한국수학사학회지 제20권 제4호(2007년 11월), 23 - 48

수학적 귀납법의 역사에서 하강법의 역할 및 교수학적 논의

서울대학교 대학원 **박선용**
polya@paran.com
진주교육대학교 **장혜원**
hchang@cue.ac.kr

본 연구는 학교 수학에서 다루어지는 수학적 귀납법의 형식적 도입에 대한 문제 제기로부터 출발한다. 학생들이 수학적 귀납법의 의미와 구조를 충분히 인식하지 못한 채 단지 증명의 도구로서 도구적 이해 수준에서 형식적으로 다루어지는 수학 교육 현실의 개선을 위하여, 수학적 귀납법의 역사적 발생 과정을 고대 그리스의 재귀적 무한을 통한 암묵적 사용으로부터 17세기 Pascal과 Fermat의 추상적 형식화의 단계에 이르기까지 고찰함으로써 그 과정에 포함된 다양한 사고 유형의 본질을 규명하고 특히 중요한 역할을 한 것으로 추정되는 하강법에 주목함으로써 교육적 논의를 통해 학교 수학에 시사점을 제공하고자 한다.

주제어 : 수학적 귀납법, 재귀적 무한, 하강법, 분석, 종합

0. 서론

수학적 귀납법은 자연수 n에 관한 진술 P(n)에 대해 '(1) P(1)이 성립하고, (2) P(k)가 성립한다고 가정하면 P(k+1)도 성립'한다는 두 가지 조건을 증명함으로써 임의의 자연수에 대하여 P(n)이 성립함을 보이는 증명법이다. 도미노 현상을 생각하면 수학적 귀납법의 본질이 비교적 잘 모델링될 수 있다. '첫 번째 조각이 쓰러지고, n번째 조각이 쓰러질 때 그 다음 조각이 쓰러진다'는 두 가지 조건이 만족되면 '모든 조각이 쓰러진다'는 것을 확신할 수 있는 것이다. 한편, 이렇듯 수학적 확실성을 보이기 위한 증명 방법으로서의 수학적 귀납법은 학교 수학에서 그 본질에 충실한 구조의 파악보다는 형식적인 알고리즘에 의해 지도되고 있다는 맹점이 여러 수학교육자들에 의해 지적되어 왔다. 예컨대, 수학화 이론을 통해 수학교육 개선을 의도했던 Freudenthal은 수학적 귀납법의 교수-학습에 대해 다음과 같은 입장을 지닌다.

완전귀납법에 대해 함께 생각해보자. 이때, 그 원리는 아동들이 재발명에 의해 명확하게 형식화해야 할 만큼 중요한 것으로 간주된다. 완전귀납법을 발명한다는 것은 사소하지 않은 또는 적어도 사소해 보이지 않는 완전귀납법 예에 익숙해져있어야 하는 것을 분명히 전제로 한다. 역사에서, 이항계수와 이항정리는 그러한 예인데, … 교과서는 일반적으로 완전귀납법 원리의 결과로서 이항정리를 제시한다. 수학적 발명의 과정에서 이것은 악순환에 해당한다. 완전귀납법과 같은 원리는 그것을 경험하지 않고서는 형식화할 수 없는 것인데 이항정리는 이 원리에 이르도록 하는 결정적 경험이다. 자연수에 대한 Peano의 형식적 이론으로부터 완전귀납법을 유도해낸다면 이 역시 유사한 교수학적 악순환에 불과하다. 완전귀납법에 대해 형식화하지 않은 채 Peano의 공리론을 발명할 수 없다는 것은 당연한 것이다. 완전귀납법을 형식화하기 위해서는 완전귀납법이 무엇인지를 아는 것이 필수불가결한데 그것을 알기 위해서는 이항정리와 같은 것에 숙달해 있어야만 하는 것이다. 연역적 과정은 Peano 의 공리들로부터 수학적 귀납법의 원리를 정리로서 유도하고 이것을 이후에 여러가지 예에 적용하는 것이다. 이것은 반교수학적 전도(antididactic inversion)의 현저한 예다([20], pp.121-122).

즉 반교수학적 전도의 예로 간주할 만큼 수학적 귀납법 지도를 강력하게 비판하고 있는데 그 이유는 인간 본유의 정신적 능력과 활동을 강조하며 셈수를 수학의 초석으로 인정하는 직관주의적 수리철학에 기초한 것으로 볼 수 있을 것이다. 다시 말해, "자연수는 가장 상식적인 구어로 수를 세는 것으로 시작해서 여러 수준을 거쳐 완전귀납법으로 형식화되고 공리화에 이르는 것으로 수학의 가장 특징적인 측면을 나타낸다([1], p.13)"고 할 수 있기 때문에 수학을 수학답게 가르치기 위해 수학적 귀납법 교육의 문제를 부각시키지 않을 수 없었던 것이다.

수학적 귀납법은 긍정식 추론과 수학적 귀납법의 원리를 접목하는 단순한 절차가 아니며 '전칭 양화', '함의관계', '명제함수'와 같은 개념이 서로 얽혀있는 역동적 과정이라 할 수 있다. 그러한 개념 요소의 논리적 특성 및 각 요소간의 관련성에서 비롯되는 복합적 측면과 관련하여, 일찍이 Young은 학교 수학에서 수학적 귀납법을 가르치되 "그 논리적 본질과 기능을 가르치는 것은 대학 초기까지 미루어야한다([48], p.146)"는 소극적인 입장을 밝혔고, 이에 반해, Ernest는 "자유 변수와 양화된 변수가 사용된 문장을 분명하게 가르치고 이와 같은 유형과 더 복잡한 유형의 문장에 대해서도 연습시키자([16], p.182)"는 적극적인 자세를 취하였다. 물론, 매우 형식적인 지도가 우선시되고 있는 우리 교육 현실에서는 그러한 복합적 측면에 대한 의미 충실한 접근이 전무하다고 해도 과언이 아니다. 요컨대, 수학적 귀납법을 기계적으로 적용하게 하는 교육으로 말미암아 학생들은 도구적 이해 수준에서 벗어나지 못하고 있는 실정인 것이다.

이러한 교수-학습상의 문제 제기에서 출발하여 본 연구에서는 수학적 귀납법에 대

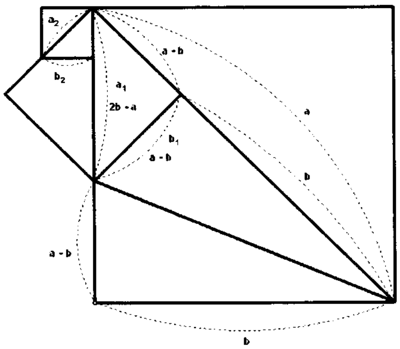
한 아이디어가 탄생하여 형식화되기까지의 역사적 발달 과정을 고찰하고 교수학적 접목을 꾀함으로써 학교 수학에서 수학적 귀납법의 지도와 관련한 함의점을 얻고자 한다.

1. 고대 그리스 수학의 수학적 귀납법 아이디어

(1) 고대의 재귀적 무한

Zeno의 이분법 역리에서 유한한 양을 절반으로 자르는 조작을 계속적으로 수행하는 무한 과정이나 아킬레스 역리 안에는 재귀에 근거한 착상이 들어있는데, 그러한 아이디어는 고대 그리스 수학사 속에 면면히 흐른다[1]고 할 수 있다([9], p.44).

한편, Toeplitz([42], pp.4-6)는 피타고라스 학파가 직각이등변삼각형의 경우 3:4:5와 같은 변 사이의 정수비가 없다는 것, 즉 등변과 빗변사이에 공통 척도가 없음을 뜻하는 통약불가능성을 발견하는 순간 역시도 재귀적 무한 추론 방식으로 설명한다. 그런데 그리스인들이 사용했을 것으로 보이는 자기 참조적 그리고 무한 반복적 추론양식은, 비록 '기하적'이라는 한계를 지니기는 하지만, 놀랍게도 17세기 Fermat가 대수적 명제를 증명할 때 사용한 무한 하강법(infinite descent)과 그 특성이 본질적으로 같다고 할 수 있다. 다시 말해, 각각 '양'과 수의 '크기'에 기초한 점만 다를 뿐 재귀적 추론을 통해 모순을 이끌어낸 방식은 거의 동일하다고 할 수 있다. 더욱이 Toeplitz가 제시한 논증 방식을 정사각형의 변과 대각선에 적용해 다음과 같이 기하-대수적 증명으로 전환시키면, 더욱 분명하게 두 아이디어의 유사성[2]을 확인할 수 있다.



<그림 1-1> 그리스 수학의 재귀

1) Archimedes가 π값을 계산할 때 재귀를 사용한 것도 대표적인 경우라 할 수 있다([29], p.3).

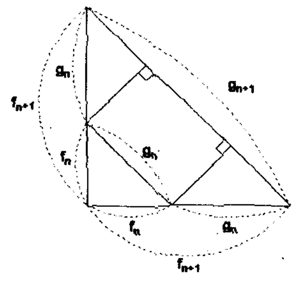
2) Eves([17], p.196)를 비롯한 많은 수학사학자들 역시, Fermat의 무한 하강법을 설명하기 위해, 그 방법을 이용한 $\sqrt{2}$ 의 무리수 증명을 보여준다.

주어진 정사각형의 대각선과 한 변이 통약가능하여 어떤 기준량 E에 대해서 각각 a배, b배가 된다고 가정해 보자(단, a,b는 자연수). 그러면, 이 정사각형보다 작은 정사각형, 즉 대각선과 한 변이 기준량 E의 각각 $(2b-a)$배, $(a-b)$ 배인 정사각형을 만들 수 있다. $(2b-a)$와 $(a-b)$를 각각 a_1, b_1 이라고 하자. 같은 방식에 의해, 이 두 번째 정사각형보다 작은 정사각형, 즉 대각선과 한 변이 기준량 E의 각각 $(2b_1-a_1)$배, (a_1-b_1) 배인 세 번째 정사각형을 만들 수 있다. $(2b_1-a_1)$과 (a_1-b_1)을 각각 a_2, b_2라고 하자. 다시 같은 방식을 적용하게 되면, 이 세 번째 정사각형보다 작은 정사각형, 즉 대각선과 한 변이 기준량 E의 각각 $(2b_2-a_2)$배, (a_2-b_2) 배인 네 번째 정사각형을 만들 수 있다. 이러한 과정은 무한히 수행가능하다. 하지만 어떤 고정된 크기를 가진 자연수 a,b에 대해 $a > a_1 > a_2 > a_3 > ......$ 과 $b > b_1 > b_2 > b_3 > ......$을 만족하는 무한수열 $a, a_1, a_2, ...$ 과 $b, b_1, b_2, ...$ 이 존재하는 것은 모순이다. 따라서 처음에 두 양이 통약가능하다는 전제가 잘못된 것임을 알 수 있다.

우리는, 이러한 예를 통해 피타고라스 학파가 수학적 귀납법의 원리를 분명하게 인식했는지의 여부를 가늠할 수는 없지만 적어도 그들이 그 원리를 암묵적으로 사용했다고 판단할 수는 있을 것이다([44]). 한편, 이러한 역사적 판단을 더 분명하게 지지해주는 '귀납적 정의'의 용례가 있다. 이 역시 변(f_n)과 대각선의 수(g_n)와 관련된 것인데, $f_1 = g_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + g_n$, $g_{n+1} = 2f_n + g_n$와 같이 귀납적으로 정의하고 그와 관련된 성질을 준일반적 방법으로 증명한 것3)이 바로 그것이다. 이러한 모습은 Proclus의 글을 통해 오늘날까지 고스란히 전해지고 있다4).

피타고라스 학파는 대각선과 변에 대한 아름다운 정리를 제안하였다. 그 정리는 변

3) Bergh는, 그들이 아래와 같은 도해를 관찰함으로써 변과 대각선의 수를 순차적으로 만들어가는 방법을 발견했을 것이라는 천재적인 추측을 제시하였다 ([26], vol 1, pp.400-401).

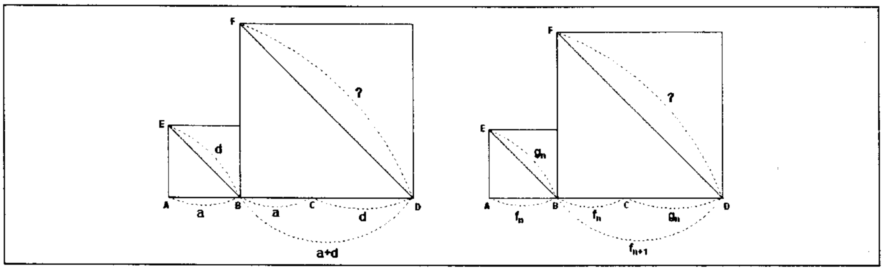


<그림1-2> **Bergh의 추측**

4) 참고적으로, [41](pp.133-137)에 인용된 Theon의 글을 통해서도 당시 수학자들이 점화관계를 능숙하게 다루었음을 알 수 있다. 즉, 그들은 초항에서부터 생성 원리에 따라 체계적으로 각 항을 유도할 줄 알았는데, 이것은 비록 일반항 표현을 쓰지는 않았지만 당시 명시적 차원에서 귀납적으로 정의할 수 있었다는 것을 나타내는 것이다

과 그 자체를 다시 더한 후 그 변에 대응하는 지름을 더하게 되면 어떤 지름이 되고, 지름과 그 지름에 대응하는 변을 더하면 어떤 변이 되는 것이다([41], pp.137-139 재인용).

그런데 한 변이 $a+d$ 일 때 그에 대응하는 대각선이 $2a+d$ 임을 보인 Proclus 의 다음과 같은 설명적 증명은 그리스인들이 점화 관계를 단지 발견하고 정의한 것에 머물지 않고 심지어 그것을 활용해 어떤 성질을 준일반적 방식으로 정당화하는 수준에 다다랐음을 보여준다.



<그림 1-3> Proclus의 증명

한 변이 AB 인데 그것은 BC 와 같다고 하자. BE 는 AB에 대응하는 대각선이라고 하자. 그러면, BE를 한 변으로 하는 제곱수는 AB를 한 변으로 하는 제곱수의 두 배이다[5].

그러면, 원론 규칙 II-10 에 의해, AD 와 CD 를 한 변으로 하는 제곱수의 합은 AB 와 BD 를 한 변으로 하는 제곱수 합의 두 배와 같다[6].

그런데 CD(즉, BE)를 한 변으로 하는 제곱수는 AB 를 한 변으로 하는 제곱수의 2배이다; 뺄셈에 의해 AD 를 한 변으로 하는 제곱수는 BD 를 한 변으로 하는 제곱수의 두 배가 된다.

BD 에 대응하는 대각선인 DF 를 한 변으로 하는 제곱수는 BD 를 한 변으로 하는 제곱수의 두 배가 된다.

그러므로 DF 를 한 변으로 하는 제곱수와 AD 를 한 변으로 하는 제곱수는 같게 된다. 그 결과 DF 와 AD 는 같게 된다. 다시 말해서, 변 BD 에 대응하는 대각선과 AD 는 같게 된다[7] ([26], vol 1, p.400 재인용).

표면적으로 이 증명 방식은 특정한 한 예를 증명한 것에 지나지 않아 보인다. 하지만 그 아이디어에 주목하게 되면 그 어떤 증명보다도 일반적이라는 것을 파악할 수가

5) $2(AB)^2 = (BE)^2$

6) $(AD)^2 + (CD)^2 = 2(AB)^2 + 2(BD)^2$

7) 변 $a+d$ 에 대응하는 대각선은 $2a+d$ 이다.

있다. 즉, 이 증명은 표기법의 차원에서는 예를 통한 설명에 지나지 않지만 $a_{n+1}=a_n+d_n$, $2(a_n)^2=(d_n)^2$인 관계로부터 명확한 규칙을 통해, $d_{n+1}=2a_n+d_n$, $2(a_{n+1})^2=(d_{n+1})^2$ (단, a_n 과 d_n 은 각각의 변과 대각선의 크기)인 관계를 항상 유도할 수 있음을 명확하게 보여준다고 할 수 있다. 요컨대, "19세기까지의 어떠한 이론보다도 탁월하고 심오하게" 수학적 귀납법의 준일반적 사용의 모습을 나타내는 것이라 할 수 있는 것이다 ([19], pp.30-31; [20], p.123).

(2) <원론> 속의 수학적 귀납법

재귀적 추론에 의해 무한을 다루는 흐름은 Euclid <원론>으로 이어진다. 이와 관련해. Itard([27], p.73)는 [원론 Ⅶ, 명제 3, 27, 36], [원론 Ⅷ, 명제 2, 4, 13]. [원론 Ⅸ, 명제 8, 9, 20] 속에 수학적 귀납법 아이디어가 들어있음을 주장한다. 특히, 다음 명제의 증명은 수학적 귀납법의 발생과 관련하여 두 가지 사실에 주목하게 한다.

[원론 Ⅶ, 명제 31] 임의의 합성수는 어떤 소수에 의해 나누어진다.

A가 어떤 합성수라고 하자; 나는 A가 어떤 소수에 의해 나누어지는 것을 보이려고 한다.

A는 합성수이기 때문에 그것은 어떤 수에 의해 나누어져야 한다. 그 어떤 수를 B라고 하자. B가 소수라면, 정리는 마무리된다. 그런데 그 B가 합성수라면, 어떤 수가 B를 나눌 것이다. 그 수를 C라고 하자. C는 B를 나누고 B는 A를 나누기 때문에, C는 A를 나눈다. C가 소수라면, 정리는 마무리 된다. 그 C가 합성수라면, 어떤 수가 C를 나누게 될 것이다.

그런데 이 탐색이 이러한 식으로 계속될 때 그 바로 전의 수를 나누는 어떤 소수를 찾을 수 있을 것이다. 물론, 그 소수는 A도 나눌 것이다. 왜냐하면 그러한 소수를 발견할 수 없다면 각각이 다른 것보다 작은 무한한 수들이 A를 나누게 되는데 이것은 수에서는 있을 수 없는 일이기 때문이다. 그러므로 그 바로 전의 수뿐만 아니라 A를 나누는 어떤 소수를 찾을 수 있을 것이다. 따라서 임의의 합성수는 어떤 소수에 의해 나누어진다 ([26], vol 2, p.332).

하나는 <원론>의 기본 방침인 공리, 공준, 정의로부터 정리를 연역해내는 종합만을 구사하지 않고 분석의 과정을 드러내고 있다는 것이고, 또 다른 하나는 그의 방법이 Fermat의 무한 하강법과 매우 유사하다는 점이다. 더욱이, 후자와 관련하여 우리는 실제로 Fermat가 동일한 명제를 자신의 무한 하강식 방법으로 어떻게 증명하였는지 확인할 수 있다([34], p.178). 위의 증명에서 Euclid는 명제의 충분조건을 찾는 분석법[8]을 분명히 사용하고 있는데, 이처럼 단계 상승을 받쳐주는 재귀 규칙을 분석에 의

8) [원론 Ⅸ, 명제 12] 에서도, 하강(regression)에 의한 증명의 모습을 볼 수 있다 ([19], p.29).

해 발견하고 정당화했다는 것은 Euclid 역시 그리스의 수학의 정신인 분석과 종합의 변증법적 통합을 이미 잘 알고 있었다는 것을 의미한다. 그렇다면, 분석의 자취를 없애버린 '사악한' 천재가 이 곳에선 왜 그것을 없애지 못했던 것일까?([31], p.140) 물론, 정리내용의 특성상 재귀를 시도할 수밖에 없었을 수도 있다. 하지만 증명과 관련한 사고 방법에 초점을 맞춘다면, 분석의 특징으로 설명되는 역행적 추론의 흔적을 남겼다는 것은 분석법이 이후 Fermat의 무한 하강법으로 이어지는 초기 수학적 귀납법의 아이디어와 밀접하게 관련된다는 함의를 피할 수 없을 것이다.

한편, 수학적 귀납법의 역사적 관점에서 조명될 필요가 있는 증명 중 하나는 [원론 IX, 명제 8]에 대한 것이다.

[원론 IX, 명제 8]

단위수부터 시작하여 우리가 원하는 만큼 많은 수들이 순서적으로 나열해 있을 때 이웃한 두 항의 비가 모두 같다고 하자. 그러면 단위수부터 쳐서 세 번째 수는 제곱수이다. 그리고 하나씩 건너뛰면서 뒤에 나오는 모든 수들이 제곱수이다. 네 번째 수는 세제곱수이다. 그리고 둘씩 건너 뛰어 뒤에 나오는 모든 수들이 세제곱수들이다. 일곱 번째 수는 제곱수이면서 동시에 세제곱수이다. 그리고 다섯씩 건너 뛰어 뒤에 나오는 모든 수들이 역시 제곱수이면서 동시에 세제곱수이다.

"단위수부터 시작하여 우리가 원하는 만큼 많은 수들이 A, B, C, D, E, F 9)와 같이 순서적으로 나열해 있고 이웃한 두 항의 비가 모두 같다고 하자. 나는 단위수부터 쳐서 세 번째 수인 B뿐만 아니라 하나씩 건너뛰면서 뒤에 나오는 모든 수들이 제곱수라는 것을, 단위수부터 쳐서 네 번째 수인 C뿐만 아니라 둘씩 건너 뛰어 뒤에 나오는 모든 수들이 세제곱수라는 것을, 단위수부터 쳐서 일곱 번째 수인 F뿐만 아니라 다섯씩 건너 뛰어 뒤에 나오는 모든 수들이 제곱수이면서 동시에 세제곱수라는 것을 보이려고 한다"로 시작하는 이 명제에 대한 증명 과정에서 우리는 놀랍게도 수학적 귀납법을 너무나도 선명하게 볼 수 있다([27], p.73 ; [19], p.28). 즉, "B는 제곱수이다. B, C, D에서 이웃한 두 항의 비가 같고 B가 제곱수이기 때문에 D 역시 제곱수이다[원론 VIII, 명제 22]. 마찬가지 이유10)로 F 역시 제곱수이다. 비슷한 방식으로 우리는 하나씩 건너뛰어 있는 모든 수들이 제곱수라는 것을 증명할 수 있다([26], vol 2, pp. 390-391)"는 부분은 변수문자만 없을 뿐, 점화 관계(원론 VIII, 명제 22)를 이용해 모든 홀수 번째 항이 제곱수가 된다는 것을 구성적 방식으로 증명해가는 모습을 분명하게 보여주고 있다. 물론, 이것이 수학적 귀납법을 증명 방법으로서 인식했다거나 명제함수 사이의 독

9) 단위수에 대한 표현이 생략되어 있다. 즉, 여기서의 A는 단위수가 아니다.

10) D, E, F에서 이웃한 두 항의 비가 같고 D가 제곱수이기 때문에, [원론 VIII, 명제 22]에 의해 F 역시 제곱수이다.

특한 함의관계인 귀납단계를 가설-연역적 수준에서 파악했다는 것에 대한 증거가 되는 것은 아니지만 수학적 귀납법을 암묵적으로 사용했다는 점을 명백하게 보여주는 것만은 사실이다.

2. Maurolycus - 수학적 귀납법에 대한 인식

이상의 고찰에서 고대 그리스 수학에서 수학적 귀납법 아이디어가 사용되고 있었다는 주장은 가능하지만 그것이 수학적 증명으로 인식된 것은 아니다. 그러면, 수학적 귀납법을 수학적 타당성을 확보하는 방법으로 인식한 최초의 수학자는 누구인가? 이에 답하기 위해 이탈리아의 수학자 Maurolycus(1494-1575)에 주목해보자.

Maurolycus의 업적에 대한 평가는 수학적 귀납법의 역사를 연구한 학자들 사이에서 논란을 일으키는 것 중 하나다([37]). 즉, 그가 어느 정도 수준까지 수학적 귀납법을 인식하고 사용했는지에 대한 역사적 논쟁이 줄곧 이어져 왔던 것이다. Vacca([43], pp.70-73)는 그가 수학적 귀납법을 체계적으로 사용했으며 Pascal에게 큰 영향을 끼쳤을 것이라고 주장한다. 이에 반해, Freudenthal ([19], pp.17-28)은 그가 수학적 귀납법을 사용했지만 체계적으로 사용한 것은 아니기 때문에, Pascal에게서 추상적 형식화의 영예를 뺏을 만한 근거가 없다고 주장한다. 요컨대, 그가 수학적 귀납법을 사용했다는 점에는 일치하지만 그것을 어느 정도까지 체계적으로 사용했는가에 대해선 역사적 판단을 서로 달리하는 것이다.

이제, 그의 <산술서(*Arithmeticorum Libri duo*)>에 나오는 수학적 귀납법 사용 예를 살펴보면서 그것의 체계적 사용의 정도와 수준을 검토11)해보도록 하자.

명제 15. 첫 홀수부터 어떤 행의 홀수까지 차례로 더하게 되면 (그 마지막 홀수와) 같은 행에 있는 제곱수와 같게 된다.12)

11) 그는 자신의 <산술서>에서 <표 2-1>에서 보는 바와 같이 수 사이의 관계를 귀납적으로 정의하면서 글을 시작하는데, 이는 귀납적 정의의 보편적 그리고 명시적 사용이 수학적 귀납법의 그것보다 역사적으로 먼저였다는 점을 보여주는 하나의 실례라 할 것이다.

정수	짝수	홀수	삼각수	제곱수	*N.P.A.L*
1	0	1	1	1	0
2	2	3	3	4	2
3	4	5	6	9	6
4	6	7	10	16	12
5	8	9	15	25	20
…	…	…	…	…	…

<표 2-1> Maurolycus의 표 ([7], p.201)

12) 제곱수를 S, 홀수를 O라고 할 때, " $O_1+O_2+O_3+\cdots+O_n=S_n$ "을 나타내는 것이다.

앞의 명제에 의해 첫 제곱수 (1)에 다음 행에 있는 홀수 (3)을 더하면 그 다음 제곱수 (4)가 된다. 이 두 번째 제곱수 (4)에 세 번째 홀수 (5)를 더하면 세 번째 제곱수인 (9)가 된다. 마찬가지로 세 번째 제곱수 (9)에 네 번째 홀수 (7)을 더하면 네 번째 제곱수인 (16)이 된다. 명제 13[13)]의 반복적인 적용에 의해 그렇게 무한히 계속하게 되면, 이 명제는 증명된다 ([7], pp.202-203 ; [19], p.25 재인용).

Maurolycus의 명제 15에 대한 증명 속에는 분명히 수학적 귀납법의 아이디어가 들어있다. 하지만 이 정도의 아이디어와 그에 따른 증명은 Euclid의 <원론>에도 등장하므로 Maurolycus를 수학적 귀납법의 역사에서 부각시키는 이유는 다른 측면에서 찾아야 할 것이다. 이와 관련해, 그의 책 서문은 하나의 중요한 단서가 된다고 할 수 있다. 그는 자신의 <산술서> 서문에서 Euclid 뿐만 아니라 다른 그리스 학자들이 도형수의 확장을 시도하지 않았다는 것을 지적하며 "따라서 대수 공식에 관한 것이면 어떤 것이라도 시도해보려고 한다. 다른 저자들은 증명하는 것에 주의를 기울이지 않은 것에 비해, 나는 그 공식들을 쉬운 방법으로 증명할 수 있다는 것을 보일 것이다 ([43], p.71 재인용)"라고 말한다. 이에 따르면, 그가 '쉬운 방법'이라고 표현한 '수학적 귀납법'을 분명하게 인식하고 사용했다는 주장은 무리가 없을 듯하다. 즉, 그는 셈수에 대한 이해를 바탕으로 암묵적으로 수학적 귀납법을 사용한 것에 그친 것이 아니라 그 방법을 '인식하고 의식적으로 사용'한 것이다.

이제 그가 그 '쉬운 방법'을 인식할 수 있었던 계기를 추측해보자. 역설적이겠지만, 그 추측의 단서를 찾는 데 도움을 주는 것은 Maurolycus 편의 Vacca가 아니고 그에 대한 비판적 검토자인 Freudenthal이다. Feudenthal은 Maurolycus에 대한 Vacca의 평가가 오류임을 밝히기 위해 Maurolycus가 사용한 정당화 아이디어를 끈질기게 추적하였고, 그 철저한 검증 작업을 통해 밝혀낸 것은, <산술서>에서 15번 명제를 제외하고 수학적 귀납법이 분명히 사용된 것은 84번 명제[14)] 뿐이고 58번 명제의 증명에 수학적 귀납법과 표면적으로는 다르지만 그것과 관련된 아이디어가 들어있다는 것이다.

여기서 주목할 것은 수학적 귀납법을 사용하는 것이 보다 자연스러운 상황(예:58번 명제) 속에서 Maurolycus가 대신 사용한 방법이다. <산술서>의 57번, 58번 명제의 내용을 오늘날의 기호로 표현하자면, 각각 $N^3+\{T(N-1)\}^2=\{T(N)\}^2$ (단, T는 삼각수), $\sum_{1}^{N-1} n^3 = \{T(N-1)\}^2$이다. 만약 Maurolycus가 수학적 귀납법을 체계적으로 사용할 수 있었다면 58번 명제에 대해, 15번 명제의 증명에서와 같이, 57번 명제를 의도적이고 반복적으로 이용하는 'n에서 $n+1$로의 논증'을 통해 준일반적 방식으로 정당화하였을 것이

13) *명제 13* : 각각의 제곱수와 다음 행 홀수의 합은 다음 행 제곱수와 같다. 이 명제는 제곱수를 S, 홀수를 O라고 할 때, "$S_n+O_{n+1}=S_{n+1}$"을 나타내는 것이다.

14) 오늘날의 기호로 표현하자면, "$P(k,n)=P(3,n)+(k-2)\times P(3,n-1)$" (단, $P(k,n)$은 k각 피라미드 또는 k각뿔의 n번째 수)이 성립한다는 것이다.

다. 그런데 이러한 예상과 달리, 58번 명제의 증명에서 "5번째 삼각수의 제곱 225는 명제 57에 따라 5번째 세제곱수와 4번째 삼각수의 제곱의 합으로 나타내어진다. 4번째 삼각수의 제곱은 4번째 세제곱수와 3번째 삼각수의 제곱의 합이다....... 5번째 삼각수의 제곱 225는 5번째 세제곱수부터 첫 번째 세제곱수까지의 합이 된다"[15]는 것과 같이 원초적인 증명 방식인 하강법을 구사하였다([19], pp.26-27). 자신의 발견 과정(분석)을 숨기고 정당화(종합)의 방향으로 집필하는 것이 통례인 수학자들의 집필 방식을 감안할 때, 이처럼 수학적 귀납법을 일관되게 사용하지 않은 것은 그의 수학적 귀납법에 대한 인식이 추상적인 형식화에 이르지 못했음을 나타내는 것이라 할 수 있다.

한편, 우리는 이 예를 통해 그가 인식한 '쉬운 방법'에는 하강의 아이디어가 포함되며, 즉 수학적 귀납법을 인식하는 역사 속에서 '하강'은 그 지식의 본성상 필연적으로 출현할 수밖에 없었음을 재삼 확인할 수 있다. 그렇다면 분석과 종합의 변증법적 통합을 추구했던 그리스인들은 하강법을 사용하면서도 왜 수학적 귀납법을 인식하지 못했을까? 이에 대한 답을 15번, 58번, 84번 명제의 공통성에서 추측해볼 수 있을 것이다. 그 명제들은 모두 "$b_1=a_1$이고 $b_{n+1}=b_n+a_{n+1}$이면 $\sum_1^N a_n=b_N$이 성립한다"는 형태를 띠고 있는데([19], p.28), 이러한 공통성은 오직 수론을 형식불역의 원리에 의해 체계적으로 확장하는 과정 속에서만 접할 수 있는 것이다. 즉, Maurolycus가 그리스인들과 결정적으로 달랐던 것은 (그 자신이 책 서문에서 밝혔듯이 고대 그리스인들이 시도하지 않았던) 도형수의 체계적 확장을 통해 수의 패턴뿐만 아니라 계산 절차에서의 반복적 패턴을 정리할 수 있는 기회가 있었던 것이라 할 수 있는데, 그는 그러한 과정 속에서 분석을 통해 '점화 관계의 반복'과 문제 간의 공통 구조를 통찰하고 자신의 정당화 방식을 반성하여 수학적 귀납법을 하나의 증명법으로 인식할 수 있었던 것이다.

요컨대, 현재로서는 Maurolycus의 위상에 대한 논쟁에 마침표를 찍을 수는 없지만 적어도 그가 수학적 귀납법을 명시적으로 인식하고 사용했다는 사실에는 이견이 없을 것이다. 그리고 본 연구의 입장에서 더욱 주목할 점은 수학적 발견의 논리라 할 수 있는 '분석과 종합의 통합'과 '형식불역의 원리'가 수학적 귀납법에 대한 인식을 이끌었던 쌍두마차였다는 사실이다.

3. Pascal –추상적으로 형식화된 수학적 귀납법

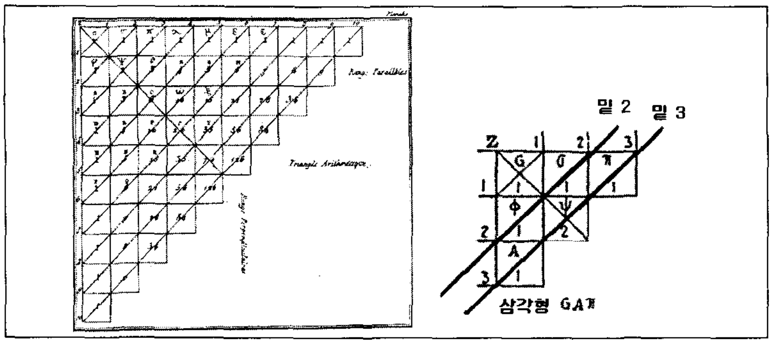
많은 역사가들은 수학적 귀납법에 대한 최초의 발견자, 즉 증명 방법으로서의 수학

15) $\{\frac{6\times5}{2}\}^2=5^3+\{\frac{5\times4}{2}\}^2=5^3+4^3+\{\frac{4\times3}{2}\}^2=\ldots\ldots=5^3+4^3+3^3+2^3+1^3$

적 귀납법을 인식한 첫 수학자로 보통 Maurolycus를 지목하지만 그 방법을 명확하게 진술한 첫 번째 사람은 Pascal(1623-1662)이라는 평가를 내리고 있다([19], pp.302-303 ; [40], p.25). 그리고 실제로, Pascal은 <산술삼각형에 대한 논문(Traité du Triangle Arithmétique)>에서 산술삼각형에 관한 12번째 정리를 증명하면서 수학적 귀납법을 단지 사용하는 단계를 넘어 추상적으로 형식화하기에 이른다. 당시에는 이중첨자 표기법이 널리 사용되지 않았기 때문에, 그 증명 역시 구체적인 예를 통한 개략적인 설명에 불과한 것이었지만 그는 수학적 귀납법을 하나의 일반적 증명 방법으로서 제시했던 것이다([25], pp.287-302 ; [33], pp.36-43).

그가 어떻게 '수학적 귀납법의 원리'라는 보편적 아이디어를 추출하여 형식화할 수 있었는지 살펴보도록 하자.

<그림 4-1>에서 보듯이 그는 산술삼각형 도해 안의 각 정사각형을 격자(cell)라 하고 그리스어와 라틴어를 사용하여 그 각각을 명명한 후, 같은 가로줄, 세로줄 및 좌하우상의 대각선상에 있는 격자들을 각각 동일 행, 동일 열 및 동일 밑에 있는 것이라고 정하였다. 그리고 m행, n열의 수를 $P(m,n)$라고 할 때, $P(1,1)=1$이고 모든 자연수 p,q에 대하여 $P(p,1)=1$, $P(1,q)=1$, $P(p+1,q+1)=P(p+1,q)+P(p,q+1)$이 되는 원리를 통해 산술삼각형을 구성하였다. 즉 각 격자에 주어진 격자의 바로 왼쪽 및 위쪽 격자의 수를 더한 수를 할당하여 만든 것이다. 한편, 그는 이렇게 만들어진 삼각형에 관한 19개의 정리들을 제시하고 개략적으로 증명하였는데, Pascal의 산술삼각형16)에 관한 정리 및 증명 예들은 <표 4-1>과 같다([14]).



<그림 4-1> Pascal의 삼각형

16) <그림 4-1>의 산술 삼각각형 그림은 [12](p.93)에 나온 Pascal의 원래 그림을 재복사해 놓은 것이다. 산술삼각형은 Pascal에 의해 처음으로 도입된 것은 아니지만, 확률론의 계산에 그것을 적용한 것은 그의 독창적 업적이라고 할 수 있다([12], p.94).

정리 1. $P(m,1)=P(1,n)=1$ **예)** $\phi=G, A=\phi, \sigma=G, \pi=\sigma, \ldots\ldots\ldots$	**정리 11.** $P(n,n)=2P(n-1,n)=2P(n,n-1)$ **예)** $C=\theta+B=2B=2\theta$
정리 2. $P(m,n)=\sum_{i=1}^{n}P(m-1,i)$ **예)** $w=R+\theta+\psi+\phi$	**정리 12.** $P(m+1,n):P(m,n+1)=n:m$ **예)** $C:E=3:2$
정리 3. $P(m,n)=\sum_{i=1}^{m}P(i,n-1)$ **예)** $C=B+\psi+\sigma$	**정리 13.** $P(m+1,n+1):P(m,n+1)=m+n:m$ **예)** $F:C=5:3$
정리 4. $P(m,n)-1=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m-1}P(i,j)$ **예)** $\xi-1=R+\theta+\psi+\varphi+\lambda+\pi+\sigma+G$	**정리 14.** $P(m,n+1):P(m,n)=m+n-1:n$ **예)** $F:E=5:2$
정리 5. $P(m,n)=P(n,m)$ **예)** $D=\lambda=G,\ B=A+\psi=\pi+\psi=\theta$	**정리 15.** $\sum_{i=1}^{n-j+1}P(j,i):P(j,n-j+1)=n:j$ **예)** $\phi+\psi+\theta:\theta=4:2$
정리 6. $\sum_{i=1}^{n_0}P(m_0,i)=\sum_{i=1}^{n_0}P(i,m_0)$ **예)** $\sigma+\psi+B+E+M+Q=\phi+\psi+\theta+R+S+N$	**정리 16.** $\sum_{i=1}^{n-j+1}P(j,i):\sum_{i=1}^{n-j}P(j+1,i)=j+1:n-j$ **예)** $A+B+C:D+F=4:2$
정리 7. $\sum_{i+j=n+1}P(i,j)=2\sum_{s+t=n}P(s,t)$ **예)** $D+\lambda+B+\theta=2A+2\psi+2\pi$	**정리 17.** $\sum_{i=1}^{n}P(m,i):\sum_{i=1}^{m}P(i,n)=n:m$ **예)** $B+\psi+\sigma:B+A=3:2$
정리 8. $\sum_{i+j=n+1}P(i,j)=2^{n-1}$ **예)** $1\rightarrow2\rightarrow4\rightarrow\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$	**정리 18.** $\sum_{i=1}^{n-j+1}P(j,i):\sum_{i=1}^{j}P(n-j+1,i)=n-j+1:j$ **예)** $\phi+\psi+\theta+R+S+N:P+Q=6:2$
정리 9. $\sum_{i+j=n+1}P(i,j)-1$ $=\sum_{i+j=2}P(i,j)+\sum_{i+j=3}P(i,j)+\cdots+\sum_{i+j=n}P(i,j)$ **예)** 공비 2인 등비수열(geometric progression)의 성질	**정리 19.** $P(j+1,j+1):4P(j,j)=2j-1:2j$ **예)** $\rho:4C=5:6$
정리 10. $\sum_{i=1}^{k}P(i,j)\}=2\{\sum_{p=1}^{k-1}P(p,q)\}+P(k,n-k)$ (단, $i+j=n+1,\ p+q=n,\ k<n$) **예)** $D+B+\theta=2A+2\psi+\pi$	

<표 4-1> Pascal의 삼각형과 관련된 정리

여기서 형식화된 수학적 귀납법이 등장하는 것은 정리 12를 증명하면서인데, 그 증명을 다른 것과 비교함으로써 그가 어떻게 무한의 함의관계에 대한 아이디어를 초기 조건 및 귀납의 단계로 응축하여 형식화할 수 있었는지 개연성 있는 추측을 하고자 한다. 이 추측이란 수학적 귀납법에 대한 형식화가 이루어지기 전과 그것이 이루어지는 상황 속에서 Pascal이 경험했을 지적 필요성을 감지해내는 작업을 뜻한다.

정리 12: 산술삼각형에서 같은 밑 상의 이웃한 두 격자가 있을 때, 위 격자 대 아래 격자의 비는 (대각선 상에서) 그 위 격자와 그것보다 위에 있는 격자들의 개수를 합한 수 대 그 아래 격자와 그것보다 아래에 있는 격자들의 개수를 합한 수의 비와 같다.

같은 밑에 있는 E, C와 같은 어떤 이웃한 두 격자에 대해 생각해 보자.[17] 나는 다음과 같은 점을 주장한다:

$$\underbrace{B}_{\text{아래 격자,}}\text{대}\ \underbrace{C\text{는}}_{\text{위 격자,}}\quad \underbrace{2}_{B,H\text{의 두 격자,}}\ \text{대}\ \underbrace{3\text{과}}_{C,R,\mu\text{의 세 격자}}\quad \text{같다.}$$

이 명제가 비록 무한한 경우들을 다루는 것이지만, 나는 두 보조정리를 상정하여 다소 짧은 증명을 제시해 보려고 한다.

보조 정리1: 이것은 자명한 것인데, 이 정리는 2번째 밑에서 성립하다; ϕ 대 σ가 1 대 1이기 때문에 분명한 것이다.

보조정리 2: 이 명제가 어떤 밑에서 성립한다고 하면, 그 명제는 필연적으로 다음 밑에서도 성립하게 된다.

그것들로부터, 이 명제가 모든 밑에 대해서 필연적으로 성립하게 된다는 것을 알 수 있다: 보조정리 1에 의해서 2번째 밑에 대해 성립한다; 그러므로 보조정리 2에 의해서 3번째 밑에 대해서도 성립한다; 따라서 4번째 밑에 대해서도 성립한다, 그리고 무한히 진행한다.

이제 증명에 있어서 보조정리 2만 보이면 된다. 어떤 밑, 예를 들어 4번째 밑 $D\lambda$에 대해서 이 명제가 성립하다고 하자. 즉, D 대 B는 1 대 3, B 대 θ는 2 대 2, θ 대 λ는 3 대 1 등이 성립한다고 하자. 그러면, 그 다음 밑 $H\mu$에서도 같은 종류의 비가 성립하게 될 것이다. 예를 들어, E 대 C는 2 대 3일 것이다.

가정에 의하여, D 대 B는 1 대 3이 된다. 그러므로

$$\underbrace{D+B}_{E}\ \text{대}\ B\text{는}\quad \underbrace{1+3}_{4}\ \text{대}\ 3\text{과}\quad \text{같다.}$$
$$E\ \text{대}\ B\text{는}\quad 4\ \text{대}\ 3\text{과}\quad \text{같다.}$$

같은 방식으로, 가정에 의하여, B 대 θ는 2 대 2가 된다. 그러므로

$$\underbrace{B+\theta}_{C}\ \text{대}\ B\text{는}\quad \underbrace{2+2}_{4}\ \text{대}\ 2\text{와}\quad \text{같다.}$$
$$C\ \text{대}\ B\text{는}\quad 4\ \text{대}\ 2\text{와}\quad \text{같다.}$$

그런데 B 대 E는 3 대 4와 같다.

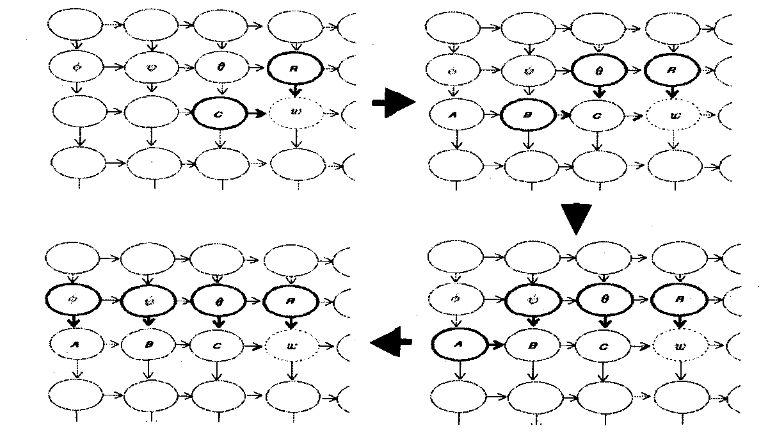
그러므로 이중 비례에 비해, C 대 E는 3 대 2와 같다. 그것이 증명하려는 것이었다.

그 증명은 같은 방식으로 나머지 부분에서도 주어질 수 있다. 왜냐하면 이 증명은 앞선 밑에 대해 그 비례가 성립한다는 가정과 각 격자가 바로 왼쪽과 위 격자의 합으로 이루어졌다는 항상 참이 되는 사실에만 기초하기 때문이다([39], pp.72-74 재인용).

여기서 주목할 것은 정리 12의 증명 방법이다. Pascal은 정리 12 이전의 정리들을

17) 5번째 밑의 대각선에 차례대로 H, E, C, R, μ가 놓여있다.

다룰 때에는 이처럼 증명 방법과 그 구조를 명시적으로 나타내지 않았다. 정리 12와 그 이전의 11개 정리들 사이에 드러나는 가장 뚜렷한 차이는 정리 12 이전의 것이 모두 등식(equality)인 반면에 그 이후의 정리들은 전부 비례식(proportion)이라는 사실이다. 그렇다면 등식을 정당화할 때 Pascal은 어떤 방법을 구사했었고, 또 그 방법을 정리 12에서 더 이상 사용하지 않았던 이유는 무엇이었을까? 그가 산술 삼각형에 대한 11개 등식을 정당화하였던 방식은 어떤 구체적인 예를 임의로 선택해서 그 경우가 타당하다는 것을 이미 참임이 확실한 경우로 후진해감으로써 입증해 보이는 하강법이었다. 이것은 연역적인 수준의 일반적 증명이라기보다는 포괄적 예를 사용한 설명 또는 사고실험에 가깝다고 할 수 있다. 그러한 정당화 방식을 정리 2에 대해 시각적으로 나타내어 보면 <그림 4-2>와 같다.



산술 삼각형의 형성 원리를 순차적으로 적용하게 되면, $w=R+C=R+\theta+B=R+\theta+\psi+A=R+\theta+\psi+\phi$ 인 관계가 성립함을 알 수 있다.

<그림 4-2> Pascal의 하강법

이제, 11개의 정리에 적용된 하강법을 정리 12에 적용하는 것에 있어서 어떤 문제가 있었을 지에 대한 의문이 제기된다. 그 정리에 대해 수학적으로 하강법의 적용이 불가능한 것은 아니다. 그러나 수학화 활동에서 추구하는 단순화를 기대할 수 없고, 하강법을 사용하더라도 그 정리가 성립하는 것을 한 눈에 파악하게 할 수 있을 만큼 증명의 전체 구조가 선명하게 드러나지 않는다는 것이 문제이다. $A:B$ 의 비례관계를 알아내기 위해 $A:C$와 $C:B$ 와 같은 연비례 관계를 도출하고 또다시 그 각각에 대해 $A:D$와 $D:C$ 그리고 $C:E$와 $E:B$ 같은 연비례 관계를 찾아낸다는 것은 문제가 오히려 더욱 복잡해지고 어려워짐을 뜻한다. 이중첨자와 같은 기호를 사용하지 않던 시기[18]에, 이 정리를 단지 하강법에 의해 정당화하는 것은 용이하지 않을 뿐만

18) "무한한 자연수 전체를 포괄하게 되는 첨자는, 역사적으로, 최근의 수학 발명품이다([22], p.81)."

아니라 확신도 주기 힘들었다고 할 수 있다. 이 과정에서 Pascal은 단지 확인 차원에서 이루어져왔던 하강법이 수학적 타당성을 부여하는 궁극적 이유를 진지하게 고찰하는 전환기를 맞았을 것으로 추측할 수 있다. 다시 말해, 그는 자신의 수학적 활동 안에 이미 암묵적으로 가정되고 있는 하나의 원리, 즉 하강법에 대한 지속적 경험과 반성으로부터 마치 활시위를 당겼을 때의 추진력과 같은 무한 전진 과정으로서의 확실성을 의식화한 것이다.

앞선 여타 수학자들과 비견되는 Pascal의 업적은 무한히 전개되어가는 증명 절차만을 제시한 것이 아니라 그 증명이 타당한 근거를 하나의 추상적 아이디어로 대상화했다는 사실이다. 이것은 Pascal이 수학적 귀납법을 구조적으로 이해했음을 뜻하는데, 여기서 작동된 지적 필요성으로서 정리 12의 성격을 그 앞의 11가지 정리와 비교할 수 있다. 연비례가 복잡하게 얽혀있는 맥락과 함께 주목해야 할 것은 재귀적이지만 선형적이지 않은 자료 구조이다. 격자 대 격자로 이루어진 무한 비례관계들이 일렬로 나열되어 있지 않은 맥락 속에서, 그것들에 관한 어떤 일반적 성질을 증명하는 것은 매우 어려운 일이라 할 수 있다. 사실, 이러한 문제 상황 속에서 참인 각 진술들이 빠짐없이 연결되었다는 것을 보여주는 것은 거의 불가능한 일이다. 그런데 오히려 바로 이 난관이 수학적 귀납법의 원리를 형식화할 수밖에 없었던 이유와 밀접한 관련이 있다고 할 수 있다. '같은 밑'에 있는 모든 자료들을 하나의 대상으로 묶어버린 것은 타당화의 명료성과 단순성을 위한 전략의 핵심이라 할 수 있는데, 이 때 단순히 항 대 항의 관계가 아니라 그처럼 묶음 대 묶음의 관계를 기초로 전체 증명의 골격을 개괄적으로 보여주기 위해서는 수학적 귀납법의 원리를 추상화할 수밖에 없었던 것이다. 요컨대, 그는 하강법에 의한 분석이 용이하지 않은 맥락 속에서 그 방법에 대한 반성을 통해 수학적 귀납법을 추상화할 수 있었던 것이다.

4. Fermat의 (무한) 하강법

Pierre De Fermat(1601-1665)는 'n에서 $n+1$로의 논증'을 사용하지 않고 'n에서 그것보다 작은 어떤 정수로의 추론' 방식을 사용하였는데 이러한 하강식 증명방법을 흔히 역방향의 수학적 귀납법(inverted mathematical induction)으로 평가한다([10], p.197; [5], p.353). Fermat가 사용한 이 증명법이 수학적 귀납법의 역사 속에서 어떠한 기여를 하였는지 추적해보자.

1659년에 Carcavi에게 보낸 편지[19]("*Relation des nouvelles découvertes en la*

19) 본문에서의 인용문은 <Oeuvres de Fermat(Vol.2), 1891, pp.431-436>의 영어번역 일부를 재인용한 것이다. Fermat는 자신의 방법에 대한 확신을 Diopantus의 *Arithematica* 여백에 다음과 같이 표현하기도 하였다: "직각삼각형의 각 변이 양의 정수일 때 그 넓이는 사각수가 되지 않는다. 나는 이 정리에 대한 증명을 아주 힘든 분투 끝에 알아낼 수 있었다. 나는 여기

science des nombres")에는 그 방법에 대한 Fermat의 생각이 비교적[20] 잘 표현되어 있다. 그 편지에 수록된 '방법'은 다음과 같다.

보통 책에 제시되어 있는 방법들은 수론의 그러한 어려운 명제들을 증명하는데 충분하지 않기 때문에, 나는 완전히 새로운 방법을 고안해 내었다. 나는 이 증명 방법을 무한 하강법(infinite or indefinite descent)이라 부르겠다; 우선 나는 그 방법을 다음과 같이 결과가 부정적인 명제에만 이용하겠다:…… 각 변이 정수이고 그 넓이가 사각수가 되는 직각 삼각형은 존재하지 않는다. 그 증명은 귀류법(reductio ad absurdum)에 의해 수행되어진다. 각 변이 정수인 어떤 직각삼각형의 넓이가 사각수일 때, 같은 성질을 가진 그 첫 번째 삼각형보다 작은 두 번째 삼각형이 있게 된다; 그렇다면 같은 추론방식에 의해, 두 번째 삼각형보다 작은 세 번째 삼각형이 있게 된다; 네 번째, 다섯 번째, 그리고 계속 영원히. 그러나 주어진 수보다 작은 수들이 무한히 많지는 않다. 이것으로부터 각 변이 정수인 직각 삼각형의 넓이가 사각수가 되는 것은 불가능하다는 결론을 내리게 된다 ([3], pp.55-56 재인용).

Fermat의 무한 하강법은 n에서 그것보다 작은 정수로 하강할 때 얼마나 작아지는지에 대한 어떠한 정보도 제공하지 않는다. 이러한 간격의 불규칙성은 일정한 간격을 유지하는 n에서 $n+1$로의 상승 논증인 수학적 귀납법과는 확연히 구별된다고 할 수 있다. 더욱이, 반복되는 추론의 출발점인 같은 성질의 두 번째 삼각형의 존재에 대한 주장도 모호하다. 이에 대한 Fermat 자신의 견해는 다음과 같다.

나는 그런 성질의 직각삼각형이 있다면 첫 번째 것보다 작은 같은 성질의 다른 것이 있을 것이라는 추론을 덧붙이지 않는다. 왜냐하면 증명이 너무 길고 그것이 내 방법의 전반적인 신비로움이기 때문이다. 나는 Pascal, Robervals 등 다른 많은 재능 있는 자들이 나의 지시에 따라 그것을 찾을 수 있다면 만족할 것이다([32], p.348 재인용).

이에 비해, 무한 하강법은 하강과 귀류법이 적용될 수 있다는 점에서 정렬성의 원리(well-ordering principle)에 기초한 증명법과 매우 유사해 보인다([15], p.121; [18], p.17; [24], p.247). 실제로 " $x^4+y^4=z^4$을 만족하는 양의 정수 x, y, z는 없다"는 정리에 대한 Fermat의 무한 하강법 증명[21]은 $x^4+y^4=z^2$을 만족하는 양의 정수해 중에서 z 값이 제일 작은 해 (x_1, y_1, z_1)을 가정하게 되면 동일한 하강 방식에 의해 또 다른 해 (x_2, y_2, z_2)

에 그 증명을 다시 써 놓겠다. 왜냐하면 증명에 이용되었던 과정이 수론에 놀랄만한 발전을 가져올 것이기 때문이다([17], p.195 재인용)."

20) Fermat의 다른 수학적 성과물과 마찬가지로, 각 명제에 대해 하강 증명이 이루어지는 세부 절차에 대한 자세한 설명을 많이 하지는 하지 않았다([6], p.467). 하지만 그의 무한 하강법은 편지를 통해 비교적 상세하게 전해지고 있다 ([28], p.419).

21) 실제적 증명의 모습은 [2](pp.181-184), [11](pp.1-21), [32](pp.353-355)에서 찾아볼 수 있다.

(단, $z_2 < z_1$)를 유도하여 귀류법으로 매우 쉽게 증명할 수 있다([8], p.335). 다만, Fermat의 무한 하강법과 정렬성의 원리에 의한 '어떤 명제를 부정하고 그 부정된 성질을 만족하는 가장 작은 원소보다 더 작은 원소를 유도하는 증명법' 사이에는 미묘한 차이가 있다. 우선, 정렬성의 원리에 의해 주어진 명제를 간접적으로 증명할 때는 단 한번의 하강만 보여주면 되기 때문에, 하강의 횟수에서 차이가 난다. 또한 무한하강법은 수의 '순서'가 아니라 그 '크기'에 의존하고 있다는 점에서 정렬성에 기초한 증명법과는 구별된다. Fermat의 무한 하강법에서, 주어진 어떤 자연수보다 작은 서로 다른 수들에 의해 무한수열을 이루는 것이 불가능하다는 것은 수의 '크기'를 이용하는 것인데, 이것은 암묵적으로 'Dirichlet의 박스 원리(비둘기 집의 원리)'에 기초한 것이라 할 수 있다.

이러한 Fermat의 무한 하강법이 오늘날 역방향의 수학적 귀납법이라 재평가되고 있는 가장 큰 이유는 수학적으로 사고하는 방법을 있는 그대로 드러냈기 때문일 것이다. Woodall([46], p.67)은 '모르는 것'에서 '아는 것'으로 나아가는 수학적 귀납법이 가장 실제적이라 주장했는데, Fermat가 바로 그와 같이 적용범위가 넓고 강력한 사고방법, 즉 '불확실한 것'에서 '확실한 것'으로 나아가는 새로운 수학적 귀납법을 고안해냈던 것이다. 한편, 그의 이러한 독창적 아이디어는 무한하강법을 수정, 보완하여 만든 다음과 같은 유한하강법에도 잘 드러나 있다.

나는 내 방법을 결론이 참이 되는 문제에 적용하기 위해 수많은 시간을 허비해야만 했다. 결론이 거짓이 되는 문제에 그 방법을 적용하는 것보다 무척 어려웠기 때문이다. 그만큼 어려웠다. $4k+1$ 형태의 모든 소수가 두 사각수의 합으로 이루어졌다는 것을 증명할 때, 나는 심한 고통에 시달렸다. 그러나 나는 수없이 고민하고 반성하면서 마침내 필요한 빛을 보게 되었다. 약간의 필연성을 보충해주는 어떤 새로운 원리에 의해 내 방법을 결론이 참이 되는 문제에도 적용할 수 있었다. 임의로 선택된 어떤 $4k+1$ 형태의 소수가 두 사각수의 합으로 이루어지지 않았다면, 동일한 성질을 가지고 있는 같은 $4k+1$ 형태의 더 작은 다른 소수가 존재하게 될 것이다. 그리고 더 작은 세 번째 소수가 있을 것이고 이런 식으로 5에 이르도록 하강할 것이다. 이러한 5는 두 사각수의 합으로 이루어져서는 안 되는 소수인데, 사실 그 5는 두 사각수의 합이 된다. 이것으로부터, 귀류법에 의해, 문제에서 다루는 모든 수가 결국 사각수의 합이 된다는 사실을 추론해 내게 된다 ([8], p.334 재인용).

Fermat의 추론 방식은, 무한 과정이든 유한 과정이든, 모르는 것으로부터 아는 것으로 나아가는 분석적 사고의 전형적 모습을 보여주고 있다. 한편, 이 분석적 하강법은 결론을 부정하여 이미 참임을 알고 있는 명제의 부정에 이르는 $\sim P(n) \to \sim P(s) \to \sim P(t) \to \cdots \to \sim P(n_0)$ (단, $n > s > t > \cdots > n_0$)와 같은 전략인데, 이는 수학적 귀납법의 대우 형태에 가깝다고 할 수 있다. 또한, Fermat의 하강법은 이미 참임이 드러난

명제(의 부정)에 이르는 방법이기 때문에 거시적으로는 충분조건을 찾아가는 과정이지만 각각의 국소적 단계는 필요조건을 찾는 과정이라 할 수 있다. 즉, $P(n) \leftarrow P(s) \leftarrow P(t) \cdots \leftarrow P(n_0)$ 와 같은 종합과 그 근본적인 아이디어는 동일하지만 충분조건보다는 필요조건을 활용하는 방식이라 할 수 있는 것이다.

그렇다면, Fermat의 하강법은 고대로부터 사용된 하강과 어떤 차이가 있는가? 사실, 외양적으론 특별한 차이가 있다고 볼 수 없다. 그렇기 때문에, 이것은 Fermat가 심한 고통을 겪은 후에 자각한 것의 실체가 무엇이었느냐는 것에 대한 질문이라 할 수 있다. 물론, 이에 답하기 위해선 문헌 자체에 대한 고증뿐만 아니라 철저한 해석학적 작업이 요구된다고 할 수 있다. 여기서 다시 한번, Fermat가 다루었던 문제의 종류로부터 그에 대한 답을 유추해낼 수 있다. 그가 주로 다룬 문제들은 Pascal의 삼각형에서의 합과 비에 관한 공식과 같은 '계산' 중심의 정리가 아니고 (확연한 것은 아니지만) 조건과 결론 사이의 개념적 관련성을 취급하는 조건명제들이라 할 수 있다. 그리고 이것은 그가 계산이 아니라 전칭 조건명제의 타당성을 보이는 방법에 대해 진지한 고민을 했다는 것을 뜻한다.

한편, 바로 이 점을 고려한다면 Fermat의 의식적 하강활동에서 그 '의식'의 대상이 무엇인지가 뚜렷이 밝혀진다고 할 수 있다. 즉, 그가 "동일한 성질을 가지고 있는 ... 형태의 더 작은 다른 소수가 존재하게 될 것"이라고 말할 때 그가 감지했던 '통찰'이 무엇이었는지가 드러나는 것이다. 다시 말해, Fermat의 목적지향적인 하강 활동의 성격에 비추어볼 때 그는 하강법이 가능한 기준이 무엇인지를 명확히 인식했다고 볼 수 있을 것이다. 요컨대, 그는 그러한 증명이 가능한지를 결정짓는 핵심적 기준이 명제함수(또는 그것의 부정형태)의 구조를 유지시키는 단계하강 조작 또는 명제함수 사이의 상사성(구조적 동형성)이 존재하느냐의 유무라는 점을 파악했던 것이다. 한편, 오늘날의 이산수학자들 역시 이러한 방법적 지식을 지속적으로 활용하고 있다는 점[22)]을 고려한다면, Fermat의 예언대로 하강법에 담긴 아이디어는 이산수학의 발전에 지대한 영향을 끼치게 되었다고 할 것이다.

이상의 고찰에 따르면, Fermat의 (무한)하강법은 오늘날의 정렬성의 원리에 기초한 간접증명법만큼 간결하고 명확해 보이지는 않지만 현대적 방법이 감추고 있는 분석적 사고 방법을 명시적으로 보여준다. 다시 말해, 오늘날과 같이 정렬성의 원리를 사용해 단 한번의 하강만으로 문제를 해결할 수 있다하더라도 그것을 통해 Fermat 의 위대한 사고실험을 경험할 수는 없는 것이다. 물론 그것은 Fermat의 하강법이 발견과 정당화를 결합한 증명법이기 때문일 것이다.

22) 조한혁 & 김서령(2007, 개인적인 의사교환)에 따르면, 대다수의 이산수학자들은 이러한 방법적 지식을 체득하였고 그 가치를 경험했기 때문에 실제적으로 추측하고 증명하는 실제적인 상황 속에서 많은 경우에 있어 명제함수의 조건을 유지하기 위한 하강 조작을 의도적으로 찾는다고 한다.

5. 아라비아 수학의 수학적 귀납법에 대한 재조명

Vacca([43])에 의해 수학적 귀납법의 시초에 대한 새로운 시각이 제시된 이래, 그의 논의가 Freudenthal([19])에 반박되고 Rabinovitch([36]), Rashed([37]), Yadegari ([47]) 등을 거치며 그 우선권 논쟁은 더욱 치열해지는 양상이다. 최근의 연구들은 유럽이 아닌 중동지역에서 이미 수학적 귀납법이 체계적으로 사용되었다는 것을 보고하고 있는데, 이는 아라비아의 뛰어난 수학이 제대로 된 역사적 평가도 받지 못한 채 묻혀져 왔음을 뜻한다고 할 수 있다([35]). 우리의 관심인 수학적 귀납법의 경우에도 16세기 Maurolycus가 사용한 준일반적 증명 방식이 이미 10세기를 전후해 Abū-Kāmil(850-930)에 의해 제기되었음에도 불구하고 그의 독창성은 널리 알려지지 않고 있다[23].

한편, 우리는 Abū-Kāmil이 수학적 귀납법을 사용했던 흔적을 찾아 볼 수 있다:

나는 고대의 책들 중에서 어떤 장을 찾았다. 그러나 이것을 누가 썼는지는 알 수 없었다. 수학과 관련된 모든 사람들은 그 규칙을 반복하고 그것의 내용을 모방한다. 하지만 그 사람들은 그것 이면의 이유를 모르고, 그리고 그것들에 대해 생각하지도 않는다. 그러므로 나는 수학과 기하학의 전문가들에게 그 이유와 그것의 기원에 관해 물어보았다. 그러나 어느 누구도 그것에 대해 답해주지 않았다. 그래서 나는 고대의 사람들이 이 책에서 밝혔던 것에 대해 심사숙고해 보았다. 지극히 높으신 신의 친절과 은혜로 말미암아, 나는 그 이유를 쉽게 발견할 수 있었다. 나는 그것을 여기에 기록하겠다.

…… 당신이 (1 곱하기 1부터) 10 곱하기 10까지 더하려 한다고 해보자. 1과 제일 마지막 수 10을 더하라. 그러면 11이 되고 이것을 10과 곱하면 110이 된다. 이것을 기억하라. 그리고 10의 $\frac{1}{3}$을 선택하라. 이것은 3과 $\frac{1}{3}$이다. 여기에 $\frac{1}{6}$을 더하면 그것은 3과 $\frac{1}{2}$이 된다. 그리고 이것에 110을 곱하라. 그러면 그 결과는 385가 될 것이다. 이것이 1·1부터 10·10까지 더한 값이 된다.

이것의 이유는 다음과 같다. 당신이 1 곱하기 1 그리고 2 곱하기 2 그리고 3 곱하기 3 등의 합을 찾고 1 더하기 2 더하기 3 더하기 등과 같이 처음 제시한 식의 제일 마지막 수까지 더한 합으로 나눈다면, 그 결과는 마지막 수의 $\frac{2}{3}$에 $\frac{1}{3}$을 더한 것이 된다.

1 곱하기 1을 하면 1이 된다. 1로 그것을 나누면, 1의 $\frac{2}{3}$에 $\frac{1}{3}$을 더한 1이 된다. 2 곱하기 2를 하여 얻은 4에다 처음 1을 더하면 5가 된다. 만약 그 5를 1 더하기 2의 결

23) 현대의 수학자와 수학교육자 대부분은 Maurolycus를 수학적 귀납법을 명확하게 인식한 최초의 사람으로 간주하고 있다 ([4], p.38 ; [15], p.121 ; [23], p.144 ; [30], p.272). 이에 반해, 수학사 학계에선 수학적 귀납법의 기원에 대한 새로운 탐색이 계속 이루어지고 있다. 현재, 아라비아 수학 이외에도 인도의 Bhaskara(1114-1185)가 수학적 귀납법의 역사와 관련해 주목받고 있다 ([13], p.150). 그의 순환법(cyclic method)에 대해서는 [45](pp.453-459)을 참조하기 바란다.

과인 3으로 나누게 되면 1과 $\frac{2}{3}$이 되는데 그것은 2의 $\frac{2}{3}$와 $\frac{1}{3}$을 더한 것과 같게 된다. 3 곱하기 3을 하면 9가 된다. 그 값에 5를 더하면 14가 된다. 그 14를 1과 2와 3을 더한 결과인 6으로 나누게 되면 그 결과는 2와 $\frac{1}{3}$이 되는데 그것은 3의 $\frac{2}{3}$와 $\frac{1}{3}$을 더한 결과와 같게 된다. 4 곱하기 4를 하면 16이 된다. 그 값에 14를 더하면 30이 된다. 그 30을 1과 2와 3과 4를 더한 결과인 10으로 나누게 되면 그 결과는 3이 되는데 4의 $\frac{2}{3}$와 $\frac{1}{3}$을 더한 결과와 같게 된다. 그렇게 계속 진행된다. 그러므로 만약 1 곱하기 1부터 10 곱하기 10까지를 더하고 그것을 1에서부터 10까지 더한 것으로 나누면 그 값은 10의 $\frac{2}{3}$와 $\frac{1}{3}$이 되는 것이다. 이 예에서는 그 답이 7이 된다. 이러한 규칙은 기하에서 독립적으로 정확하다([47], pp.261-262 재인용).

Abū-Kāmil 가 정당화한 명제는 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} i^2}{\sum_{i=1}^{n} i} = \frac{2n}{3} + \frac{1}{3}$ 즉, $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(2n+1)}{3}\sum_{i=1}^{n} i$ 인데, 그의 정당화 방식은 특정한 예($n=10$)를 사용했지만 그 예를 임의의 예로 바꾸게 되면 일반적 증명이 된다는 점에서 준일반적이라 할 수 있다. 이러한 뛰어난 업적은 al-Karajī (953-1029)와 al-Samaw'al(1130-1180)에게 계승되었다. al-Karajī는 al-Fakhrī 와 al-Badī 에서 $x, x^2, x^3 \ldots$ 과 $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3} \ldots$ 을 귀납적으로 정의하였고 그와 관련된 곱의 규칙을 증명하였다. 구체적으로 말해, 그는 $x^0 = 1$을 정의하진 않았지만 $x^n = x^{n-1}x$ 와 같은 귀납적 정의를 비형식적으로 사용함으로써 모든 정수 n, m에 대해 $x^n x^m = x^{n+m}$ 과 같은 일반 규칙을 보일 수 있었다.

이 때, al-Karajī는 $n=1$일 때 성립함을 보이고 그 결과를 바탕으로 하여 $n=2$인 경우를 증명하고 그러한 방식을 몇 번 더 적용함으로써 같은 과정을 무한히 계속 수행할 수 있다고 주장하는 준일반적 유형의 증명을 제시하였다([38]). 그런데 al-Karajī와 al-Samaw'al는 그러한 준일반적 수학적 귀납법을 사용함에 있어서 Abū-Kāmil 보다 더 분명하게 그 아이디어를 드러내었다[24]. 예를 들면, al-Bāhir 에서 $(ab)^n = a^n b^n$ 과 같은 명제를 증명할 때, al-Samaw'al은 Euclid <원론>에서 입증된 $(ab)^2 = a^2b^2$ 을 출발로 $[(fg)(pq)] = [(fp)(gq)]$ 와 같은 법칙을 반복적으로 적용함으로써, $(ab)^3 = a^3b^3$, $(ab)^4 = a^4b^4, \ldots$ 등을 '같은 방법'으로 증명할 수 있다는 것을 보였다. 사실, 이러한 모습은 그들이 수학적 귀납법의 원리를 단지 암묵적으로 사용하는 단계를 넘어서 'n으로부터 $n+1$로의 전환'에 기초한 그 원리를 인식하고 있었음을 보여준다고 할 수 있다([37], pp.8-10). 이뿐만 아니라, 그들은 수학적 귀납법과 관련된 또

24) al-Karajī의 책은 현재 남아있지 않으며, 다만 al-Samaw'al의 저서를 통해 그의 업적이 알려지고 있다.

하나의 원초적인 방식인 하강법 역시 자주 사용하였는데, 예를 들어, $\sum_{i=1}^{n} i^3 = (\sum_{i=1}^{n} i)^2$ 이 성립함을 보이기 위해서, 그들은 $(1+2+3+\ldots+10)^2$와 같은 특정한 예를 가지고, $(1+2+3+\ldots+10)^2=(1+2+3+\ldots+9)^2+10^3$ 을 보이고, 같은 방법을 $(1+2+\ldots+9)^2$ 에 적용하고, 또 다시, 같은 방법을 $(1+2+\ldots+8)^2$에 순차적으로 적용해감으로써, 그것이 결국에는 $1^3+2^3+3^3+\ldots+10^3$ 과 같게 됨을 입증해 보이는 준일반적인 하강법을 구사했던 것이다. 정확히 말하자면, 그들은, Abū-Kāmil 가 준일반적으로 정당화한, $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(2n+1)}{3}\sum_{i=1}^{n} i$ 와 같은 명제를 하강법으로 증명할 만큼 그들에게 있어서 그것은 숙련된 기술이었던 것이다(Ibid, pp.13-15).

6. 교수학적 논의

Freudenthal([21], pp.201-210, pp.238-242 ; [22], p.44, pp.80-84)은 역사 발생적 관점의 입장에서, 학생들이 자연스럽게 귀납적 정의와 수학적 귀납법에 이르도록 하는 전형적 예(paradigm)를 갖춘 세 가지 교수-학습 맥락을 제시하였다: (1) 소수의 무한성에 대한 Euclid 의 준일반적 증명, (2) 도형수의 다양한 성질에 대한 탐색과 증명, (3) 경로의 수를 구하는 것에서부터 Pascal 삼각형의 성질을 증명하는 것에 이르는 활동계열이 그것인데, 그는 학습가닥의 혼합이라는 측면에서 세 번째 계열을 제일 효과적인 것으로 간주하면서[25], 그 상황을 활용하여 수의 귀납적 패턴을 구성하며 지속적인 관점의 전환을 통해 언어사용 능력을 구체적, 관계적, 관습적인 변수 수준으로 점차 발달시킬 것을 제안하였다. 이 때, 그는 이러한 수준상승을 이끌기 위해, 학생들이 맹인에게 또는 전화상으로 말하는 상상력 과제를 해결하면서 좌표개념을 도입하고 Pascal 삼각형의 구성원리를 형식화하도록 하는 교수-학습상의 전술을 사용할 것을 주문하였다.

이상의 내용이 Freudenthal의 수학적 귀납법 수학화 방안의 골격이라 할 수 있다. 이것은 역사적으로 선행한 귀납적 정의 활동을 체득하게 하는 접근방향이라는 점에서 긍정적으로 평가할 만하다. 하지만 이것은 그 자신이 수행했던 역사적 분석을 온전히 반영한 교수-학습 방안이라 할 수는 없다. 즉, 그와 같은 방식이 본 연구의 초점인 수학적 귀납법 교수-학습에 대한 완전한 처방이 될 수는 없다. 요컨대, 현재의 교육에서 간과하고 있는 귀납적으로 정의하는 활동[26]을 강조한다 하더라도 반성적 사고에 의해

25) 예를 들어, Freudenthal([21])은 "삼각수 식과 같은 경우를 재귀적으로 증명할 수 있겠지만 이런 예들은 전형적 측면에서 효과적이라기 하기에는 너무나 간단하고 정적이다. 이에 비해 Pascal의 삼각형은, 특히 확률의 조합론과 관련될 때, 보다 동적이고 풍부하다(p.210)"고 주장하였다.

26) 이것은 귀납적 정의에 대한 형식적 정의를 가르치는 것이 아니라 점화관계를 발견하고 그

수학적 귀납법을 의식, 형식화, 그 적용기준을 인식하는 단계가 생략된 채로는 현재의 교육 문제를 완치할 수 없는 것이다.

그 실마리를 역사에서 찾고자 한다. 본 연구에서 다루었듯이 수학적 귀납법의 뿌리는 역사적 사료를 통해서는 그리스 시대에서부터 그 뚜렷한 흔적을 찾을 수 있지만 ([27]), 그것이 수학의 근원이라는 것을 고려한다면 수학적 기록이 남겨지기 전부터 그 아이디어가 이미 사용되었다고 보는 편이 보다 합리적일 것이다([20]). 실제로 역사적 고찰을 통해 수학적 귀납법에 의한 증명이 등장하기 오래 전부터 수학적 귀납법의 원리가 내재된 실제적 증명이 이루어져 왔고 그 증명에 대한 반성을 통해 그 원리를 인지하게 되었다는 점을 알 수 있었다. 그런데 그 실제적인 증명에는 준일반적 증명과 하강에 의한 증명 두 종류가 있고, 수학적 귀납법의 선각자들 대부분은 그 두 가지 모두를 사용하였다. 이것은 무엇을 시사하는 것일까? 여기서, 우리는 수학적 귀납법과 외양에 있어 유사한 준일반적 증명뿐만 아니라 그 반대 방향의 하강법 역시 사용되었다는 점에 주목할 필요가 있다.

상승과 하강은 표현방식에서뿐만 아니라 그것을 다룰 때 개입되는 사고방식에 있어서 차이가 있다. 전자는 어떤 특정한 n번째 명제함수가 성립하는 것을 바탕으로 $(n+1)$번째 경우가 참임을 보이는 과정으로서 아는 것으로부터 모르는 것으로 향하는 '종합'인 반면, 후자는 모르는 것으로부터 아는 것으로 나아가는 '분석'인 것이다. 형태를 기준으로 한다면, 전자가 수학적 귀납법에 가까워보인다고 할 수 있다. 하지만 역사는 후자의 사용이 빈번해지면서 수학적 귀납법을 의식화했다는 것을 명확히 보여준다. 즉, 후자가 전자보다 수학적 귀납법을 의식화하는 것에 더 근접한 것이라 할 수 있다([19]). 이러한 역사적 현상은 하강이 수학적 귀납법을 인식하는 하나의 계기가 되었음을 강력하게 암시한다. 그렇다면 하강법이 수학적 귀납법 인식의 단초가 될 수 있었던 결정적 요인은 무엇인가?

이 물음에 대한 두 가지 답변을 생각할 수 있다. 첫째, 어떤 추측을 준일반적 방식으로 정당화한 경우에는 그 정리가 참인 것 자체만을 확신하게 되는 반면, 하강을 마치게 된 순간에는 수학적 귀납법의 원리를 감지할 수 있다는 점을 들 수 있다. 전자의 경우에는 암묵적인 수학적 귀납법이라는 조용한 배를 탄 채 전진해가는 증명이기 때문에 그 동력에 해당하는 수학적 귀납법의 원리를 느끼기 힘든 반면에, 후자에 있어서는 단계하강을 통해 초기조건에 이르는 순간 그 조건으로부터 원래 조건으로 다시 뻗어나가는 추진력을 경험함으로써 자신의 사고에 대한 반성이 가능하다고 할 수 있는 것이다. 둘째, 하강법은 가장 실제적인 수학적 귀납법이기 때문에([46]) 그것이 여의치 않을 때 그 방법과 그것이 타당한 근거에 대해 반성할 여지가 많다는 것을 들 수 있다. Pascal이 산술삼각형의 등식과 관련된 명제들(명제 11까지)을 하강에 의해 입증했지만 그러한 접근이 용이하지 않은 비례문제의 경우엔 수학적 귀납법을 추상적으로 형식화하여 정당화하였던 것은 그 반성의 결과를 보여준다고 할 수 있다. 즉, 수

것을 문자식으로 정리하는 활동을 통해 이루어지는 것이다.

학적 귀납법의 원리를 지속적으로 느껴왔고 하강법이라는 증명방법과 그 정당성 자체에 대해 반성할 기회가 주어졌을 때, 일반적 증명방법으로서의 수학적 귀납법을 명확히 인식할 수 있었던 것이다.

한편, Fermat의 경우엔 오늘날의 관점에서 보았을 때 수학적 귀납법의 사용기준이라 할 수 있는 귀납단계의 상사성(exact similarity)을 그가 인식했다는 데에 주목할 필요가 있다. 물론, 이는 수학적 귀납법 자체에 대해 형식화하는 수준을 넘어서 그것의 본질적 특성에 대해 통찰했다는 것을 의미한다. 그렇다면, 그는 어떤 사실적 계기를 통해 수학적 귀납법의 적용여부를 결정짓는 그러한 특성을 추출해낼 수 있었던 것일까? 앞서 제기했듯이, 이와 관련하여 그가 다루었던 문제가 구성적 단계상승에 의해서는 해결하기 어려운 조건 명제였다는 점[27]에 그 단서가 있을 것으로 예측된다. 다시 말해, Fermat는 수 직관을 전이시키는 조작에 의해 해결할 수 없는 문제 상황에 봉착하게 되면서 자연스럽게 자신이 사용한 증명방법의 특성에 대해 반성할 수 있는 기회를 가지게 되었고 그 방법의 암묵적 측면이 바로 동일한 조건을 유지시키는 단계하강 조작이었다는 사실을 꿰뚫어볼 수 있었던 것이다.

한편, 이후 역사에서 발견되는 흥미로운 사항은, Pascal에 의해 수학적 귀납법에 의한 증명이 대부분의 유럽 수학자들에게 명확하게 알려진 이후에도, 그들은 분석적 사고가 요구되는 하강법을 여전히 사용했다는 점이다. 즉, 오늘날에는 형식화된 수학적 귀납법으로 증명되는 많은 명제들을 하강에 의해 입증해 보였던 것이다. 이것은 어떤 실제적인 추측을 정당화함에 있어서 수학적 귀납법을 단순히 적용하지 않았다는 것을 뜻한다.

이제 수학적 귀납법에 대한 수학화 과정을 완성하기 위해 첨가해야 할 단계가 자못 자명해 보인다. 그 열쇠는 바로 하강법의 도입이다. 역사적 과정과 비교할 때 교실 상황의 가장 두드러진 차이점은 귀납에 의한 추측을 포함하되 그것의 진위를 분석적으로 판별하기 위한 초기 조건으로의 하강 활동이 전혀 다루어지지 않고 있다는 점이다. 이것은 학교 수학에서 수학적 귀납법 또는 그 원리를 인식해가는 하강에 의한 분석 활동이 간과되고 있음을 단적으로 나타내는 것이라 할 수 있다. Abū-Kāmil은 준일반적 증명방식을 쉽게 생각했다고 한 반면, Fermat는 하강법을 수년간의 노력 끝에 겨우 알아냈다[28]고 한 고백을 염두에 둘 때 수학적 귀납법 교수에서 점화적 패턴인식과 수학적 귀납법의 형식적 도입 사이에 하강법을 통한 충분한 교수 활동이 매개되어야 할 것이다. 이는 명제적 지식으로서의 증명 방법을 가르치는 것이 아니라 Fermat가 했듯이 분석적으로 사고하는 방법과 하강법에 담긴 본질적인 아이디어를 가르치는 것을 의미한다.

---

27) 진술 $P(n)$이 $H(n) \Rightarrow C(n)$ 형태의 조건문일 때, 귀납단계에선 $H(n) \Rightarrow C(n)$와 $H(n+1)$을 동시에 가정한다고 볼 수 있다. 여기서 주의해야 할 것은 $H(n)$에서부터 어떤 것을 구체적으로 덧붙이는 조작에 의해선 $H(n+1)$의 임의성을 확보할 수 없다는 점이다.

28) 그는 Carcavi에게 그 어려움이 수년간 지속되었다고 고백하였다([32], p.356).

참고 문헌

1. 정영옥, Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구, 서울대학교 박사학위논문, 1997.
2. Axler, S., Gehring, F. W., Ribet, K. A., *Mathematical Expeditions*, Springer, 1999.
3. Bashmakova, I. G., *Diophantus and Diophantine Equations*, The Mathematical Association of America, 1997.
4. Bourbaki, N., *Eléments d'histoire des Mathématique*, Hermann, 1960/1969.
5. Boyer, C. B., A *History of Mathematics(2nd ed.)*, John Wiley & Sons, Inc. (Revised by Uta C. Merzbach), 1991.
6. Burton, D. M., *The History of Mathematics(2nd ed.)*, William C. Brown Publisher, 1991.
7. Bussey, W. H., *"The origin of Mathematical Induction,"* The American Mathematical Monthly 24 (5), (1917), 199-207.
8. Bussey, W. H., *"Fermat's Method of Infinite Descent,"* The American Mathematical Monthly 25(8), (1918), 333-337.
9. Cajori, F., *"The History of Zeno's Arguments on Motion*: Phases in the Development of Limits," The American Mathematical Monthly 22(2), (1915), 39-47.
10. Cajori, F., *"Origin of the Name of Mathematical Induction,"* The American Mathematical Monthly 25(5), (1918), 197-201.
11. Carmichael, R. D., *Diophantine Analysis*, John Wiley & Sons, Inc. 1915.
12. Coolidge, J. L., *The Mathematics of Great Amateurs*, Oxord University Press, 1950.
13. Dunham, W., *Euler-The Master of Us All*, The Mathematical Association of America, 1999.
14. Edwards, A. W. F., *Pascal's Arithmetical Triangle*: The Story of Mathematical Idea, John Hopkins University Press, 2002.
15. Ernest, P., *"Mathematical Induction - A Recurring Theme,"* Mathematical Gazette 66, (1982), 120-125.
16. Ernest, P., *"Mathematical induction - A Pedagogical Discussion,"* Educational Studies in Mathematics 15, (1984), 173-179.
17. Eves, H., *"Fermat's Method of Infinite Descent."* Mathematics Teacher 53(1960), 195-196.
18. Forêt, K. F., *Teaching Induction: Historical Perspective and Current Views*, The American University Doctoral Dissertation, 1998.
19. Freudenthal, H., *"Zur Geschichte der Vollständigen Induktion,"* Archives Internationales d' Histoire des Sciences 22(1953), 17-37,
20. Freudenthal, H., *Mathematics as an Educational Task*, D. Reidel Publishing Company, 1973.

21. Freudenthal,H. *Weeding and Sowing*, Dordrecht : D. Reidel Publishing Company, 1978.
22. Freudenthal, H., *Revisiting Mathematics Education* : China Lectures, Kluwer Academic Publishers, 1991.
23. Gussett, J. C., "*Let's Make Francesco Maurolico a Household Word*," School Science and Mathematics 86 (2)(1986), 144-148.
24. Hammel, A. D., *A Study of Mathematical Induction*, University of Illinois at Urbana-Champaign Doctoral Dissertation, 1972.
25. Hara, K., "*Pascal et l'induction Mathématique*," Revue d'Histoire des Science 15(1962), 287-302.
26. Heath, T. L., *The Thirteen Books of The Elements (vol I ~ III)*, Dover Publications, 1956.
27. Itard, J., *Les Livres Arithmétiques d'Euclide*, Hermann, 1961.
28. Katz,V. J., *A History of Mathematics*, HarperCollins College Publishers, 1993.
29. Kilpatrick, J., "*Reflection and recursion*," Educational Studies in Mathematics 16(1985), 1-26.
30. Kline, M., *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972.
31. Lakatos, I., *Proofs and Refutations* : The Logic of Mathematical Discovery, Cambridge University Press, 1976.
32. Mahoney, M. S., *The Mathematical Career of Pierre de Fermat*, Princeton University Press, 1994.
33. Meschkowski, H., *Ways of Thought of Great Mathematicians*, Holden-Day, Inc, 1964.
34. Montague, H, F., "*The Method of Infinite Descent and the Method of Mathematical Induction*," Philosophy of Science 11(3)(1944), 178-185.
35. O'Connor, J. J., Roberston, E. F., "*Arabic mathematics* : forgotten brilliance?" http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Arabic_mathematics.html, 1999.
36. Rabinovitch, N. L., "*Rabi Levi ben Gershon and the Origin of Mathematical Induction*," Archive for History of Exact Sciences 6(1970), 237-248.
37. Rashed, R., "*L'induction Mathématique* : al-Karajī, as-Samaw'al," Archive for History of Exact Sciences 9(1972), 1-21.
38. Rashed, R., *The Development of Arabic Mathematics* : Betweeen Arithmetic and Algebra,(Trans. A. F. W. Armstrong), Kluwer Academic Publishers, 1984/1994.
39. Smith, D. E. Ed., *A Source Books in the Mathematics*, McGraw-Hill Book Company, Inc, 1929.
40. Struik, D. J. Ed., *A Source Books in Mathematics*, 1200-1800, Harvard University Press, 1969.

41. Thomas, I., *Selections Illustrating the History of Greek mathematics*, William Heinemann, Ltd, 1967.
42. Toeplitz, O., *The Calculus - A Genetic Approach*, The University of Chicago Press, 1963.
43. Vacca, G., *"Maurolycus, the First Discoverer of the Principle of Mathematical Induction,"* Bulletin of American Mathematical Society 16(1909), 70-73.
44. van der Waerden, B. L., *Science Awakening - Egyptian*, Babylonian and Greek Mathematics, John Wiley and Sons, 1963.
45. Wilson, A. M., *The Infinite in the Finite*, The Oxford University Press, 1995.
46. Woodall, D. R., *"Inductio ad Absurdum?"*, The Mathematical Gazette 59(1975), 64-70.
47. Yadegari, M., *"The Use of Mathematical Induction by Abū Kāmil Shujā'ibn Aslam,"* ISIS 69 (2)(1978), 259-62.
48. Young, J. W. A., *"On Mathematical Induction,"* The American Mathematical Monthly 15(1908), 145-153.

The Role of Regression in the History of Mathematical Induction and Its Didactical Implications

College of Education, Seoul National University **Sun-yong, Park**
Dep. of Math. Education, Chinju National University of Education **Hye-won Chang**

This study begins from posing a problem, 'formal introduction of mathematical induction in school mathematics'. Most students may learn the mathematical induction at the level of instrumental understanding without meaningful understanding about its meaning and structure. To improve this didactical situation, we research on the historical progress of mathematical induction from implicit use in greek mathematics to formalization by Pascal and Fermat. And we identify various types of thinking included in the developmental process: recursion, regression, analytic thinking, synthetic thinking. In special, we focused on the role of regression in mathematical induction, and then from that role we induce the implications for teaching mathematical induction in school mathematics.

Key words: mathematical induction, infinite recursion, regression, analysis, synthesis

2000 Mathematical Subject Classification: 01A20, 01A30, 01A45, 97-03

논문 접수: 2007년 8월 29일 심사 완료: 2007년 10월 5일