cos(\alpha+\gamma) = \cos(\pi-\beta) = -\cos\beta$이므로, 부등식 (*)이 증명된다.

이제, $\angle BMM_1 = \alpha_1$, $\angle CMM_1 = \alpha_2$, $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$라 하고, 다른 각들에 대해서도 유사한 표기를 도입하자. 그러면, 다음을 얻을 수 있다.

$$\frac{MM_1}{MB} \cdot \frac{MM_1}{MC} = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 \le \cos^2\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

이로부터, $MM_1^2 \le MB \cdot MC\cos^2\frac{\alpha}{2}$, $MM_1 \le \sqrt{MB}\sqrt{MC}\cos\frac{\alpha}{2}$를 얻을 수 있다.

유사한 방법으로, $MM_2 \le \sqrt{MA}\sqrt{MC}\cos\frac{\beta}{2}$, $MM_3 \le \sqrt{MB}\sqrt{MA}\cos\frac{\gamma}{2}$를 유도할 수 있다. 이제, 부등식 (*)에 $x = \sqrt{MA}$, $y = \sqrt{MB}$, $z = \sqrt{MC}$를 대입하고, $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \pi$임을 감안하면, 부등식이 증명된다. □

Dinca & Bencze의 증명 방법을 Gotman & Skopets의 증명과 비교하면, Dinca & Bencze는 각의 이등분선을 구하는 복잡한 식의 계산에서 벗어나, 평이한 삼각함수 부등식인 $\cos\alpha\cos\beta \le \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}$(코사인의 반각공식, 코사인의 합과 차의 공식을 이용하여 쉽게 증명됨)을 이용하여, Erdös-Mordell 부등식을 증명하였다. 결국, Dinca & Bencze의 증명 방법은 Barrow의 증명 방법, Gotman & Skopets의 증명 방법을 간결하고 단순한 방법으로 개선하여 얻어진 것이라 할 수 있다.

(6) Kazarinoff의 증명 방법

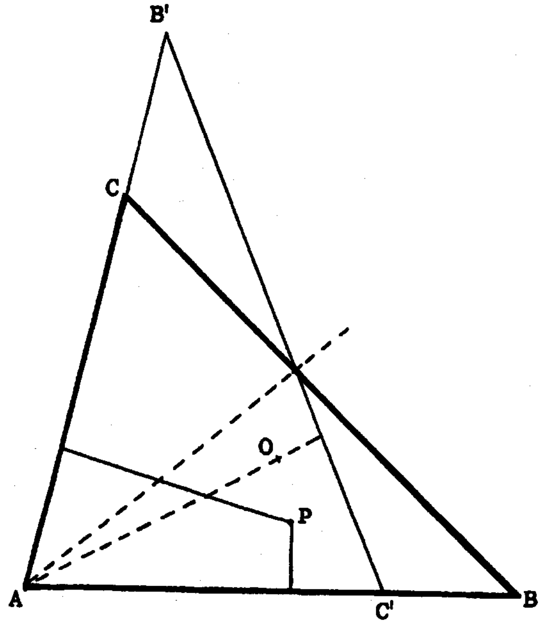
Kazarinoff는 각의 이등분선에 대한 삼각형의 반사, Pappus 정리, 산술평균-기하평균의 부등식을 바탕으로, Erdös-Mordell 부등식에 대한 새로운 증명 방법을 발명하였다. Kazarinoff([14, pp.97-98])의 증명 방법을 살펴보자.

삼각형 ABC에서 꼭지점 A, B, C의 대변의 길이를 a, b, c라 하고, 내부점 P로부터 이들 변까지의 수선의 길이를 p_a, p_b, p_c, P로부터 꼭지점들까지 거리의 합을 S_2라 하자. 그리고 외접원의 중심을 O라 하자. 꼭지점 A에서의 각의 이등분선을 생각하고, 주어진 삼각형을 각의 이등분선에 대해 반사시켜 얻어진 삼각형 $B'AC'$으로 대치하자 (<그림 3>).

이제, $B'AC'$에 Pappus 정리를 사용하고, OA가 $B'C'$에 직교함을 고려하면, 다음 등식을 얻을 수 있다: $AP\cos(AP, AO)B'C' = AC'p_c + AB'p_b$. 이것을 다시 쓰면, $aPA\cos(AP, AO) = bp_c + cp_b$이다. 이로부터, $aPA \ge bp_c + cp_b$가 유도된다. 같은 방법으로, $bPB \ge cp_a + ap_c$, $cPC \ge ap_b + bp_a$를 얻을 수 있다. 그러므로 다음 부등식이 성립한다.

$$S_2 \ge \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right)p_a + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)p_b + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)p_c.$$

P가 외접원의 지름(A를 지나는)에 속하는 경우에만 $\cos(AP, AO) = 1$이므로, 등호는 P가 외접원의 중심인 경우에만 성립한다. 그리고 괄호에 있는 각각의 값들은 2보다 크거나 같으며, 등호는 $a = b = c$인 경우에만 성립한다. □



<그림 3>

Kazarinoff의 증명에서는 첫째 각의 이등분선에 대한 삼각형의 반사, Pappus 정리를 이용하여 $aPA \ge bp_c + cp_b$를 유도하고 양변을 a로 나누어 PA에 대한 부등식을 얻었고, 둘째 유사한 방법으로 PB, PC에 대한 부등식들을 유도하였고, 셋째 이들 부등식을 더하여 산술평균-기하평균의 부등식을 이용하여 Erdös-Mordell 부등식을 증명하였다. 이러한 접근은 Erdös-Mordell 부등식에 대한 다른 증명 방법들([7], [15], [22])의 바탕이 되었다.

(7) Prasolov의 증명 방법

Prasolov는 Kazarinoff처럼 $aPA \geq bp_c + cp_b$를 이용하여, Erdös-Mordell 부등식을 증명하였다. 그러나 Prasolov는 삼각형의 반사, Pappus 정리 등을 사용하지 않고, 삼각형의 넓이를 이용하여 $aPA \geq bp_c + cp_b$을 증명하여, Kazarinoff의 증명 방법을 개선하였다. Prasolov([19, p. 98])의 증명 방법을 살펴보자.

삼각형 ABC의 내부점 O로부터 변 BC, CA, AB까지의 거리를 d_a, d_b, d_c라 하고, 꼭지점 A, B, C까지의 거리를 R_a, R_b, R_c라 하자. 우선 부등식 $aR_a \geq cd_c + bd_b$를 증명하자.

반직선 AB, AC에 임의의 점 B_1, C_1을 잡고, 이로부터 직선 AO에 수선 B_1K, C_1L을 작도하자. $B_1C_1 \geq B_1K + C_1L$이므로, $B_1C_1 \cdot R_a \geq B_1K \cdot R_a + C_1L \cdot R_a = 2S_{AOB_1} + 2S_{AOC_1} = AB_1 \cdot d_c + AC_1 \cdot d_b$가 성립한다. 이제, $B_1 = B$, $C_1 = C$라 놓으면, $aR_a \geq cd_c + bd_b$이 증명된다. 이제, B_1, C_1을 $AB_1 = AC$, $AC_1 = AB$가 되도록 잡자. 그러면, $aR_a \geq bd_c + cd_b$, $R_a \geq (b/a)d_c + (c/a)d_b$가 성립한다. R_b, R_c에 대해서도 유사한 부등식을 생각하여, 이들을 더하고 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$임을 고려하면, 구하는 부등식을 얻게 된다. □

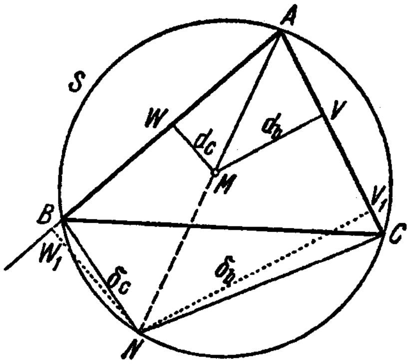
Prasolov와 유사한 증명 방법이 Komornik([15])에 의해 제시되어 있다.

(8) Shklyarski, Tsentsov & Yaglom의 증명 방법

Shklyarski, Tsentsov & Yaglom은 Erdös-Mordell 부등식을 Ptolemy의 정리, 산술평균-기하평균의 부등식을 이용하여 증명하였다. Shklyarski, Tsentsov & Yaglom ([22, p.289])의 증명 방법을 살펴보자.

삼각형 ABC의 내부점 M으로부터 꼭지점 A, B, C까지의 거리를 각각 R_a, R_b, R_c라 하고, 변 BC, CA, AB까지의 거리를 d_a, d_b, d_c라 하자. 우선, $R_a \geq \frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c$를 증명하자.

직선 AM과 삼각형 ABC의 외접원 S의 교점을 N이라 하고, N으로부터 변 AB, AC까지의 거리를 δ_b, δ_c라 하자. 그리고 $AN = P_a$라 하자(<그림 4>).



<그림 4>

원 S에 내접한 사각형 $ABNC$에 Ptolemy의 정리를 사용하면, 다음을 얻을 수 있다: $AB \cdot NC + AC \cdot NB = BC \cdot AN$, $c \cdot NC + b \cdot NB = a \cdot P_a$. 그리고 $NC \geq \delta_b$, $NB \geq \delta_c$이므로, $aP_a \geq c\delta_b + b\delta_c$를 얻을 수 있다. 한편, $P_a/R_a = \delta_b/d_b = \delta_c/d_c$이므로, $aR_a \geq cd_b + bd_c$, $R_a \geq \frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c$이 성립한다. 이때, 등호는 $\angle NBA = \angle BCA = 90^\circ$인 경우에, 즉 직선 AM이 ABC의 외접원 S의 중심을 지나는 경우에 성립한다. 같은 방법으로, 부등식 $R_b \geq \frac{a}{b}d_c + \frac{c}{b}d_a$, $R_c \geq \frac{b}{c}d_a + \frac{a}{c}d_b$가 증명된다. 한편, 이들 부등식을 더하면, $R_a + R_b + R_c \geq \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right)d_a + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)d_b + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)d_c$이 된다. 부등식의 우변에서 각각의 괄호는 2보다 작지 않으므로, $R_a + R_b + R_c \geq 2d_a + 2d_b + 2d_c = 2(d_a + d_b + d_c)$이 얻어진다. 이로부터, 정리가 증명된다. □

Shklyarski, Tsentsov & Yaglom의 증명에서는 부등식 $R_a \geq \frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c$을 유도하기 위해, Ptolemy의 정리를 이용하여 하였다. Ptolemy의 정리를 이용한 Erdös-Mordell 부등식의 다른 증명은 Avez([6])과 Lee Hojoo([16])의 연구에 제시되어 있다.

2. Erdös-Mordell 부등식과 평균의 부등식

Toth([23]), Shklyarski, Tsentsov & Yaglom([22])의 연구에서는 Erdös-Mordell 부등식을 산술평균과 관련지었으며, Erdös-Mordell 부등식에 관련된 몇몇 부등식들을 산술평균, 조화평균, 기하평균의 관점에서 제시하였다.

양수 x_1, x_2, $\cdots$, x_n에 대한 산술평균을 $A(x_1,x_2,\cdots,x_n)$이라 하고, 기하평균을 $G(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 조화평균을 $H(x_1,x_2,\cdots,x_n)$라 하자. 이제, 삼각형 ABC의 내부점으로부터 꼭지점들까지의 거리를 R_a, R_b, R_c라 하고, 변들까지의 거리를 d_a, d_b, d_c라 하고, 양수 R_a, R_b, R_c에 대한 산술평균 $A(R_a,R_b,R_c)$, d_a, d_b, d_c에 대한 산술평균 $A(d_a,d_b,d_c)$를 생각하자.

$A(R_a,R_b,R_c)=\dfrac{R_a+R_b+R_c}{3}$, $A(d_a,d_b,d_c)=\dfrac{d_a+d_b+d_c}{3}$이 성립한다.

그러므로 Erdös-Mordell 부등식 $R_a+R_b+R_c \ge 2(d_a+d_b+d_c)$을 산술평균을 이용한 표기로 나타내면, $A(R_a,R_b,R_c)\ge 2A(d_a,d_b,d_c)$와 같이 쓸 수 있다.

한편, $A(R_a,R_b,R_c)\ge 2A(d_a,d_b,d_c)$에서 산술평균을 기하평균으로 바꾸면, 부등식 $G(R_a,R_b,R_c)\ge 2G(d_a,d_b,d_c)$이 얻어지고, 이것을 정리하면 R_a, R_b, R_c와 d_a, d_b, d_c에 대한 새로운 부등식 $R_aR_bR_c \ge 8d_ad_bd_c$가 얻어진다.

Shklyarski, Tsentsov & Yaglom([22, pp.284-285])은 세 부등식 $aR_a \ge bd_b+cd_c$, $bR_b \ge ad_a+cd_c$, $cR_c \ge ad_a+bd_b$를 서로 곱하여 $aR_a\cdot bR_b\cdot cR_c \ge (bd_b+cd_c)(ad_a+cd_c)(ad_a+bd_b)$를 얻은 다음, 좌변에 있는 각 괄호를 적당히 변형시켜 부등식 $R_aR_bR_c \ge 8d_ad_bd_c$을 유도하였다.

이제, $A(R_a,R_b,R_c)\ge 2A(d_a,d_b,d_c)$에서 산술평균을 조화평균으로 바꾸면, 부등식 $H(R_a,R_b,R_c)\ge 2H(d_a,d_b,d_c)$이 얻어지고, 이것을 정리하면 R_a, R_b, R_c와 d_a, d_b, d_c에 대한 새로운 부등식 $\dfrac{1}{R_a}+\dfrac{1}{R_b}+\dfrac{1}{R_c}\le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{d_a}+\dfrac{1}{d_b}+\dfrac{1}{d_c}\right)$가 얻어진다.

Shklyarski, Tsentsov & Yaglom([22, pp.291-292])은 삼각형 ABC의 내부점 M에서 변들에 그은 수선을 $MU=d_a$, $MV=d_b$, $MW=d_c$라 놓고, A', B', C', U', V', W'은 반직선 MU, MV, MW, MA, MB, MC에서 각각 다음과 같이 잡았다.

$$R_a'=MA'=\frac{1}{MU}=\frac{1}{d_a},\ R_b'=MB'=\frac{1}{MV}=\frac{1}{d_b},\ R_c'=MC'=\frac{1}{MW}=\frac{1}{d_c}.$$

$$d_a'=MU'=\frac{1}{MA}=\frac{1}{R_a},\ d_b'=MV'=\frac{1}{MB}=\frac{1}{R_b},\ d_c'=MU'=\frac{1}{MC}=\frac{1}{R_c}.$$

그리고 나서, 삼각형 $A'B'C'$의 내부점 M에서 Erdös-Mordell 부등식을 생각하면, $R_a'+R_b'+R_c' \ge 2(d_a'+d_b'+d_c')$이 얻어지고, R_a', R_b', R_c', d_a', d_b', d_c'대신에 R_a, R_b, R_c와 d_a, d_b, d_c에 대한 식을 대입하여, $\dfrac{1}{R_a}+\dfrac{1}{R_b}+\dfrac{1}{R_c}\le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{d_a}+\dfrac{1}{d_b}+\dfrac{1}{d_c}\right)$을 유도하였다.

Shklyarski, Tsentsov & Yaglom은 양수 x_1, x_2, $\cdots$, x_n에 대해 지수가 k인 거듭제곱 평균의 개념을 이용하여, 부등식 $A(R_a,R_b,R_c)\ge 2A(d_a,d_b,d_c)$, $H(R_a,R_b,R_c)$

$\geq 2H(d_a,d_b,d_c)$, $G(R_a,R_b,R_c) \geq 2G(d_a,d_b,d_c)$를 일반화하였다.

양수 x_1, x_2, $\cdots$, x_n에 대해 지수가 k인 거듭제곱 평균을 $M_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)$라 하면, $M_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sqrt[k]{\dfrac{x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k}{n}}$ 이며, $[M_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)]^k = A(x_1^k,x_2^k,\cdots,x_n^k)$ 가 성립한다. Hardy, Littlewood & Polya([13])는 거듭제곱 평균에 관련하여 등식 $\lim\limits_{k\to 0} M_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)= G(x_1,x_2,\cdots,x_n)$의 증명을 제시하였다.

R_a, R_b, R_c와 d_a, d_b, d_c에 에 대한 거듭제곱 평균 $M_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)$을 생각하면, $A(R_a,R_b,R_c) \geq 2A(d_a,d_b,d_c)$은 $M_1(R_a,R_b,R_c) \geq 2M_1(d_a,d_b,d_c)$이 되고, $G(R_a,R_b,R_c) \geq 2G(d_a,d_b,d_c)$은 $M_0(R_a,R_b,R_c) \geq 2M_0(d_a,d_b,d_c)$이 되며, $H(R_a,R_b,R_c) \geq 2H(d_a,d_b,d_c)$는 $M_{-1}(R_a,R_b,R_c) \geq 2M_{-1}(d_a,d_b,d_c)$이 된다.

한편, 1958년에 Florian([11])은 Erdös-Mordell 부등식을 일반화하여 $|k| \leq 1$에 대해 $M_k(R_a,R_b,R_c) \geq 2M_k(d_a,d_b,d_c)$, $|k| > 1$에 대해 $M_k(R_a,R_b,R_c) > 2^{1/|k|}M_k(d_a,d_b,d_c)$을 증명하였다. 예를 들어, $k \geq 2$에 대해 $M_k(R_a,R_b,R_c) > 2^{1/|k|}M_k(d_a,d_b,d_c)$로부터, 다음과 같은 부등식을 얻을 수 있다.

$$\sqrt[k]{\frac{R_a^k+R_b^k+R_c^k}{n}} > 2^{1/k} \cdot \sqrt[k]{\frac{d_a^k+d_b^k+d_c^k}{n}}, \quad R_a^k+R_b^k+R_c^k > 2(d_a^k+d_b^k+d_c^k)$$

3. Erdös-Mordell 유형의 부등식

삼각형의 한 내부점으로부터 꼭지점들까지의 거리 R_a, R_b, R_c, 변들까지의 거리 d_a, d_b, d_c에 관련된 부등식들을 Erdös-Mordell 유형의 부등식이라 부른다([21]). 1961년에 Oppenheim([18])은 $d_aR_a+d_bR_b+d_cR_c \geq 2(d_ad_b+d_bd_c+d_ad_c)$, $R_aR_b+R_bR_c+R_aR_c \geq 4(d_ad_b+d_bd_c+d_ad_c)$, $R_aR_bR_c \geq 8d_ad_bd_c$, $0<k<1$에 대해 $(d_aR_a)^k+(d_bR_b)^k+(d_cR_c)^k \geq 2^k\left((d_ad_b)^k+(d_bd_c)^k+(d_ad_c)^k\right)$ 등과 같은 Erdös-Mordell 유형의 부등식들을 증명하였다.

한편, Satnoianu는 2003년에 Oppenheim이 증명한 부등식들을 포함하는 다양한 Erdös-Mordell 유형의 부등식들을 만들어내는 방법을 연구하였다. 이를 위해, Erdös-Mordell 부등식 $R_a+R_b+R_c \geq 2(d_a+d_b+d_c)$에서 R_a, R_b, R_c, d_a, d_b, d_c를 각각 함수 $f(t)=t$에 대한 함수값 $f(R_a)$, $f(R_b)$, $f(R_c)$, $f(d_a)$, $f(d_b)$, $f(d_c)$로 생각하였으며, Erdös-Mordell 부등식을 $f(R_a)+f(R_b)+f(R_c) \geq 2(f(d_a)+f(d_b)+f(d_c))$와 같이 변형시켰다. 그리고 나서, Satnoianu는 Erdös-Mordell 유형의 부등식을 얻을 수 있는

함수 f에 대해 연구하여, 다음과 같은 결과를 얻었다([21, pp.728-729]).

정리. $f: [0,d) \to [0,\infty)$는 증가하는 볼록함수이고, 승법적인 볼록(multiplicatively convex) 함수라 하자. d가 삼각형 ABC의 변들의 길이보다 크다면, 삼각형의 임의의 내부점 P에 대해, 다음과 같은 Erdös-Mordell 유형의 부등식이 성립한다.

(1) $f(R_a)+f(R_b)+f(R_c)+3f(0) \ge 2(f(d_a)+f(d_b)+f(d_c))$

(2) $f(d_aR_a)+f(d_bR_b)+f(d_cR_c)+3f(0) \ge 2(f(d_ad_b)+f(d_bd_c)+f(d_ad_c))$

특히, $f(0)=0$이면, 다음이 성립한다.

(3) $f(R_a)f(R_b)f(R_c) \ge 8f(d_a)f(d_b)f(d_c)$

(4) $f(R_aR_b)+f(R_bR_c)+f(R_aR_c) \ge 4(f(d_ad_b)+f(d_bd_c)+f(d_ad_c))$

단, 부등식 (1)-(4)에서 등호는 삼각형 ABC가 정삼각형이고, 점 P가 삼각형의 중심인 경우에 성립한다.

Satnoianu는 이 정리를 만족시키는 함수들의 예로 $f(x)=x^k$ (단, $k \ge 1$), $f(x)=e^x$, $f(x)=\sinh x$, $f(x)=\cosh x$, $f(x)=\tan x$, $f(x)=\sec x$, $f(x)=\operatorname{cosec} x$, $f(x)=(1-x)^{-m}$(단, $x \in (0,1)$, $m>1$), $f(x)=a^x$(단, $x>0$, $a \ge 1$) 등을 제시하였다.

함수 $f(x)=x$에 정리의 부등식 (1)-(4)를 적용하여 Erdös-Mordell 유형의 부등식들을 만들어 보자. 부등식 (1)로부터 Erdös-Mordell 부등식을 얻으며, (2)로부터는 $d_aR_a+d_bR_b+d_cR_c \ge 2(d_ad_b+d_bd_c+d_ad_c)$, (3)으로부터는 $R_aR_bR_c \ge 8d_ad_bd_c$, (4)로부터는 $R_aR_b+R_bR_c+R_aR_c \ge 4(d_ad_b+d_bd_c+d_ad_c)$를 얻을 수 있다.

만약, 함수 $f(x)=x^k$(단, $k \ge 2$)을 생각하면, 부등식 (1)로부터 $R_a^k+R_b^k+R_c^k \ge 2(d_a^k+2d_b^k+d_c^k)$를 얻을 수 있는데, 이것은 Florian([11])의 결과로부터 얻어진 것과 동일한 부등식이다. 한편, (2)로부터는 $d_a^kR_a^k+d_b^kR_b^k+d_c^kR_c^k \ge 2(d_a^kd_b^k+d_b^kd_c^k+d_a^kd_c^k)$, (3)으로부터는 $R_a^kR_b^kR_c^k \ge 8d_a^kd_b^kd_c^k$, 부등식 (4)로부터는 $R_a^kR_b^k+R_b^kR_c^k+R_a^kR_c^k \ge 4(d_a^kd_b^k+d_b^kd_c^k+d_a^kd_c^k)$를 얻을 수 있다.

함수 $f(x)=e^x$를 생각하면, 부등식 (1)로부터 $e^{R_a}+e^{R_b}+e^{R_c}+3 \ge 2(e^{d_a}+e^{d_b}+e^{d_c})$를 얻으며, (2)로부터는 $e^{d_aR_a}+e^{d_bR_b}+e^{d_cR_c}+3 \ge 2(e^{d_ad_b}+e^{d_bd_c}+e^{d_ad_c})$를 얻을 수 있다.

한편, Sandor([20])도 증가함수 f가 $f(xy+zt) \ge xf(y)+zf(t)$를 만족시키면(단, x, $y,z,t>0$), $f(R_a+R_b+R_c) \ge 2(f(d_a)+f(d_b)+f(d_c))$가 성립한다는 것을 보이고, Erdös- Mordell 부등식을 일반화시켜 $k \ge 1$에 대해 $R_a^k+R_b^k+R_c^k \ge 2(d_a^k+2d_b^k+d_c^k)$이 성립함을 증명하였다.

4. 결론

본 연구에서는 Erdös-Mordell 부등식에 관련된 다양한 연구들을 분석하여, Erdös-Mordell 부등식에 대해 어떤 연구들이 진행되었으며, 어떤 개념들과 관련되어 발전되고 있는가를 고찰하였다. 이를 위해, Erdös-Mordell 부등식에 관련된 연구들을 다양한 증명 방법에 대한 연구들, Erdös-Mordell 부등식과 평균들에 관련된 연구들, Erdös-Mordell 유형의 부등식에 대한 연구들로 연구 방향을 분류하였고, 이들 연구를 분석하였다.

Erdös-Mordell 부등식의 다양한 증명 방법에 대한 연구들을 증명에 사용된 개념들, 방법들을 중심으로 세 가지로 분류할 수 있다. 첫째, Mordell의 방법, Bankoff의 방법을 들 수 있다. Mordell은 원주각의 성질, 삼각형의 닮음, 산술평균-기하평균의 부등식을 이용하여 부등식을 증명하였지만, Bankoff는 원주각의 성질, 엇각의 성질 등을 이용하여 보다 간결한 증명 방법을 제시하였다. 둘째, Barrow의 방법, Gotman & Skopets의 방법, Dinca & Bencze의 방법을 들 수 있다. Barrow는 각의 이등분선의 길이를 이용하여 Erdös-Mordell 부등식을 증명하였으며, 증명과정에 복잡한 대수적 변형을 포함하였다. Gotman & Skopets, Dinca & Bencze는 대수적으로 보다 간단한 증명 방법을 제시하였다. 셋째, Kazarinoff의 방법, Prasolov의 방법, Shklyarski, Tsentsov & Yaglom의 방법을 들 수 있다. Kazarinoff는 삼각형의 반사, Pappus 정리, 부등식 $aPA \geq bp_c + cp_b$, 산술평균-기하평균의 부등식을 이용하여 Erdös-Mordell 부등식을 증명하였다. Prasolov는 삼각형의 넓이를, Shklyarski, Tsentsov & Yaglom은 Ptolemy의 정리를 이용한 보다 개선된 증명을 제시하였다.

Erdös-Mordell 부등식과 평균들에 관련된 연구에서는 Toth, Shklyarski, Tsentsov & Yaglom이 Erdös-Mordell 부등식과 이에 관련된 몇몇 부등식을 산술평균, 조화평균, 기하평균과 관련지어 나타냈다. 예를 들어, Erdös-Mordell 부등식은 $A(R_a, R_b, R_c) \geq 2A(d_a, d_b, d_c)$와 같이 기술할 수 있다. 한편, Florian은 Erdös-Mordell 부등식을 일반화하는 $M_k(R_a, R_b, R_c)$, $M_k(d_a, d_b, d_c)$에 대한 부등식들을 증명하였다.

한편, Erdös-Mordell 유형의 부등식에 대한 연구들로, Oppenheim은 다양한 Erdös-Mordell 유형의 부등식들을 증명하였으며, Satnoianu는 Erdös-Mordell 유형의 부등식들을 만들어내는 함수들의 특성을 연구하였다. 그리하여, Satnoianu는 Oppenheim이 제시한 Erdös-Mordell 유형의 부등식들을 포함하여, 많은 Erdös-Mordell 유형의 부등식들을 얻을 수 있는 함수를 찾았다.

참고 문헌

1. 김성숙, e의 역사적 기원과 의의, 한국수학사학회지 17(3), 2004, pp.33-42.
2. 김용운, 수학사학과 수학교육, 한국수학사학회지 3(1), 1986, PP.21-34.
3. 김주영, 김성숙, 영의 역사와 영에 얽힌 오류들, 한국수학사학회지 14(1), 2001, pp.101-104.
4. 이종희, 원뿔곡선 이론의 발달, 한국수학사학회지 15(1), 2002, pp.69-82.
5. 정문자, 비버바흐 추측과 루퀴켕 추측에 대한 역사적 고찰, 한국수학사학회지 17(3), 2004, pp.13-22.
6. Avez A., *A Short Proof of a Theorem of Erdos and Mordell*, The American Mathematical Monthly 100(1), 1993, pp.60-62.
7. Bankoff, L., *An Elementary Proof of the Erdös-Mordell Theorem*, The American Mathematical Monthly 65(7), 1958, p.521.
8. Barrow D. F., *Solution of the Problem №. 3740 Proposed by Paul Erdös*, The American Mathematical Monthly 44(4), 1937, pp.252-254.
9. Dinca M., Bencze M., *A New Proof for an Inequality of Pal Erdös*, Octogon 8(1), 2000, pp.191-192.
10. Erdös P., *Problem for Solution* №. 3740, The American Mathematical Monthly 42(6), 1935, p.396.
11. Florian A., *Zu einem Satz von P.Erdös*, Elemente der Mathematik 13(3), 1958, 55-58.
12. Gotman E. G., Skopets Z. A., *Zadacha Odna-Resheniya Raznye*, Prosveshenie, 2000.
13. Hardy G. H., Littlewood J.E., Polya G., *Inequalities*, Cambridge, 1934.
14. Kazarinoff D. K., *A Simple Proof of the Erdös-Mordell inequality for triangles*, The Michigan Mathematical Journal 4, 1957, pp.97-98.
15. Komornik V., *A Short Proof of the Erdös-Mordell Theorem*, The American Mathematical Monthly 104(1), 1997, pp.57-60.
16. Lee H., *Another Proof of the Erdös-Mordell Theorem*, Forum Geometricorum 1, 2001, pp.7-8.
17. Mordell, L. J., *Solution of the Problem №. 3740 Proposed by Paul Erdös*, The American Mathematical Monthly 44(4), 1937, p.252.
18. Oppenheim A., *The Erdos Inequality and Other Inequalities for a Triangle*, The American Mathematical Monthly 68(3), 1961, pp.226-230.
19. Prasolov V. V., *Zadachi po Planimetrii*, MTsNMO, 2001.
20. Sandor J., *On a Generalization of the Erdös-Mordell inequality*, Octogon 12(2),

2004, pp.1059-1056.
21. Satnoianu R. A., *Erdös-Mordell-Type Inequalities in a Triangle*, The American Mathematical Monthly 110(8), 2003, pp.727-729.
22. Shklyarski D. O., Tsentsov N. N., Yaglom I.M., *Geometricheskie Neravenstva i Zadachi na Maksimum i Minimum*, Nauka, 1970.
23. Toth F., *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum*, Springer-Verlag, 1953.

An Analysis of Studies on Erdös-Mordell Inequality

Gyeongsang National University **In ki Han**

In this paper we analyze various studies on Erdös-Mordell inequality(from a point O inside a given triangle ABC the perpendiculars OP, OQ, OR are drawn to its sides, then $OA+OB+OC \geq 2(OP+OQ+OR)$). We find out three trends of studies on Erdös-Mordell inequality: studies on various proof methods, studies on related means, studies on Erdös-Mordell type inequalities.

Key words: Erdös-Mordell inequality, mean, Erdös-Mordell type inequality

2000 Mathematics Subject Classification: 97-03

ZDM Classification: A34

논문 접수: 2007년 4월 23일 심사 완료: 2007년 8월 25일