

미세입자분산 액적의 고체면에서 모세퍼짐 현상에 관한 직접수치해석 기법개발

황 옥 렬,^{*1} 정 현 준,² 김 시 조,³ 김 종 업⁴

DEVELOPMENT OF A NUMERICAL TECHNIQUE FOR CAPILLARY SPREADING OF A DROPLET CONTAINING PARTICLES ON THE SOLID SUBSTRATE

Wook Ryol Hwang,^{*1} Hyun Jun Jeong,² See Jo Kim³ and Chongyoun Kim⁴

We present a direct numerical simulation technique and some preliminary results of the capillary spreading of a droplet containing particles on the solid substrate. We used the level-set method with the continuous surface stress for description of droplet spreading with interfacial tension and employed the discontinuous Galerkin method for the stabilization of the interface advection equation. The distributed Lagrangian-multipliers method has been combined for the implicit treatment of rigid particles. We investigated the droplet spreading by the capillary force and discussed effects of the presence of particles on the spreading behavior. It has been observed that a particulate drop spreads less than the pure liquid drop. The amount of spread of a particulate drop has been found smaller than that of the liquid with effectively the same viscosity as the particulate drop.

Key Words : Level-set method (LSM), Continuous surface stress (CSS) model, Discontinuous Galerkin method (DG), Distributed Lagrangian Multiplier method (DLM), Capillary spreading of droplet

1. 서 론

본 연구는 미세입자를 포함한 액적의 고체면에서 퍼짐현상에 대해 2차원 직접수치해석기법을 개발하고, 기본적인 모세관 퍼짐(capillary spreading)문제[1]에 적용하여 해석한 연구이다. 고체면에서 액적의 퍼짐은 평판디스플레이, PCB, 반도체 패키징, DNA 칩 제조 등의 IT, BT산업에 적용되는 잉크젯 프린팅 공정기술을 확립하는데 핵심적으로 이해해야 하는 현상이다. 특히, 기존의 복잡한 리소그래피(lithography)공정을 대체하는 목적으로 각광받는 잉크젯 기술을 이용한 미세패턴형성(micro patterning)공정에서는 미세입자를 포함한 액적을 사용

하게 되어 입자가 분산된 액적의 퍼짐현상이 중요한 문제가 된다. 입자가 포함된 유체인 현탁액(particle suspension)은 잘 알려진 바와 같이 입자분율(ϕ)이 증가함에 따라 점도가 증가할 뿐 아니라, 입자와 유체 또는 입자와 입자사이의 상호작용(hydrodynamic interaction)에 의해 매우 복잡한 유변학적 물성을 보인다. 이로 인해 입자 이동과 액적의 퍼짐에 영향을 미치게 된다[2-4].

본 연구에서는 입자를 포함한 2차원 액적이 고체면에서 모세관힘(capillary force)에 의해 퍼지는 현상을 수치적으로 해석하고, 특히 입자와 유체의 수력학적 상호작용을 해석함에 있어 직접수치해석 기법을 이용하였다. 이와 같은 문제는 다음과 같은 이유로 매우 복잡한 수치해석적 기법의 적용이 요구된다. 첫째, 표면장력이 고려된 액적의 경계를 추적하는 기법이 사용되어야 하며, 둘째, 액적과 고체면, 그리고 주위의 공기가 만나는 특이점에서 접촉각을 적절히 처리하여야 하며, 셋째, 액적에 포함된 입자와 유체의 상호작용을 고려해야 한다. 본 연구에서는 이를 위해 첫째, 등고선법(level-set method: LSM)[5]을 적용하였고, 표면장력을 처리하기 위해 표면응력텐

접수일: 2007년 8월 8일, 심사완료일: 2007년 11월 29일.

1 경상대학교 기계항공공학부

2 경상대학교 기계항공공학부 대학원

3 안동대학교 기계공학부

4 고려대학교 화공생명공학과

* Corresponding author, E-mail : wrhwang@gsnu.ac.kr

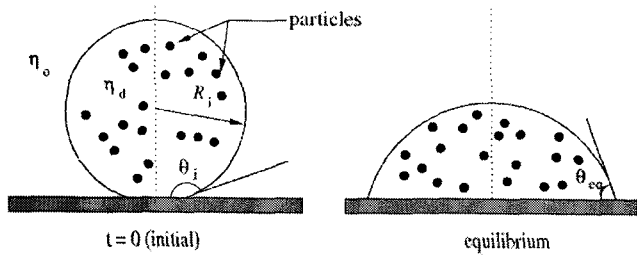


Fig. 1 A schematic representation of the droplet spreading with particles (R : the radius of droplet, η_d : the viscosity of drop, η_o : the viscosity of surrounding medium, θ_i : the initial contact angle, θ_{eq} : the equilibrium contact angle).

서를 도입한 CSS (continuous surface stress) 기법[6-8]을 적용하였다. 둘째, 가상의 응력벡터를 특이점에 가하여 정적평형각 (static equilibrium contact angle)을 이루도록 하는 기법을 사용하였으며, 마지막으로 유사영역법(fictitious domain method)에 기반을 둔 DLM(distributed Lagrangian multiplier)법[9]을 이용하여 입자와 유체의 상호작용을 처리하였다. 이러한 기법으로 개발된 직접수치해석법을 이용하여, 미세입자의 존재로 인한 액적의 퍼짐정도를 입자가 없는 순수뉴턴유체와 비교하여 연구하였고, 입자분율의 영향을 고찰하였다.

2. 모델링

본 연구는 마이크로 크기의 입자를 포함한 뉴턴유체 액적이 고체면 위에서 모세관힘만으로 퍼지는 현상을 연구하고 직접수치모사를 통해 비교하였다. Khatavkar[1]는 미세액적이 모세관 힘으로 퍼지는 경우 액적의 초기 지름의 크기와 낮은 퍼짐속도로 인하여 Weber 수(We), Reynolds 수(Re) 그리고 Bond 수(Bo)의 값이 1×10^{-4} , 0.1 과 1×10^{-3} 이 될 수 있음을 보였다. 따라서 이 경우 액적유체의 관성력과 중력은 무시할 만큼 작아 유체영역을 스톱스(Stokes) 유동으로 모델링할 수 있다. 이때 액적유체와 주변 유체의 차이는 등고선법의 관점에서는 점도의 차이만 있고, 액적유체가 물이고 주변유체가 공기인 경우 점도비(η_d/η_o)는 약 100이 된다. 입자는 원형의 강체이며 액적의 내부에 분산되어 있다.

본 연구에서 다루는 2차원 입자포함 액적의 퍼짐현상은 Fig. 1과 같이 개략적으로 묘사할 수 있다.

3. 지배방정식

본 연구에서는 고정된 오일러리안(Eulerian) 좌표계에서 액적과 주변유체를 포함하여 계산영역을 정의하였다. 스톱스 유동에서는 액적유체와 주변유체는 점도만으로 구별하며 다음

과 같이 전체 계산영역에 대해 단일 지배 방정식을 적용할 수 있다.

$$\nabla \cdot \sigma = 0, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot u = 0, \tag{2}$$

$$\sigma = -pI + 2\eta^*D. \tag{3}$$

식 (1)-(3)은 각각 운동량보존식, 연속방정식, 구성방정식을 나타낸다. η^* 는 계산영역에서의 점도이며 액적영역과 주변유체영역에서는 각각 η_d 와 η_o 로 다른 점도를 가진다.

하첨자 d와 o는 각각 액적과 주변 유체로 구분한다. u, σ, p, I, D 는 속도, 응력텐서, 압력, 단위텐서, 변형률텐서를 각각 나타낸다.

액적과 공기의 경계면에서 곡률에 의해 액적의 응력과 공기의 응력에 차이를 보이게 되는데 이것이 표면장력이며 일반적으로 표면장력계수가 상수인 경우 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$n \cdot (\sigma_o - \sigma_d) = \zeta \kappa n. \tag{4}$$

ζ, κ, n 는 각각 액적 경계면에서의 표면장력계수, 평균 곡률(mean curvature) 그리고 수직벡터이다.

4. 등고선법과 CSS 모델

4.1 등고선법

다상 유체 시스템에서 경계면을 정의하고 분석하는 수치적인 방법으로는 경계면 추적법(interfacial tracking), VOF(volume of fluid)법, 확산경계(diffuse-interface)법, 등고선법 등이 있다. 본 연구는 액적과 공기의 경계면 획득(interface capturing)을 위해서 등고선법을 사용하였다. 등고선법은 오일러리안 고정 격자를 사용하여 재격자화(remeshing)가 필요 없기 때문에 수치적으로 비교적 간단하고 쉽게 3차원 문제로 확대적용할 수 있다. 등고선법의 진화 방정식은 초기조건과 함께 주어진 속도장 u 에 대해 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \cdot \nabla \Phi = 0, \quad \Phi \Big|_{t=0} = \Phi_0. \tag{5}$$

등고선 함수(level-set function) Φ 는 0으로 주어지는 영역이 경계면이 되고, 0보다 작으면 액적의 내부, 0보다 크면 액적의 외부를 나타낸다. 이때 Φ 의 기울기는 다음과 같은 거리 함수(distance function)의 성질을 만족해야 한다.

$$|\nabla\Phi|=1. \tag{6}$$

등고선 함수가 시간에 따라 식 (5)과 같이 속도장에 의해 변화할 때, 더 이상 거리함수의 특성을 만족하지 않는다. 이 경우 거리함수를 재초기화(re-initialization)할 필요가 있다. 연구에서는 거리재기(re-distancing)를 통해 등고선함수 Φ 의 거리함수 특성을 복구한다. Φ 의 재초기화에 대한 자세한 내용은 Kim과 Hwang[8]을 참고한다.

4.2 CSS모델

두 개의 상(phase)으로 분리된 이상유동에서 전체 영역에 걸쳐 통합된 지배방정식을 표현하기 위해서는 표면장력의 적절한 처리방법이 필요하다. Brackbill 등[6]은 경계면에서 표면장력의 효과를 표현하기 위하여, 표면응력텐서 τ_s 를 도입하여 나타내었는데 이를 CSS모델이라고 한다.

$$\tau_s = \zeta(I - nm)\delta(\Phi). \tag{7}$$

식 (7)의 δ 는 델타(delta)함수이다. 델타함수는 등고선함수를 이용하여 CSS모델에 대한 표면응력텐서의 변화를 매끄럽게 나타내기 위해 도입한 함수이다.

$$\delta(\Phi) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} + \frac{1}{2\epsilon} \cos\left(\frac{\pi\Phi}{\epsilon}\right), & -\epsilon \leq \Phi \leq \epsilon, \\ 0, & \text{그외} \end{cases} \tag{8}$$

액적의 경계면과 외부 공기의 정의는 Φ 값에 따라 결정되며 델타함수는 Φ 값의 변화를 연속적이며 완만하게 이어지게 한다. ϵ 은 요소크기 h 의 1.5배로 취하였다.

CSS모델에서 액적과 공기의 경계면 응력은 구성방정식에서 추가적인 응력이 표현되고 이는 표면응력텐서 τ_s 로 정의된다[6,7]. 식 (3)의 구성방정식은 표면장력 효과를 도입할 경우 다음 식과 같이 표면응력텐서를 포함하게 된다.

$$\sigma = -pI + 2\eta^*D + \tau_s. \tag{9}$$

4.3 단단한 반지기법(Rigid-ring description)

액적내 입자를 정의하기 위해서 단단한 반지기법[9-12]을 사용하였다. 액적 내 자유로이 떠있는 입자는 주위의 유체에 의한 항력(drag force)과 토크(torque)가 0이 된다.

$$\int_{\partial P_i} \sigma \cdot n ds = 0, \int_{\partial P_i} (x - X_i) \times (\sigma \cdot n) ds = 0. \tag{10}$$

식 (10)에서 X_i 는 입자의 중심위치를, ∂P_i 는 입자의 경계를 나타낸다.

이를 만족하기 위해 입자의 표면에만 강체운동조건을 적용하면 스톡스 유체에서 입자의 내부 또한 강체운동을 하게 된다. 이를 단단한 반지조건(rigid-ring condition)이라고 한다.

$$u = U_i + \omega_i \times (x - X_i), \text{ in } \partial P_i. \tag{11}$$

여기서 U_i, ω_i 는 각각 입자의 속도와 입자의 각속도이다. 식 (11)과 같은 제한조건(constraint)을 유한요소 수식화에 라그랑주 승수법(Lagrangian multiplier)기법을 적용하여 도입하면, 실제 강체운동을 정확하게 기술할 수 있다.

5. 수치해석기법

5.1 DG법을 적용한 약형(Weak form)

식 (1), (2), (9), (11)을 일반적인 Galerkin법을 이용하여 유한요소 수식화하고, 식 (5)에 대하여 불연속 Galerkin법(discontinuous Galerkin method)으로 수식화하면 다음과 같이 약형(weak form)을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} p \nabla \cdot v dA + \int_{\Omega} 2\eta^* D[u] : D[v] dA \\ & + \sum_i^N \int_{\partial P_i} \lambda^i \cdot \{u - \{U_i + \omega_i \times (x - X_i)\}\} ds \\ & = - \int_{\Omega} \tau_s : D[v] dA, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot u dA = 0, \tag{13}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \psi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \cdot \nabla \Phi \right) dA \\ & - \sum_e \int_{\Gamma_e^{in}} \psi (\Phi - \Phi^{ext}) (u \cdot n_e) ds = 0, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\partial P_i} \mu^i \cdot \{u - \{U_i + \omega_i \times (x - X_i)\}\} ds = 0, \\ & (i = 1, \dots, N). \end{aligned} \tag{15}$$

식 (14)에서 n_e 는 요소 e 의 경계에서 바깥방향 단위벡터이고 Γ_e^{in} 는 $u \cdot n_e < 0$ 을 만족하는 요소 e 의 경계부분이며, Φ^{ext} 는 이웃한 요소에서의 Φ 값이다. 식 (12), (15)에서 N 은 입자의 개수이다.

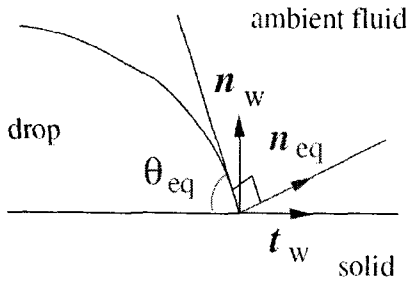


Fig. 2 The normal and tangential vectors at the contact point.

5.2 접촉각 처리법

액적의 퍼짐과정에서 고체면과의 접촉각 처리를 위해 Bellet[13]가 적용한 기법을 이용하였다. Fig. 2는 평형접촉각에서의 수직벡터를 정의하고 있다. 액적과 고체면과의 접촉지점에서 CSS모델에 사용되는 표면응력텐서 τ_s 는 식 (16)과 같이 수직벡터를 평형상태의 수직벡터로 대체한다.

$$\begin{aligned} \tau_s &= \zeta(I - n_{eq}n_{eq})\delta(\Phi), \\ n_{eq} &= \cos\theta_{eq}n_w + \sin\theta_{eq}t_w. \end{aligned} \quad (16)$$

Fig. 2와 식 (16)에서 n_w 는 고체면의 수직벡터이고 t_w 는 고체면에서의 접선 벡터이다. 이렇게 정의된 표면응력텐서는 액적이 평형접촉점을 이루는 방향으로 퍼지도록 가상의 힘을 생성한다[13].

5.3 이산화와 수치기법

약형의 이산화를 위해 속도 u 를 연속적인 2차 보간(Q_2)으로, 압력 p 를 불연속적 선형보간(P_1^d)으로, 그리고 등고선함수 Φ 를 불연속적인 2차 보간(Q_2^d)으로 각각 보간하고, 전체 계산영역은 고정된 규칙적 사각형 요소를 사용하였다. 3차 정확성과 안정적인 시간적분을 위해서 TVD-RK3(total variation diminishing/3rd-order Runge-Kutta)법을 사용하였다. 자세한 계산 방법은 Kim과 Hwang[8]과 Hwang 등[9]을 참고한다.

6. 결 과

직접수치모사법을 통해서 입자를 포함하는 미세 액적의 퍼짐 현상을 연구하였다. 계산영역에 대한 조건으로 크기는 가로, 세로축으로 각각 1과 0.5로 정하였고 격자분할은 100×50 으로 총 5000개의 요소로 나누었다. 액적의 초기조건은 중심점이 (0.5, 0.19)이고 반경이 0.2로 고체면과 접해있는 상태로 정의하였다. 액적의 평형 접촉각은 60° 이며 액적과 주변 유체의 점도비(η_d/η_o)는 100이다. 입자수는 0개($\phi = 0$)와 50개($\phi = 0.245$)이며, 입자반경은 0.014이다. 초기

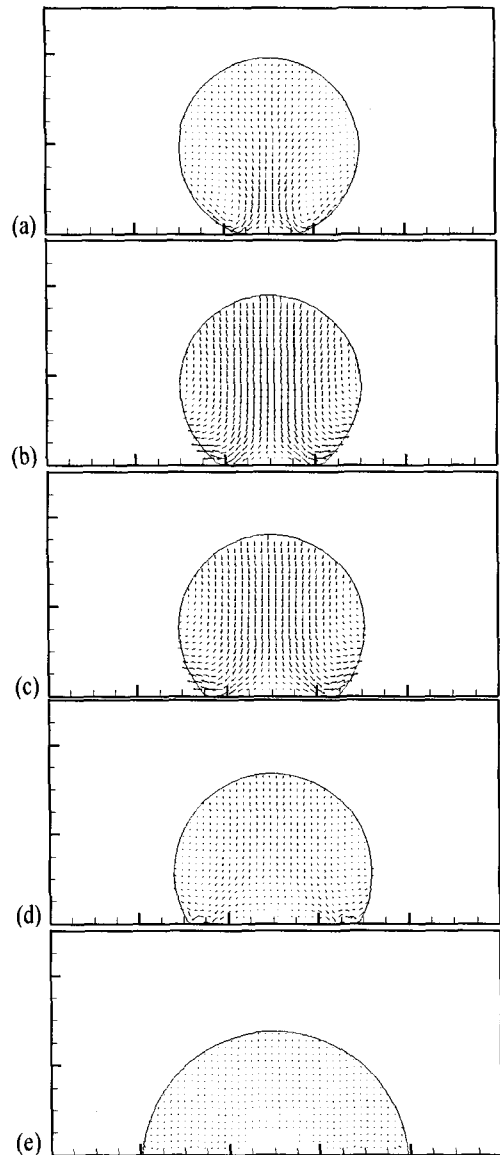


Fig. 3 The velocity distribution of a droplet spreading without particles (the equilibrium angle 60° , viscous ratio $\eta_d/\eta_o = 100$): (a) 0s(initial); (b) 3s; (c) 6s; (d) 12s; (e) 36s.

입자의 위치는 임의적으로 분산시켰다. 수치해석에 적용되는 시간간격은 0.002초 단위로 30,000번(60초)까지 계산하였다.

Fig. 3에서 입자가 없는 순수한 액적의 퍼짐과 속도장을 나타내었다. 모세관힘으로 퍼지는 액적은 36초를 지나면서 정상상태에 도달하였다. 액적은 주어진 평형접촉각보다 약간 큰 접촉각을 이루었고 이때 액적내부의 속도장을 형성한다. 초기 액적퍼짐(a-c)의 속도장은 증가하였고 이후 평형접촉각으로 접근(c-d)할수록 줄어들었다. 평형상태(e)로 갈수록 액적내부의 속도도 0이 되는 것을 확인하였다. 여기서, 접촉각이 주어진 평형접촉각이 되도록 하기위해서 다양한 방법을 적용할 수 있으며, 일례로 식 (16)의 τ_s 에 상수배(약 1.5)하여 적용하면

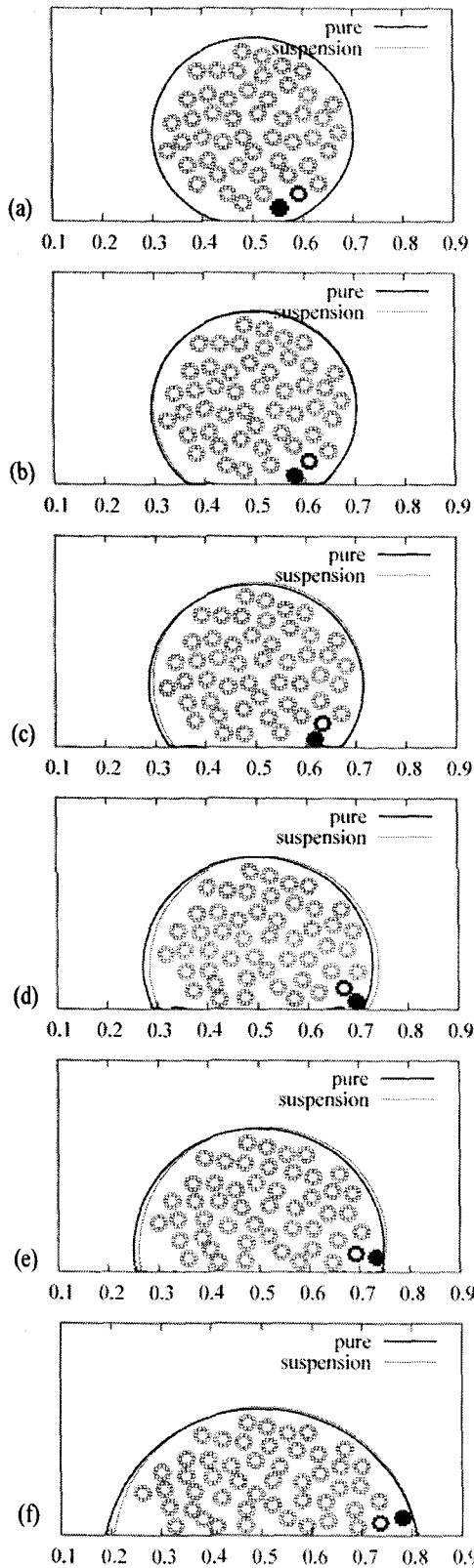


Fig. 4 Comparison of drop spreading for a pure fluid and a particle suspension ($\phi = 0.245$): (a) 0.3s; (b) 3s; (c) 6s; (d) 12s; (e) 18s; (f) 36s.

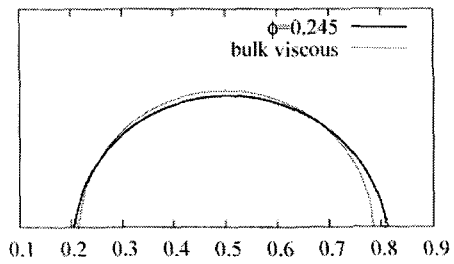


Fig. 5 Comparison of drop shape at $t=36s$ for a particle suspension ($\phi = 0.245$) and a fluid drop with effective bulk viscosity of $\phi = 0.245$.

접촉각을 맞출 수 있다. 그러나 본 연구는 입자의 존재여부와 액적의 퍼짐과의 비교이므로 이에 대해서는 자세한 논의를 하지 않는다.

Fig. 4에서는 순수한 유체액적과 미세입자를 포함하는 액적의 모양을 비교하였다. 순수한 액적보다 $\phi = 0.245$ 인 현탁 유체의 액적 모양이 작게 퍼졌다. 이는 유체가 입자를 포함하면서 점성이 증가되어 일어난 현상으로 파악할 수 있으며, Nicholas[4]의 실험 결과와 정성적으로 일치한다. Fig. 4에서는 또한 입자를 포함하는 액적의 퍼짐현상에서 입자의 움직임을 추적할 수 있도록 입자 경계를 진하게 표시하였다. 두 입자의 위치변화를 추적해보면 초기의 흑색 입자가 12초 이후에는 다른 입자 보다 빨리 퍼지는 현상을 확인하였다.

액적의 전체면적($A = A_d + A_p$) 비해 입자가 차지하고 있는 면적(A_p)의 비율을 입자분율(ϕ)이라 한다: $\phi = A_p / (A_d + A_p)$. 입자가 첨가된 유체의 점성은 증가하며 이는 입자분율이 낮아 입자와 입자의 상호작용이 무시되는 묽은 현탁액(-5% 미만)일 경우 $(1+2\phi)$ 의 증가율로 나타내어진다[9,14]. 24%이상의 입자분율에서는 최소한 $(1+2\phi)$ 이상의 점도 증가(148%)를 갖게 된다. 2차원의 경우 Hwang 등[9]에서 입자분율에 따른 점성증가를 수치적으로 연구하였다. 입자분율에 의해 148%만큼 증가한 유효점성과 기존의 액적의 퍼짐에 대해 Fig. 5를 통해 비교하였다.

Fig. 5에서는 입자를 포함하는 현탁유체의 액적과 입자분율에 따른 유효점성을 가지는 액적의 고체면과의 접촉점을 비교하였으며 36초에서의 결과를 제시하였다. 36초 이후에도 서서히 퍼짐을 확인하였지만 순수액적의 정상상태 시간을 기준으로 삼았으며, 36초 이후의 변화를 고려하여도 결과의 차이는 보이지 않았다. 유효점성을 가진 액적이 입자를 포함하는 액적의 경우보다 작게 퍼짐을 관찰할 수 있었으며, 이는 유효점성을 가지는 액적은 액적 내부에 균일하게 높은 점성을 가지기 때문에 경계면 부근의 점성 또한 입자가 불균일하게 포함된 액적의 점성보다 높아 퍼짐정도가 작은 것으로 이해할 수 있다.

7. 결 론

본 연구에서는 미세입자가 분산된 뉴턴유체 액적이 고체면에서 퍼지는 현상을 입자와 유체의 수력학적 상호작용, 액적과 공기의 표면장력 및 평형접촉각을 고려한 2차원 직접수치해석법으로 개발하였으며 이를 이용하여 미세입자가 액적의 퍼짐에 미치는 영향을 간단한 예를 통하여 해석하였다. 일반적인 속도-압력 변수의 유한요소법을 기초로 등고선법을 이용한 경계추적과 불연속 Galerkin법을 이용하여 경계면의 진화방정식을 풀어 DLM법을 이용하는 고체입자와 유체간의 수력학적 상호작용 처리기법을 결합하였다. 계산의 정확성을 높이고 안정적인 시간적분을 위해 TVD-RK3법을 이용하였다

순수한 액적과 입자를 포함하는 액적의 비교를 통해 순수한 유체에 입자가 더해지면 퍼짐양이 줄어들고 퍼짐에 있어 오랜 시간이 걸리는 것으로 해석되었다. 이때 입자의 존재가 유체의 점성을 증가시키고 이를 확인하기 위해 유효점성을 구하고 입자를 포함하는 액적과 유효점성을 가진 액적과의 차이를 비교해 보았다. 유효점성에 의한 증가된 점성을 가진 액적이 입자를 포함하는 액적보다 작게 퍼진 것을 직접수치해석을 통해 관찰하였다. 이는 유효점성을 가지는 액적은 액적내부의 전 영역에 걸쳐서 증가된 점성을 가지고 있으며 입자를 가지는 액적은 국부적인 접촉점에서 점성의 증가를 보이지 않는 것으로 해석되기 때문이다.

향후 계획으로 비선형 점탄성 유체에서 입자를 포함하는 액적의 퍼짐을 비교하고 높은 Reynolds 수에서의 퍼짐 현상에 대해서도 비교할 예정이다. 본 연구에 사용된 기법은 Hwang 등[10]의 연구에서와 같이 3차원으로 확장된 점탄성 유체에 쉽게 적용될 수 있다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 특정기초연구사업(과제번호: R01-2006-001-10267-0)의 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

[1] 2005, Khatavkar, V., "Capillary and low inertia spreading of a microdroplet on a solid surface," *PhD Thesis*, Eindhoven University of Technology; see also 2007, Khatavkar, V., Anderson, P.D. and Meijer, H.E.H., "Capillary spreading of a droplet in the partially wetting regime using a diffuse-interface model," *J. Fluid Mech.*, Vol.572,

pp.367-387.
 [2] 1988, Larson, R.G., *Constitutive Equations for Polymer Melts and Solutions*, Butterworths, London.
 [3] 2004, Furbank, R.J. and Morris, J.F., "An experimental study of particle effects on drop formation," *Phys. Fluids*, Vol.16, pp.1777-1790.
 [4] 2005, Nicolas, M., "Spreading of a drop of neutrally buoyant suspension," *J. Fluid Mech.*, Vol.545, p.271.
 [5] 1996, Chang, Y.C., Hou, T.Y., Merriman, B. and Osher, S., "A level-set formulation of Eulerian interface capturing methods for incompressible fluid flows," *J. Comput. Phys.*, Vol.124, pp.449-464.
 [6] 1992, Brackbill, J.U., Kothe, D.B. and Zemach, C., "A continuum method for modeling surface tension," *J. Comput. Phys.*, Vol.100, pp.335-354.
 [7] 1994, Lafaurie, B., Nardone, C., Scardovelli, R., Zaleski, S. and Zanetti, G., "Modeling merging and fragmentation of multiphase flow with SURFER," *J. Comput. Phys.*, Vol.113, pp.134-147.
 [8] 2006, Kim, S.J., and Hwang, W.R., "Direct numerical simulations of droplet emulsions in sliding bi-periodic frames using the level-set method," *J. Comput. Phys.*, Vol.225, pp.615-634.
 [9] 2004, Hwang, W.R., Hulsen, M.A. and Meijer, H.E.H., "Direct simulations of particle suspensions in a sliding bi-periodic frame," *J. Comput. Phys.*, Vol.194, pp.742-772.
 [10] 2004, Hwang, W.R., Hulsen, M.A. and Meijer, H.E.H., "Direct simulations of particle suspensions in a viscoelastic fluid in sliding bi-periodic frames," *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol.121, pp.15-33.
 [11] 2005, Hwang, W.R., Anderson, P.D. and Hulsen, M.A., "Chaotic advection in a cavity flow with rigid particles," *Phys. Fluids*, Vol.17, p.043602.
 [12] 2006, Hwang, W.R. and Hulsen, M.A., "Direct numerical simulations of hard particle suspensions in planar elongational flow," *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol.136, pp.167-178.
 [13] 2001, Bellet, M., "Implementation of surface tension with wall adhesion effects in a three-dimensional finite element model for fluid flow," *Commun. Numer. Meth. Eng.*, Vol.17, pp.563-579.
 [14] 1984, Brady, J.F., "The einstein viscosity correction in n dimensions," *Int. J. Multiphase Flow*, Vol.10, pp.113-114.