韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 21집 제 4호, 2006. 9. 663-676

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 21, No. 4, Nov. 2007. 663-676

사면체에서 지렛대의 원리를 이용한 선분들 및 평면들의 교차에 관한 성질 연구

이 광 록 · 손 진 오 · 송 아 롬 · 백 수 현 · 정 기 영 (경남과학고등학교)
한 인 기 (경상대학교)

지렛대의 원리 및 무게중심의 개념은 아르키메데스 이래로 많은 수학자들, 물리학자들에 의해 연구, 발전되어 왔으며, 지금도 물리학, 화학, 건축학 등의 분야에서 폭넓게 활용되고 있다. 본 연구에서는 지렛대의 원리를 이용하여 사면체에서 선분들, 평면들의 교차에 관련된 몇몇 성질들을 탐구하여, 지렛대의 원리를 이용한 사면체의 성질 탐구의 예들과 방법을 제시하였다.

1. 서 론

아르키메데스는 수학사에서 가장 뛰어난 수학자들 중의 한 사람이라 할 수 있다. 아르키메데스는 실진법을 이용하여 포물선, 회전체 등의 절단영역의 넓이, 부피를 구했고, 나선에 대한 접선을 구하는 등 그리스 시대에 이미 미적분학의 바탕이 되는 방법들을 사용하여 수학적 탐구를 수행하였다. 특히 아르키메데스의 수학연구에서 흥미로운 점은 지렛대의 원리 및 무게중심의 개념을 이용하여 원뿔과 원기둥의 부피를 이용하여 구의 부피를 구하였다는 점이다.

지렛대의 원리 및 무게중심의 개념은 아르키메데스 이래로 많은 수학자들, 물리학자들에 의해 연구, 발전되어 왔으며, 지금도 물리학, 화학, 건축학 등의 분야에서 폭넓게 활용되고 있다. 우리나라의 중등학교 수학교과서에서는 삼각형의 성질과 관련하여 이들 주제가 다루어지며, 실생활의 다양한 문제상황을 수학적으로 탐구할 수 있도록 하는 유용한 도구가 된다.

최근 들어 아르키메데스의 생애와 업적에 대한 책들이 번역되어 소개되었고(Stein, 1999; Saito, 2006), 지렛대의 원리 및 무게중심을 이용한 수학적 탐구에 관련된 연구들(김선희 · 김기연, 2005; 홍갑주, 2005; 박달원, 2006; 한인기, 2003; 한인기 · 홍동화, 2006, Klamkin & Kung, 1996)이 수행되었다. 이들 연구를 통해, 지렛대의 원리 및 무게중심의 개념을 수학탐구에 체계적으로 활용할 수 있는 가능성과 몇몇 접근 방법들이 소개되었다. 그러나 지렛대의 원리를 이용한 공간도형의 탐구, 특히 사면체의 성질 탐구에 관련된 연구 결과는 아직 제시되지 않았다.

---

* ZDM 분류 : D53
* MSC2000 분류 : 97D50
* 주제어 : 사면체, 지렛대 원리, 무게중심, 선분, 평면, 교차

본 연구에서는 지렛대의 원리를 이용하여 사면체에서 선분들, 평면들의 교차에 관련된 몇몇 성질들을 탐구하여, 지렛대의 원리를 이용한 사면체의 성질 탐구의 예들과 방법을 제시할 것이다. 이를 통해, 사면체에 관련된 문제들의 해결방법을 다양하게 할 것이며, 지렛대의 원리를 이용한 수학적 탐구의 폭을 확장시킬 기초자료를 제공할 것이다.

2. 사면체에서 선분들의 교차

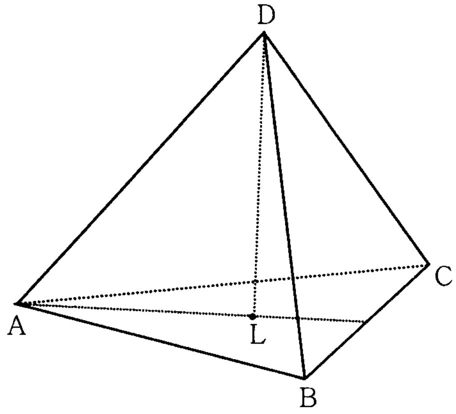
기하학에서 몇몇 선분들이 한 점에서 교차하는 것은 도형의 중요한 성질들로 귀착되는 경우가 많다. 예를 들어, 삼각형에서 세 중선, 세 수선, 세 각의 이등분선이 각각 한 점에서 교차한다는 정리는 세 선분의 교차에 관련되며, 이들의 증명은 수학교과서 또는 참고도서에 소개되어 있다. 그러나 공간에서 선분들의 교차에 관련된 정리들의 증명은 수학교과서 또는 참고도서에 드물게 제시되어 있다. 그 이유를 생각해 보면, 우리나라의 중등학교에서 공간도형을 체계적으로 충분하게 다루고 있지 않다는 것을 일차적으로 꼽을 수 있겠지만, 공간에서 선분들의 교차를 증명하는 것이 간단하지 않다는 것도 한 이유가 될 것이다. 본 연구에서는 사면체의 몇몇 선분들이 한 점에서 교차함을 지렛대의 원리를 이용하여 증명하는 방법을 살펴보고, 관련된 구체적인 문제들을 증명할 것이다.

성질 1. 사면체의 네 중선은 한 점에서 교차하고, 그 교점은 각 중선을 3:1로 나눈다.

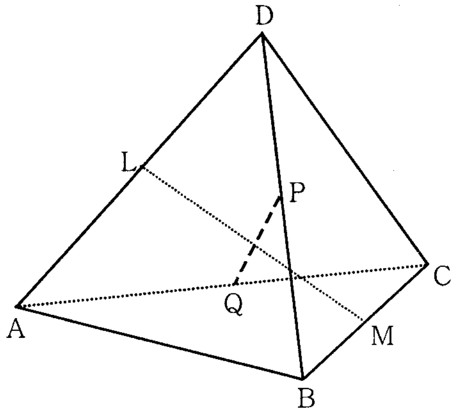
사면체의 중선은 사면체의 한 꼭지점과 마주보는 면의 무게중심을 연결한 선분으로, 한인기 · 에르든예프(2005)는 닮음을 이용한 논증의 방법으로 성질 1을 증명하였다. 본 연구에서는 지렛대의 원리를 이용한 증명 방법을 살펴보자.

지렛대의 원리를 이용한 증명 방법. 사면체 DABC의 각 꼭지점에 무게 1을 놓으면 네 질량점 (A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)를 얻게 된다. 이제, 점 D로부터 면 ABC의 무게중심에 중선 DL를 긋자 (<그림 1>). 점 L은 삼각형 ABC의 무게중심이므로, 네 질량점 (A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)의 무게중심은 세 질량점 (A, 1), (B, 1), (C, 1)의 무게중심 (L, 3)와 (D, 1)을 연결한 선분 DL에 놓이게 된다. 결국 사면체 DABC의 네 꼭지점에 놓인 질량점들의 무게중심 G는 중선 DL에 속한다. 같은 방법으로 무게중심 G가 B, C, D로부터 마주보는 면에 그은 중선들에 속한다는 것을 알 수 있으며, 이로부터 사면체의 네 중선은 한 점에서 교차한다는 것이 증명된다.

한편, 사면체 DABC의 네 꼭지점에 놓인 질량점들의 무게중심 G는 두 질량점 (L, 3)와 (D, 1)의 무게중심이므로, 지렛대의 원리에 의해 GD:GL = 3:1이 된다. 같은 이유로, G는 각 중선을 3:1로 나눈다는 것을 알 수 있다. □



<그림 1>



<그림 2>

사면체 DABC의 네 꼭지점에 놓인 질량점 (A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)의 무게중심 G에 대해, 등식 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$이 성립하므로, G는 사면체 DABC의 무게중심이 된다.

성질 1의 증명에서는 사면체의 선분들이 한 점에서 교차한다는 것을 증명하기 위해, 첫째 사면체의 각 꼭지점에 적당한 무게를 놓아 사면체의 꼭지점들에 놓인 질량점들의 무게중심을 생각하고, 둘째 이 무게중심이 고찰하는 선분들 각각에 속함을 보였다. 이러한 방법은 '두 선분이 교차한다'는 것의 정의에 충실하게 반영한 접근 방법이라 할 수 있다. 왜냐 하면, 기하학에서 두 선분이 교차한다는 것은 어떤 점이 두 선분 각각에 속하는 것으로 정의되기 때문이다.

이제 사면체의 겹중선(bimedian)들의 교차에 대해 살펴보자. <그림 1>에서 마주보는 모서리 AB, CD의 중점들을 연결한 선분을 겹중선이라 부른다. 사면체에는 세 개의 겹중선이 있으며, 이들은 다음과 같은 성질을 가진다.

성질 2. 사면체의 세 겹중선은 한 점에서 교차하며, 그 교점은 각 겹중선을 이등분한다.

증명. 사면체 DABC에서 모서리 DA, BC의 중점을 각각 L, M, 모서리 DB, AC의 중점을 각각 P, Q라 하고 겹중선 LM, PQ를 긋자(그림 2). 이제, 사면체의 각 꼭지점에 무게 1을 놓아, 네 질량점 (A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)을 생각하자. 그러면, (D, 1)과 (A, 1)의 무게중심 L에는 2인 무게가 놓이며, (B, 1)과 (C, 1)의 무게중심 M에도 2인 무게가 놓이게 된다. 그러면, 사면체 DABC의 무게중심 G는 선분 LM에 속하게 되며, 점 L, M에 놓인 무게가 각각 2임을 감안하면, 지렛대의 원리에 의해 선분 LM의 중점이 사면체 DABC의 무게중심임을 알 수 있다.

한편, 점 P, Q는 각각 (D, 1)과 (B, 1), (A, 1)과 (C, 1)의 무게중심이므로, 사면체 DABC의 무게중심 G는 선분 PQ에 속한다. 즉 선분 LM가 PQ가 한 점 G에서 교차하게 된다. 그리고 점 G는 선분 LM, PQ를 이등분한다.

같은 방법으로, 모서리 AB, CD의 중점을 잡아 겹중선 RS를 그으면, 사면체의 무게중심 G는 RS에 속하며, G는 RS를 이등분하게 된다. 결국, 사면체 DABC의 세 겹중선 LM, PQ, RS는 한 점 G에서 교차하고, 교점 G는 겹중선 각각을 이등분한다. □

성질 1과 성질 2의 증명에서 사면체의 중선들의 교점과 겹중선들의 교점은 사면체의 네 꼭지점에 놓인 질량점 (A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)의 무게중심임을 알 수 있다. 이로부터 사면체의 네 중선의 교점과 겹중선들의 교점은 일치한다는 사실을 얻을 수 있다.

한편, 겹중선의 개념은 사각형에서도 유사하게 사용된다. 사각형에서 대변의 중점들을 연결한 선분을 겹중선이라 부른다. 성질 2와 유사한 방법으로, 볼록사각형 ABCD에서 두 겹중선의 교점 G가 사각형의 꼭지점들에 놓인 질량점 (A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)의 무게중심임을 알 수 있다. 한편, G는 질량점 (A, 1), (C, 1)의 무게중심과 (B, 1), (D, 1)의 무게중심을 연결한 선분의 중점이 된다. 이로부터 겹중선의 교점 G는 대각선들의 중점을 연결한 선분의 중점과 일치한다는 사실도 알 수 있다.

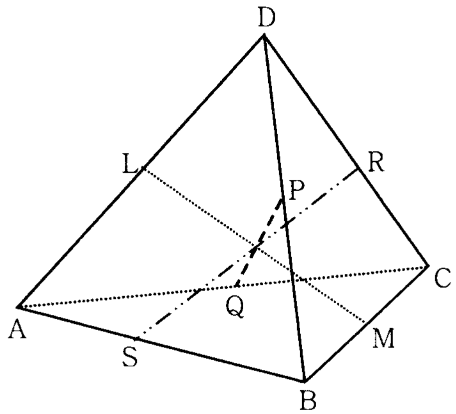
이제, 성질 2를 일반화시켜 보자. 이를 위해, Ceva의 정리, 즉 삼각형 ABC에서 AA_1, BB_1, CC_1이 한 점에서 교차할 필요충분조건은 $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$이라는 것을 생각하자. 이때 등식 $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$을 Ceva 조건이라 부르자(지렛대의 원리를 이용한 삼각형의 Ceva 정리의 증명은 한인기·홍동화(2006), Klamkin & Kung(1996)를 참조).

성질 3. 사면체 DABC의 모서리 DA, DB, DC, AB, BC, AC에 각각 L, P, R, S, M, Q를 잡아, 선분 LM, PQ, RS를 그었다(<그림 3>). 사면체의 면들 중 세 면에 대해 Ceva 조건이 성립할 필요충분조건은 선분 LM, PQ, RS가 한 점에서 교차하는 것이다.

충분조건의 증명. 면 DAB, DBC, DAC에 Ceva 조건이 성립한다고 가정하자. 이제 L이 질량점 D, A의 무게중심이 되도록 D, A에 각각 무게 m_4, m_1을 놓자(지렛대의 원리에 의해, $\frac{m_4}{m_1}=\frac{LA}{LD}$가 되도록 놓음). 마찬가지로, P, R이 각각 질량점 D와 B, D와 C의 무게중심이 되도록 (B, m_2), (C, m_3)를 잡자. 면 DAB에 Ceva 조건이 성립하므로, $\frac{DL}{LA}\cdot\frac{AS}{SB}\cdot\frac{BP}{PD}=1$이 된다. 지렛대의 원리에 의해 $\frac{DL}{LA}=\frac{m_1}{m_4}$, $\frac{BP}{PD}=\frac{m_4}{m_2}$이며, 이들을 Ceva 조건에 대입하면 $\frac{AS}{SB}=\frac{m_2}{m_1}$이 얻어진다. 결국 S는 질량점 (A, m_1), (B, m_2)의 무게중심이 된다. 같은 방법으로 점 M, Q가 질량점 (B, m_2)와 (C, m_3), (A, m_1)와 (C, m_3)의 무게중심임을 알 수 있다.

이제 선분 LM, PQ, RS가 한 점에서 교차한다는 것을 증명하자. 네 질량점 (A, m_1), (B, m_2), (C, m_3), (D, m_4)의 무게중심 G는 (D, m_4), (A, m_1)의 무게중심 L과 (B, m_2), (C, m_3)의 무게중심 M을 연결한 선분 LM에 속한다. 같은 이유로, 점 G는 선분 PQ, RS에 속한다는 것을 알 수 있고, 이로

부터 선분 LM, PQ, RS는 한 점에서 교차한다는 것이 증명된다. □



<그림 3>

살펴본 증명에서 한 가지 주목할 것은 면 DAB, DBC, DAC에 Ceva 조건이 성립하면, 면 ABC에 속하는 점들 S, M, Q가 선분 AB, BC, AC의 무게중심이 된다는 것이다. 즉 삼각형 ABC와 점 S, M, Q에 대해서도 Ceva 조건이 성립하며, 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다: 사면체의 면들 중 세 면에 대해 Ceva 조건이 성립하면, 나머지 네 번째 면에 대해서도 Ceva 조건이 성립한다.

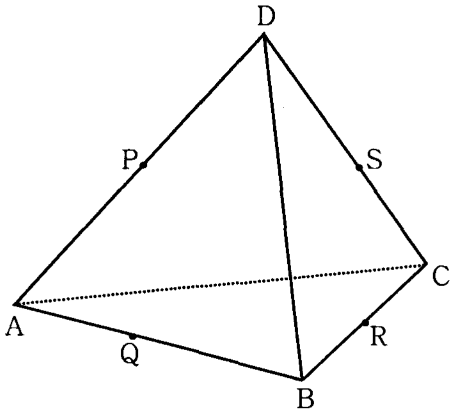
필요조건의 증명. 선분 LM, PQ, RS가 한 점에서 교차한다고 가정하자. 우선, L이 질량점 D, A의 무게중심이 되도록 D, A에 각각 무게 m_4, m_1을 놓고, P, R이 질량점 D와 B, D와 C의 무게중심이 되도록 (B, m_2), (C, m_3)를 잡자. 이제, 질량점 (A, m_1), (B, m_2), (C, m_3), (D, m_4)의 무게중심 G에 대해 생각하자.

L이 (A, m_1)와 (D, m_4)의 무게중심이므로, G는 평면 LBC에 속한다. 같은 이유로, G는 평면 ABR, ACP에 각각 속하게 된다. 즉 G는 세 평면 LBC, ABR, ACP의 교점이다. 그런데 선분 LM, PQ, RS는 각각 평면 LBC, ACP, ABR에 속하므로, 세 선분의 교점은 평면들의 교점인 무게중심 G와 일치한다.

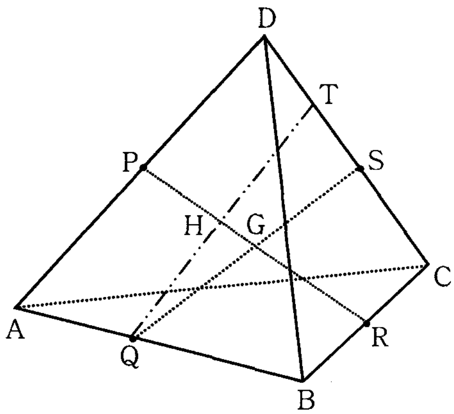
한편 무게중심 G가 선분 LM에 속하며 L은 (A, m_1)와 (D, m_4)의 무게중심이므로, M은 (B, m_2), (C, m_3)의 무게중심이 된다. 같은 이유로, 점 S, Q도 각각 (A, m_1)와 (B, m_2), (A, m_1)와 (C, m_3)의 무게중심이 됨을 알 수 있다. 그러면 $\frac{DL}{LA}=\frac{m_1}{m_4}$, $\frac{DP}{PB}=\frac{m_2}{m_4}$, $\frac{DR}{RC}=\frac{m_3}{m_4}$, $\frac{AS}{SB}=\frac{m_2}{m_1}$, $\frac{BM}{MC}=\frac{m_3}{m_2}$, $\frac{CQ}{QA}=\frac{m_1}{m_3}$이 성립하고, 사면체의 각 면에 대해 Ceva 조건이 성립한다. □

이제, 사면체에서 직선들의 교차를 활용하여, 사면체에서 Menelaus의 정리를 증명하자.

성질 4(사면체의 Menelaus 정리). 사면체 DABC의 모서리 DA, AB, BC, CD에 각각 점 P, Q, R, S가 놓여있다(<그림 4>). 이들 네 점이 한 평면에 속할 필요충분조건은 $\frac{DP}{PA}\cdot\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BR}{RC}\cdot\frac{CS}{SD}=1$이다.



<그림 4>



<그림 5>

충분조건의 증명. 네 점 P, Q, R, S가 한 평면에 속한다고 가정하자. 즉 직선 PR, QS가 한 점 G에서 교차한다고 하자. 이제, P가 질량점 D와 A의 무게중심이 되도록 질량점 (D, m_4), (A, m_1)을 잡자. 그리고 점 Q, R이 각각 A와 B, B와 C의 무게중심이 되도록 질량점 (B, m_2), (C, m_3)를 잡을 수 있다. 이제, S가 질량점 (D, m_4)와 (C, m_3)의 무게중심임을 증명하면, $\frac{DP}{PA}\cdot\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BR}{RC}\cdot\frac{CS}{SD}=1$이 증명된다.

귀류법으로, S가 질량점 (D, m_4)와 (C, m_3)의 무게중심이 아니라고 가정하자. 그러면, 이들 질량점의 무게중심을 T라 놓을 수 있다(T는 S와는 다른 점임). 그러면, 선분 PR과 QT의 교점 H가 질량점 (A, m_1), (B, m_2), (C, m_3), (D, m_4)의 무게중심이 된다(<그림 5>). 세 점 T, Q, S가 결정하는 평면을 생각하자. 직선 PR의 두 점 G, H가 평면 TQS에 속하므로, 직선 PR은 평면 TQS에 속한다. 그리고 직선 CD도 평면 TQS에 속한다. 이로부터 직선 DP, CR이 평면 TQS에 속한다는 것을 알 수 있고, 결국 네 점 D, A, B, C가 평면 TQS에 속하므로, 모순이 유도된다.

결국, S는 질량점 (D, m_4)와 (C, m_3)의 무게중심이고, 등식 $\frac{DP}{PA}\cdot\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BR}{RC}\cdot\frac{CS}{SD}=1$이 성립한다.

필요조건의 증명. 점 P, Q, R이 무게중심이 되도록 질량점 (D, m_4), (A, m_1), (B, m_2), (C, m_3)를 잡자. 즉 $\frac{DP}{PA}=\frac{m_1}{m_4}$, $\frac{AQ}{QB}=\frac{m_2}{m_1}$, $\frac{BR}{RC}=\frac{m_3}{m_2}$가 성립한다. 이제 S가 질량점 (D, m_4)와 (C, m_3)의 무

계중심임을 보이자.

조건에 의해, 등식 $\frac{DP}{PA} \cdot \frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CS}{SD} = 1$이 성립하므로, $\frac{DP}{PA} = \frac{m_1}{m_4}$, $\frac{AQ}{QB} = \frac{m_2}{m_1}$, $\frac{BR}{RC} = \frac{m_3}{m_2}$을 등식에 대입하면, $\frac{CS}{SD} = \frac{m_4}{m_3}$이 얻어진다. 이로부터 점 S가 (D, m_4)와 (C, m_3)의 무게중심임을 알 수 있다.

네 점 P, Q, R, S가 DA, AB, BC, CD의 무게중심이므로, 사면체 DABC의 무게중심 G는 선분 PR에도 속하고, 선분 QS에도 속한다. 즉 선분 PR과 QS는 G에서 교차하고, 네 점 P, Q, R, S는 한 평면에 속하게 된다. □

기술한 사면체의 Menelaus의 정리에 대한 논증적인 방법의 증명은 한인기(2005)에서 볼 수 있다. 삼각형에서 Menelaus의 정리가 평면의 세 점이 한 직선에 속하는 필요충분조건을 의미했다면, 사면체에서는 공간의 네 점이 한 직선에 속할 필요충분조건을 나타낸다.

3. 사면체에서 면들의 교차

사면체에서 면들의 교차한다는 것은 사면체의 성질을 밝히는 중요한 단서를 제공한다. 예를 들어, 사면체의 각 모서리에서의 이면각들의 이등분면, 즉 6개의 이등분면이 한 점에서 교차한다는 사실로부터 임의의 사면체에 대해 내접구가 존재한다는 성질이 유도된다. 사면체와 관련된 몇몇 평면들의 교차를 지렛대의 원리를 이용하여 살펴보자. 우선, 사면체에서 Ceva의 정리에 대해 살펴보자.

성질 5(사면체의 Ceva 정리). 사면체 DABC의 모서리 DA, AB, BC, CD에 각각 점 P, Q, R, S가 놓여있다(그림 4). 평면 DAR, ABS, BCP, CDQ가 한 점에서 교차할 필요충분조건은 $\frac{DP}{PA} \cdot \frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CS}{SD} = 1$이다.

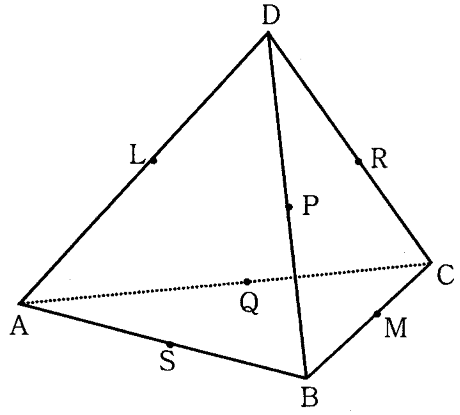
충분조건의 증명. 평면 DAR, ABS, BCP, CDQ가 한 점 G에서 교차한다고 가정하자. 평면 DAR과 BCP의 교선은 PR이 되고, 평면 ABS와 CDQ의 교선은 SQ가 된다. 이때, 이들 교선은 평면들의 교점인 G에서 교차하게 된다. 그러므로 P, Q, R, S는 한 평면에 속하고 사면체의 Menelaus의 정리에 의해, 등식 $\frac{DP}{PA} \cdot \frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CS}{SD} = 1$이 성립한다.

필요조건의 증명. 점 P, Q, R이 무게중심이 되도록 질량점 (D, m_4), (A, m_1), (B, m_2), (C, m_3)를 잡자. 그러면 사면체의 Menelaus의 정리 증명 과정에 의해, 점 S는 (D, m_4)와 (C, m_3)의 무게중심임을 알 수 있다. 이때, 점 P, Q, R, S가 DA, AB, BC, CD의 무게중심이므로, 선분 PR과 QS의 교점 G는 사면체 DABC의 무게중심이다. 이제, 점 G가 평면 DAR, ABS, BCP, CDQ에 모두 속함을 보이자.

P가 (D, m_4), (A, m_1)의 무게중심이므로, 사면체의 무게중심 G는 평면 PBC에 속한다. 같은 방법으로, 사면체의 무게중심 G가 평면 DAR, ABS, CDQ에 속함을 알 수 있고, 이로부터 네 평면이 한 점에서 교차한다는 것이 증명된다. □

사면체의 Ceva의 정리는 네 평면이 한 점에서 교차할 필요충분조건을 나타낸다. 사면체의 Ceva 정리의 증명에서는 네 평면이 한 점에서 교차한다는 것을 증명하기 위해, 사면체의 네 꼭지점에 적당한 무게를 놓아, 이들 질량점의 무게중심이 네 평면에 각각 속한다는 것을 보였다. 이제, 사면체에서 여섯 평면이 한 점에서 교차하는 경우를 생각하자.

성질 6. 사면체 DABC의 모서리 DA, DB, DC, AB, BC, AC의 중점 L, P, R, S, M, Q를 잡자(그림 6). 그러면 평면 DAM, DBQ, DCS, ABR, BCL, ACP는 한 점에서 교차한다.



<그림 6>

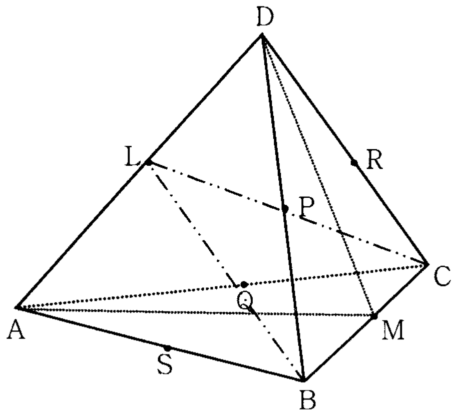
증명. 사면체 DABC의 각 꼭지점에 무게 1을 놓으면, 질량점 (A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)을 얻을 수 있다. 이들 질량점의 무게중심을 G라 하자. M이 질량점 (B, 1), (C, 1)의 무게중심이므로, 무게중심 G는 평면 DAM에 속한다. 같은 이유로, 무게중심 G는 평면 DBQ, DCS, ABR, BCL, ACP에 각각 속한다는 것을 알 수 있다. 이로부터 평면 DAM, DBQ, DCS, ABR, BCL, ACP가 한 점에서 교차한다는 것이 증명된다. □

성질 6에서는 사면체의 모서리를 포함하는 여섯 평면이 한 점에서 교차한다는 것을 무게중심을 이용하여 증명하였다. 이제, 이러한 평면들이 한 점에서 교차할 필요충분조건을 증명하자.

성질 7. 사면체 DABC의 모서리 DA, DB, DC, AB, BC, AC에 각각 L, P, R, S, M, Q를 잡아(그

림 6), 평면 DAM, DBQ, DCS, ABR, BCL, ACP를 생각하자. 사면체의 면들 중 세 면에 대해 Ceva 조건이 성립할 필요충분조건은 평면 DAM, DBQ, DCS, ABR, BCL, ACP가 한 점에서 교차하는 것이다.

충분조건의 증명. 사면체의 면들 중 세 면에 대해 Ceva 조건이 성립한다고 가정하고, 평면들이 한 점에서 교차한다는 것을 증명하자. 우선, 평면 DAM과 BCL을 생각하자(<그림 7>). 점 L과 M은 이들 평면에 모두 속하므로, 이들 평면의 교선은 LM이다. 같은 이유로, 평면 DBQ과 ACP의 교선은 PQ이고, 평면 DCS와 ABR의 교선은 RS이다.



<그림 7>

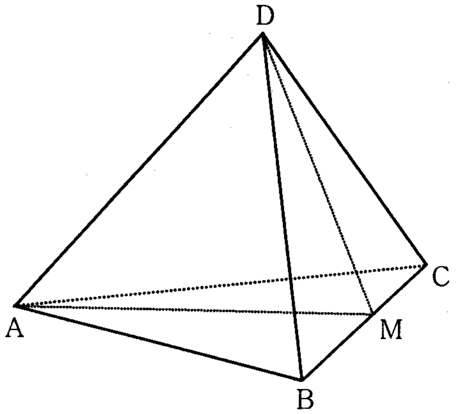
사면체의 면들 중 세 면에 대해 Ceva 조건이 성립하므로, 성질 3에 의해 선분 LM, PQ, RS는 G에서 교차한다. 그러므로 G는 평면 DAM, DBQ, DCS, ABR, BCL, ACP에 속하며, 이들 평면은 한 점에서 교차한다는 것이 증명된다.

필요조건의 증명. 평면 DAM, DBQ, DCS, ABR, BCL, ACP가 한 점에서 교차하므로, 이들의 교선인 LM, PQ, RS는 한 점에서 교차한다. 성질 3에 의해, 사면체의 면들 중 세 면에 대해 Ceva 조건이 성립한다. □

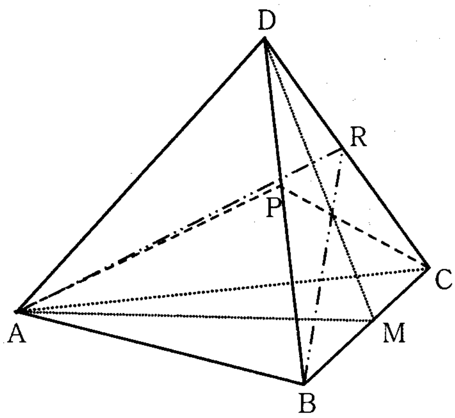
성질 7을 이용하여 평면들의 교차에 관련된 흥미로운 사실들을 증명할 수 있다.

성질 8. 사면체에서 모서리의 이면각들을 생각하자. 그러면 이들 여섯 개의 이면각의 이등분면들은 한 점에서 교차한다.

증명. 성질 7에 의해, 이면각의 이등분면들이 한 점에서 교차한다는 것을 증명하려면, 사면체의 면들에 대해 Ceva 조건이 성립한다는 보이면 된다. 우선, 모서리 DA에서의 이면각에 대해 이등분면 DAM을 작도하자(<그림 8>). 한인기・에르든예프(2005)에 의하면, 모서리 DA에서의 이면각에 이등분면 DAM을 그으면, 등식 $\frac{BM}{MC}=\frac{S_{DAB}}{S_{DAC}}$이 성립한다.



<그림 8>



<그림 9>

이제, 모서리 AB, AC에 대한 이면각의 이등분면 ABR, ACP를 작도하자(그림 9). 그러면 같은 이유로, 이들 이등분면에 대해 등식 $\frac{CR}{RD}=\frac{S_{ABC}}{S_{DAB}}$, $\frac{DP}{PB}=\frac{S_{DAC}}{S_{ABC}}$가 성립함을 알 수 있다. $\frac{DP}{PB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CR}{RD}$에 얻어진 등식들을 대입하면, $\frac{DP}{PB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CR}{RD}=\frac{S_{DAC}}{S_{ABC}}\cdot\frac{S_{DAB}}{S_{DAC}}\cdot\frac{S_{ABC}}{S_{DAB}}=1$이 성립하고, 면 DBC에 Ceva 조건이 성립한다는 것을 알 수 있다. 같은 방법으로, 면 DAB, DAC에 대해서도 Ceva 조건이 성립한다는 것을 증명할 수 있다. 이로부터 성질 7에 의해 이면각들의 이등분면은 한 점에서 교차한다는 것이 증명된다. □

성질 8에서는 사면체의 이면각들의 이등분면이 한 점에서 교차한다는 것을 성질 7을 이용하여 증명하였다(논증을 이용한 다른 증명방법은 한인기·꼴랴긴(2006)에 제시되어 있음). 이면각의 이등분면으로부터 이면각의 면들까지의 거리가 같으므로, 이등분면들의 교점으로부터 사면체의 면들까지의 거리가 같다는 것을 알 수 있다. 즉 이 교점이 사면체의 내접구의 중심이다.

이제, 수심사면체의 한 성질을 증명하자. 사면체는 삼각형과는 달리, 꼭지점에서 마주보는 면에 그은 수선이 한 점에서 교차할 수도 있고, 그렇지 않을 수도 있다. 꼭지점에서 마주보는 면에 그은 네 수선이 한 점에서 교차하는 사면체를 수심사면체라 부른다.

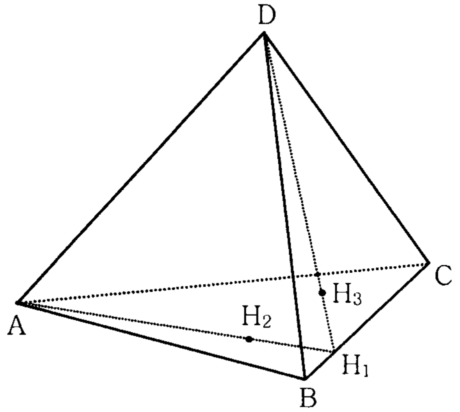
성질 9. 수심사면체에서 한 모서리를 지나(포함하여) 마주보는 모서리와 직교하는 평면[1])을 여섯 개의 모서리에 대해 각각 그었다. 그러면 이들 여섯 개의 평면은 한 점에서 교차한다.

---

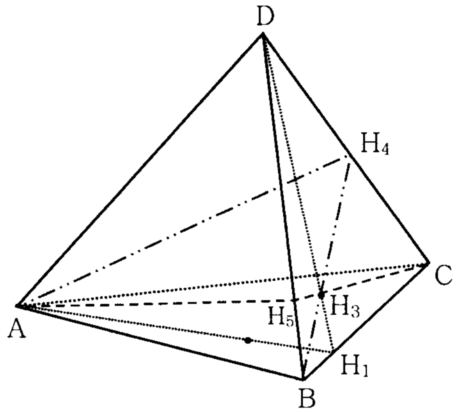
1) 수심사면체의 각 꼭지점을 마주보는 면에 사영시키면, 꼭지점은 마주보는 면의 수심에 사영된다. 그러므로 이러한 평면을 사면체에 작도할 수 있음.

증명. 수심사면체 DABC에서 모서리를 지나 마주보는 모서리와 직교하는 평면들을 그어, 사면체의 각 면에서 Ceva 조건이 성립하는가를 확인하자.

우선, 모서리 DA를 지나며 모서리 BC와 직교하는 평면 DAH_1을 작도하자(<그림 10>). 그러면 AH_1, DH_1은 면 ABC, DBC에서 수선이며, 수심 H_2, H_3를 지난다. 같은 방법으로, 모서리 AB, AC를 지나며 모서리 DC, DB와 직교하는 평면 ABH_4, ACH_5를 작도하자(<그림 11>). 그러면 BH_4, CH_5는 삼각형 DBC의 수심 H_3을 지나는 수선들이다. 이로부터 삼각형 DBC에서 Ceva 조건이 성립함을 알 수 있다.



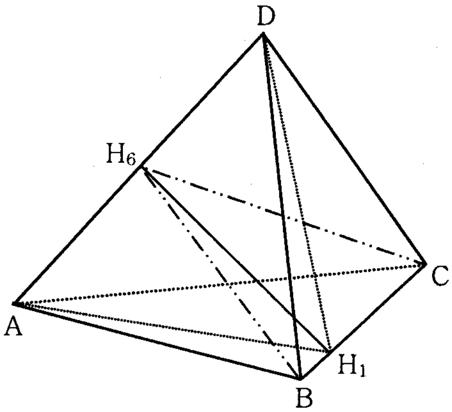
<그림 10>



<그림 11>

이제, 모서리 BC, DB, DC를 지나 모서리 DA, AC, AB에 직교하는 평면을 작도하면, 같은 방법으로 삼각형 DAB, DAC, ABC에서 Ceva 조건이 성립함을 알 수 있다. 이로부터 성질 7에 의해 여섯 개의 평면은 한 점에서 교차한다는 것이 증명된다. □

성질 9에서 수심사면체에서 여섯 개의 면들이 한 점에서 교차한다는 것을 증명하였는데, 이로부터 수심사면체의 다른 성질도 알 수 있다. 모서리 DA, BC를 지나 모서리 BC, DA에 직교하는 평면 DAH_1과 면 BCH_6을 생각하자(그림 12). 이 두 평면의 교선 H_1H_6은 모서리 DA, BC와 각각 직교하며, 성질 9의 여섯 평면의 교점을 지난다. 같은 방법으로, 모서리 DB, AC를 지나며 모서리 AC, DB에 직교하는 평면들의 교선, 모서리 DC, AB를 지나며 모서리 AB, DC에 직교하는 평면들의 교선을 생각하면, 이들 교선이 성질 9의 여섯 평면의 교점을 지난다는 것을 알 수 있다. 즉 수심사면체에서 마주보는 모서리들에 각각 직교하는 세 선분은 한 점에서 교차한다는 것을 알 수 있다.



<그림 12>

4. 결 론

지렛대의 원리 및 무게중심의 개념은 아르키메데스 이래로 많은 수학자들, 물리학자들에 의해 연구, 발전되어 왔으며, 지금도 물리학, 화학, 건축학 등의 분야에서 폭넓게 활용되고 있다. 본 연구에서는 지렛대의 원리를 이용하여 사면체에서 선분들, 평면들의 교차에 관련된 몇몇 성질들을 탐구하여, 지렛대의 원리를 이용한 사면체의 성질 탐구의 예들과 방법을 제시하였다.

사면체에서 선분들의 교차와 관련하여, '사면체의 네 중선은 한 점에서 교차하고, 그 교점은 각 중선을 3:1로 나눈다', '사면체의 세 겹중선은 한 점에서 교차하며, 그 교점은 각 겹중선을 이등분한다', '사면체에서 마주보는 모서리의 쌍에 각각 끝점이 있는 세 선분이 한 점에서 교차할 필요충분조건은 사면체의 면들 중 세 면에 대해 Ceva 조건이 성립하는 것이다', 사면체의 Menelaus 정리 등을 지렛대의 원리를 이용하여 증명하였다. 이때, 사면체의 각 꼭지점에 적당한 무게를 놓아 사면체의 꼭지점들에 놓인 질량점들의 무게중심을 생각하고, 이 무게중심이 고찰하는 선분들 각각에 속함을 보여, 이들 선분들이 한 점에서 교차한다는 것을 증명하였다.

사면체에서 면들의 교차와 관련하여, 사면체의 Ceva 정리, '사면체의 한 모서리를 지나(포함하며) 마주보는 모서리의 중점을 지나는 여섯 평면이 한 점에서 교차한다', '사면체의 한 모서리와 마주보는 모서리의 한 점을 지나는 여섯 평면이 한 점에서 교차할 필요충분조건은 사면체의 면들 중 세 면에 대해 Ceva 조건이 성립하는 것이다', '사면체의 여섯 개의 이면각들의 이등분면은 한 점에서 교차한다', '수심사면체에서 한 모서리를 지나 마주보는 모서리와 직교하는 여섯 평면은 한 점에서 교차한다'는 성질을 지렛대의 원리를 이용하여 증명하였다. 이때 사면체의 네 꼭지점에 적당한 무게를 놓아 얻어진 질량점들의 무게중심이 평면들 각각에 속한다는 것을 보여, 평면들이 한 점에서 교차한다는 것을 증명하였다.

본 연구에서 제시한 선분들 및 평면들의 교차를 증명하는 지렛대의 원리를 이용한 방법은 사면체의 다른 성질들의 탐구에도 유용할 뿐 아니라, 다른 도형의 성질들을 증명하는 유익한 도구가 될 것이다. 특히 본 연구의 결과는 사면체에 관련된 문제들의 해결방법을 다양하게 하며, 지렛대의 원리를 이용한 수학적 탐구의 폭을 확장시킬 기초자료가 될 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

김선희 · 김기연 (2005). 수학 영재의 심화학습을 위한 다각형의 무게중심 연구, 수학교육학연구 **15(3)**, pp.335-352.

박달원 (2006). 영재학생들을 위한 삼각형의 무게중심 지도 방법, 한국학교수학회논문집 **9(1)**, pp.93-104.

한인기 (2003). 수학 문제해결에서 아르키메데스의 공학적 방법에 관한 연구, 수학교육논문집 **17**, pp.115-126.

한인기 (2005). 교사를 위한 수학사, 서울: 교우사.

한인기 · 꼴랴긴 (2006). 문제해결의 이론과 실제, 서울: 승산.

한인기 · 에르든예프 (2005). 유추를 통한 수학탐구, 서울: 승산.

한인기 · 홍동화 (2006). 지렛대 원리를 활용한 선분의 비에 관련된 도형 문제의 해결에 대한 연구, 수학교육논문집 **20(4)**, pp.621-634.

홍갑주 (2005). 도형의 무게중심과 관련된 오개념 및 논리적 문제, 학교수학 **7(4)**, pp.391-402.

Klamkin M. S. & Kung S.H. (1996). Ceva's and Menelaus' Theorem and Their Converses via Centroids, *Mathematics Magazine* **69(1)**, pp.49-51.

Saito K. (2006). *Yomigaeru Tensai Arukimedesu* / 조윤동 역 (2007). 아르키메데스, 서울: 일출봉.

Stein S. (1999). *Archimedes: What Did He Do Besides Cry Eureka?* / 이우영 역 (2006). 아르키메데스, 서울: 경문사.

A Study on Tetrahedron's Properties related with Intersection of Segments and Planes Using the Principle of the Lever

Lee, Kwang Rok; Son, Jin O; Song, A Rom; Baek, Soo Hean & Chung, Ki Young
Gyeongnam Science High School, 660-851, Korea
dlrhkdfhr0@hanmaill.net; jin5son@hanmail.net; aromsong@hanmail.net
bshean1129@hanmail.net; zungkiyoung@hanmail.net

Han Inki[2)]
Gyeongsang National University, 660-701, Korea
inkiski@gsnu.ac.kr

In this paper we study tetrahedron's properties related with intersection of segments and planes using the principle of the lever. We analyze proof method using the principle of the lever, and describe how to prove intersection of segments and planes using the principle of the lever in tetrahedron.

2) correspondent author
* ZDM Classification : D53
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50
* Key Words : tetrahedron, the principle of the lever, the center of gravity, segment, plane, intersection