韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 21집 제 4호, 2007. 11. 597-612

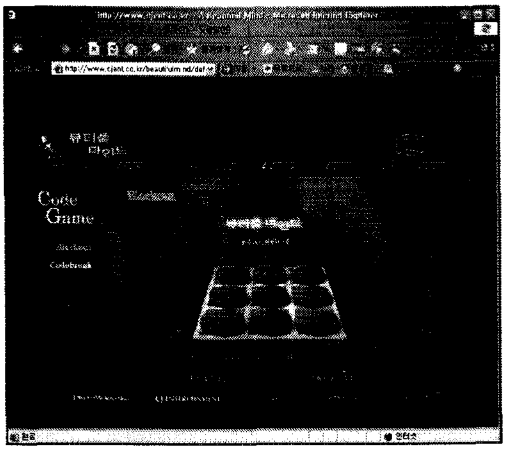
J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 21 No 4, Nov. 2007. 597-612

$m \times n$ 크기의 일반적인 흑백 게임의 최적해와 타일링

김 덕 선 (성균관대학교)
이 상 구 (성균관대학교)1)

I. 서 론

수학자 존 네쉬의 삶을 그린 영화 '뷰티플 마인드'에서 주인공이 바둑 두는 모습이 나오며 관련 홈페이지에 '흑백(Blackout 또는 black and white)' 게임이 소개되었다 (CJ,2002).



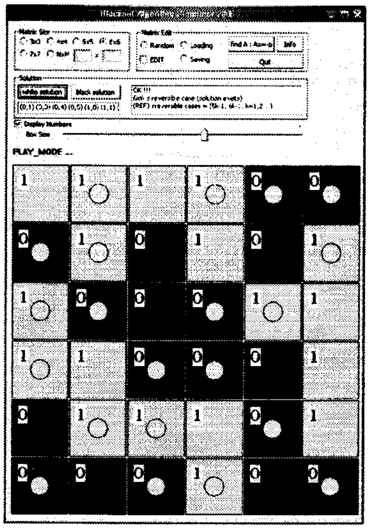
<그림 1> 흑백게임] (CJ, 2002)

(CJ,2002)에서 나온 것과 같이 흑백 바둑알 9개가 있는 3×3 바둑판에서의 게임을 예로 들어본다. 게임의 목적은 바둑알을 선별적으로 클릭하여 자신과 주변의 바둑알의 색을 바꾸는 과정을 거쳐 바둑알 9개 모두를 같은 색으로 만드는 것이다. 이렇게 하기 위하여 클릭 할 바둑알을 선택할 수 있는데, 이 과정에서 조건은 한 바둑알을 클릭하면 자신과 주변 상・하・좌・우의 바둑알 색이 바뀌게 (toggle) 된다.

---

1) Corresponding author
This work is supported by BK21 and KRF-Project : 2006-0869-000
* ZDM 분류 : 97A90
* MSC2000 분류 : 97-04
* 주제어 : Blackout Puzzle, Linear Algebra, Java Tool, Algorithm, Mod 2 Arithmetic, Merlin Game

이러한 흑백 게임은 시그마게임의 일종이며 이 게임을 선형대수학적으로 해석하여 게임을 이기는 최적의 전략이 소개된 바 있다.2) (Anderson and Feil, 1998) 본 연구팀에서도 이미 선형대수학적인 알고리즘을 이용하여 19×19의 문제를 해결하고 실제로 이를 응용해 볼 수 있는 프로그램도 같이 소개하였다. (Lee,2004) 더 나아가 $n\times n$크기의 문제 중 해를 가지는 경우를 분석하여 그 답을 제공하였다. (Lee,2006)



<그림 2> 흑백문제 프로그램 (Lee,2004)

본 연구에서는 앞에서 소개한 흑백게임의 일반화로 (Anderson and Feil, 1998)이나 (Lee, 2006)에서 소개한 정사각형의 형태의 게임이 아닌, 일반화된 $m\times n$ 크기에서의 게임에 대하여 해의 존재성을 분석하고 흑백게임에 대한 해법을 제시한다.

II. 본 론

1. $m\times n$ 크기의 일반적인 흑백게임

(Lee,2004)에서 다룬 내용들은 정사각형태의 모델에 대하여만 그 문제를 생각하고 있다. 여기서 우리는 이를 일반화하기 위하여 일반적인 공간으로 확장하여 생각할 수 있다. 일반적인 형태로 하나의 예로 3×4의 경우에 대하여 알아보자. 3×4의 경우, 한 점을 선택했을 때 주변의 정보가 바뀌는 것을 고려하여 이를 (0,1) 행렬로 생각하면 다음과 같이 생각할 수 있다.

2) (Anderson and Feil, 1998)에서는 일반적인 크기의 흑백문제에 대하여 그 해법을 구하기가 매우 어렵다는 점을 지적한 바 있다.

$$\begin{bmatrix}1100\\1000\\0000\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1110\\0100\\0000\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0111\\0010\\0000\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0011\\0001\\0000\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}1000\\1100\\1000\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0100\\1110\\0100\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0010\\0111\\0010\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0001\\0011\\0001\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}0000\\1000\\1100\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0000\\0100\\1110\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0000\\0010\\0111\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0000\\0001\\0011\end{bmatrix}$$

위의 12개의 3×4행렬(12×1벡터)을 각각 M_i라 하고 각각의 변수 a_i에 대한 일차결합 (Linear Combination)을 생각하면 초기조건을 B라 할 때 흑백게임의 수학적 모델은 다음과 같다. (단 $1 \le i \le 12$)

$$a_1 M_1 + \cdots + a_i M_i + \cdots + a_{12} M_{12} = -B$$

(또는 $J-B$, J는 모든 원소가 1인 행렬)

이 경우, 위의 행렬의 원소를 이용하여 순서대로 a_i들을 각각 12×1 벡터로 생각하여 이를 열로 하는 12×12 행렬을 만들면 다음과 같다.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc}
1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&1&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0\\
\hline
1&0&0&0&1&1&0&0&1&0&0&0\\
0&1&0&0&1&1&1&0&0&1&0&0\\
0&0&1&0&0&1&1&1&0&0&1&0\\
0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&1\\
\hline
0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1
\end{array}\right)$$

이 행렬의 경우, 일반적으로 다른 흑백게임에서 보았던 것과는 아주 다른 정사각형 패턴을 가진 새로운 행렬모양으로 구성된다. 정확히 중앙부분은 4×4형태의 세 개의 행렬로 나타난다. 이 행렬을 A라고 하고, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{12} \end{bmatrix}$라 하자. 이를 이용하여 $A\mathbf{x} = \mathbf{j}$를 구하면 다음과 같다.[3)]

```
In[69]:= MatrixRank[A]
Out[69]= 12

In[75]:= LinearSolve[A, {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}]
```

Out[75]= $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$

3) 여기서 $\mathbf{j}$는 모든 성분이 1인 12×1벡터.

즉 1,2,3,4,5,6,7,10,11,12번 버튼을 1번씩 누르면 j를 만들 수 있다. 동일한 방법으로 3×5의 흑백게임의 경우에 대하여도 생각해 보자. 이 경우 클릭할 수 있는 바둑알의 경우의 개수는 총 $15=3\times5$가 생긴다. 따라서 미지수는 $a_1,a_2,\cdots,a_{15}$가 존재하며, 행렬 A는 15×15크기가 된다. 이 행렬은 내부적으로 5×5크기의 블록행렬(block matrix)

$$K=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0\\0&1&1&1&0\\0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}K&I&O\\I&K&I\\O&I&K\end{bmatrix}$$

에 의하여 다음과 같이 표현된다.

즉, 이것을 직접 계산해 보면,

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc}
1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
\hline
1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1\\
\hline
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1
\end{array}\right)$$

으로 나타난다.

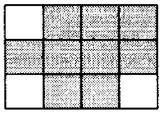
이제 이 문제를 일반적인 $m\times n$게임으로 확장해보자. 만일 우리가 $m\times n$크기의 흑백게임을 해결하려고 한다고 한다면 3×5의 경우에서 본 것과 마찬가지로, mn개의 알을 클릭하는 경우에 대응하는 mn개의 $mn\times1$ 벡터와 그들을 순서대로 열로 하는 $mn\times mn$ 크기의 정사각행렬이 만들어짐을 알 수 있다. 따라서 우리는 다음 정리를 생각할 수 있다.

정의 1.1 $M_i\in\mathbf{M}_{m\times n}(Z_2)$을 $m\times n$크기의 0,1-행렬이라고 하자. (여기서 $1\le i\le mn$) M_i는 흑백게임(black-out game)에서 i번째 버튼을 클릭했을 때 흑백이 바뀌는 부분을 표시하는 행렬이라고 하자. 여기서 i번째 바둑알의 순서는 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4&\cdots&n\\n+1&n+2&n+3&n+4&\cdots&2n\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\(m-1)n+1&(m-1)n+2&(m-1)n+3&(m-1)n+4&\cdots&mn\end{bmatrix}$$

정의 1.2 $B\in\mathbf{M}_{m\times n}(Z_2)$를 $m\times n$크기의 0,1-행렬이라고 하자. 이 행렬이 만일 현재 흑백게임의 현재 상태를 0,1로 표현하였다면 이 행렬을 초기상태라고 정의한다.

예제 1.3 $\begin{bmatrix} 0\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1 \\ 0\,1\,1\,0 \end{bmatrix}$는 다음의 초기상태를 의미한다.



<표 1> 초기상태

정리 1.3 앞에서 소개한 M_i, B와 미지수 a_i의 일차결합으로 나타나는 다음의 관계식

$$a_1M_1 + \cdots + a_iM_i + \cdots + a_{mn}M_{mn} = -B$$

$$(\text{또는 } J-B)^{4)} \quad (\text{단 } 1 \le i \le mn)$$

이 해를 가질 경우, 그 해 $a_1, \cdots, a_{mn}$들은 각각의 i번째 원소를 클릭하는 횟수를 의미한다.

정리 1.4 M_i의 원소를 앞에서 소개한 버튼클릭의 순서대로 늘어놓은 벡터를 $\mathbf{m}_i$라 하자. 그러면,

$$A = [\mathbf{m}_1 \,|\, \mathbf{m}_2 \,|\, \cdots \,|\mathbf{m}_{mn}]$$

B의 원소도 마찬가지로 늘어놓은 벡터를 $\mathbf{b}$라 하고, J행렬에 대해서도 마찬가지로 모든 성분이 1인 대응하는 $mn \times 1$ 벡터를 $\mathbf{j}$라 하자. 그리고 $\mathbf{x} = (a_1, \cdots, a_{mn})$이라 하자. 그러면, 앞의 정리에서 소개한 관계식이 해를 가지는 경우 위의 해는 다음의 식을 만족한다.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \ (\text{또는 } \mathbf{j}-\mathbf{b})$$

마지막 정리에서 나타나는 행렬은 블록삼중대각행렬(block tridiagonal matrix)로 나타난다. 그 형태는 다음과 같다. 우선 $n \times n$ 크기의 아래와 같은 $n \times n$ 블록행렬 K가 m개 생성된다. 그리고 이렇게 생성된 $n \times n$ 행렬 K와 $I_{n \times n}$를 이용하여 A를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1\;1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\;1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} K & I & \cdots & O \\ I & K & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & I \\ O \cdots & & I & K \end{bmatrix}^{5)}$$

따라서 A는 $mn \times mn$ 크기의 블록삼중대각행렬이다. 이 시스템은 m과 n에 대하여 유일하게 존재한다. 예를 들어 4×9크기의 게임의 경우 36×36크기의 행렬이 생기고, 6×6크기의 게임의 경우에도 36×36크기의 행렬이 생기지만, 이 두 행렬을 결정적으로 생긴 형태가 다르게 나타나게

---

4) J는 모든 원소가 1인 $m \times n$크기의 행렬이다.

5) 단, m개의 $n \times n$ 행렬 K가 대각선 성분을 이룸

된다. 4×9크기의 게임의 경우 K의 크기는 9×9크기의 행렬이 4개 나타나지만, 6×6크기의 게임의 경우 K의 크기가 6×6크기의 행렬이 6개 나타나게 된다.

$$K=\begin{bmatrix}110000000\\111000000\\011100000\\001110000\\000111000\\000011100\\000001110\\000000111\\000000011\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}K&I&O&O\\I&K&I&O\\O&I&K&I\\O&O&I&K\end{bmatrix}$$

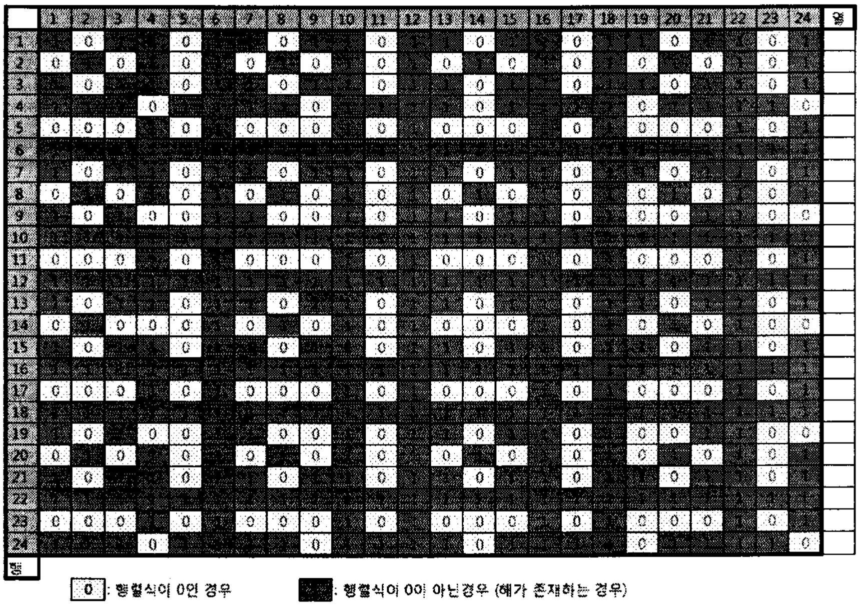
[4×9크기의 흑백게임에서 생성되는 행렬들]

$$K=\begin{bmatrix}110000\\111000\\011100\\001110\\000111\\000011\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}K&I&O&O&O&O\\I&K&I&O&O&O\\O&I&K&I&O&O\\O&O&I&K&I&O\\O&O&O&I&K&I\\O&O&O&O&I&K\end{bmatrix}$$

[6×6크기의 흑백게임에서 생성되는 행렬들]

앞에서 보여준 행렬 A는 그 블록행렬의 개수만 다를 뿐, 실제 크기는 둘 다 36×36의 크기로 같다. 그러나, m과 n에 의하여 완전히 다른 행렬로 결정되는 것이다.

앞에서 소개한 행렬 A가 해를 가지느냐, 그렇지 않으냐는, 매우 중요한 문제이다. 해를 가지게 되면 흑백게임을 바로 풀 수 있는 해인 $A^{-1}\mathbf{b}$를 구할 수 있게 되는 것이다. 따라서 행렬 A가 가역행렬인 경우를 판단하기 위하여 1×1부터 24×24크기의 게임들에 대하여 생성되는 행렬 A의 행렬식을 직접 구하여 확인해 보면 <그림 3>와 같이 나타난다. 이 결과는 이전에 (Lee,2004)에서 보인 결과 중 $n\times n$의 경우에 대하여 그 결과를 포함하고 있다.



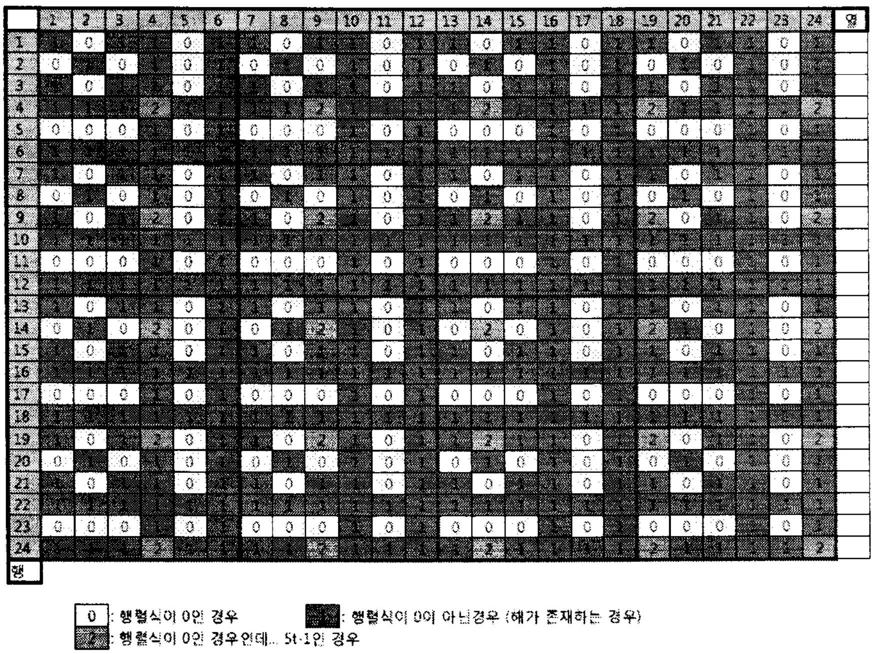
<그림 3> 24×24에서 해가 존재하는 경우

<그림 3>에서 확인할 수 있듯이, 행이든 열이든 하나의 크기가 6, 10, 12, 16, 18, 22의 경우에는 항상 해가 존재한다. 그 외에는 규칙성을 찾기가 상당히 어렵다. 그림에서 보듯이 총 576(24×24)가지의 경우 중 379개의 해가 존재하는 경우와, 197개의 해가 존재하지 않는 경우를 보였다.

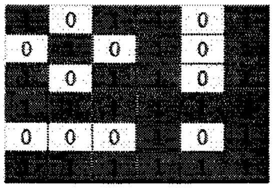
또한 행렬의 크기가 같다고 해서 가역행렬이 되는 것은 아니다. 앞에서 든 예인 4×9와 6×6크기의 게임들을 살펴보면 둘 다 36×36 크기의 행렬이지만, 4×9의 경우에는 행렬식이 0이 되고, 6×6크기의 경우에는 행렬식이 0이 되지 않는다. 즉, 4×9크기의 게임의 경우에는 게임을 해결할 수 있는 일반적인 해를 가지지 않고, 6×6인 경우에는 게임을 해결할 수 있는 일반적인 해를 가지게 된다.

2. 해가 존재하는 경우에 대한 고찰

앞의 <그림 3>에서 보여준 것처럼 해가 존재하는 경우는 m과 n에 대하여 특별한 형태의 패턴을 보여주고 있다. 그림 3에서는 그 패턴을 보기 어렵지만, 앞의 패턴은 6×6의 패턴과 m과 n이 각각 $5t-1$이 되는 지점에서 특별한 패턴이 나타난다. <그림 3>을 보자. <그림 3>에서는 그 규칙성을 알아내기가 매우 어렵다. 그러나 <그림 4>에서 그 패턴을 확인하면, 6×6안에서는 행렬식의 값이 0이 나오는 패턴이 매우 일정하다. 그 패턴은 <그림 5>와 같은 단일 블록으로 구성되어 있다.



<그림 4> 24×24에서 해가 존재하는 경우 - 2[6]



<그림 5> 6×6 단일블록

전체 행렬식 값의 분포는 이러한 단일블록으로 채워져 있고, 그 위에 행과 열의 값이 동시에 $5t-1$이 되는 지점에 정확히 행렬식의 값이 0이 되는 지점이 존재한다. 이 분포는 <그림 6>와 같이 나타난다. 즉, 앞에서 소개한 그림 4의 패턴을 먼저 전개한 뒤에, $5t-1$이 되는 4,9,14,19,24등의 숫자가 일치하는 곳에 행렬식이 0인 곳을 표시하면 <그림 1>과 같은 패턴을 만들 수 있다.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	열
1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	
2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	
3	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	
4	1	1	1		1	1	1	1		1	1	1	1		1	1	1	1		1	1	1	1		
5	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
7	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	
8	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	
9	1	0	1		0	1	1	0		1	0	1	1		1	1	0	1		0	1	1	0		
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
11	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
13	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	
14	0	1	0		0	1	0	1		1	0	1	0		0	1	0	1		1	0	1	0		
15	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
17	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	
18	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
19	1	0	1		0	1	1	0		1	0	1	1		1	1	0	1		0	1	1	0		
20	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	
21	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	
22	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
23	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	
24	1	1	1		1	1	1	1		1	1	1	1		1	1	1	1		1	1	1	1		
행																									

<그림 6> 행과 열의 값이 $5t-1$을 만족하는 교차점[7)]

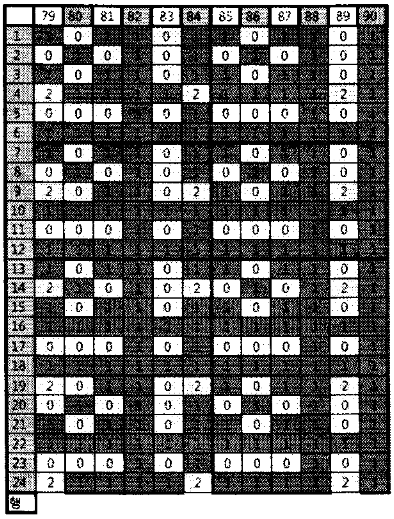
바로 이러한 방법으로 <그림 5>에 나온 패턴을 타일링하고, 이 위에 <그림 6>에서와 같이 행과 열이 $5t-1$이 되는 곳도 행렬식이 0이 되는 곳으로 표시하면, 전체적인 그림이 완성된다. 이런 방법으로 크기가 큰 행렬에 대해서도 그 값을 손쉽게 구할 수 있다.

큰 크기의 행렬식을 직접 확인하기 위하여 예를 들어 84×24와 84×23의 경우를 확인해보자.

6) 해당 패턴중 $5t-1$에 특수표기를 추가

7) 표시는 2이지만 실제로 행렬값은 0값이다.

크기가 84×24인 경우 2016×2016행렬, 84×23의 경우에는 1932×1932정도의 행렬이 나오므로, 행렬식의 계산에 많은 시간이 소요된다. 우선 해당 행렬의 행렬식을 계산하기 전에 앞에서 소개한 타일링을 이용하여 84×24 주변의 행렬들에 대한 정보를 확인할 수 있다.. 우선 84×24의 경우에는 <그림 7>에서 보듯이 행렬식이 0이고, 84×23의 경우에는 행렬식이 0이 아닌 값을 가져야 한다.

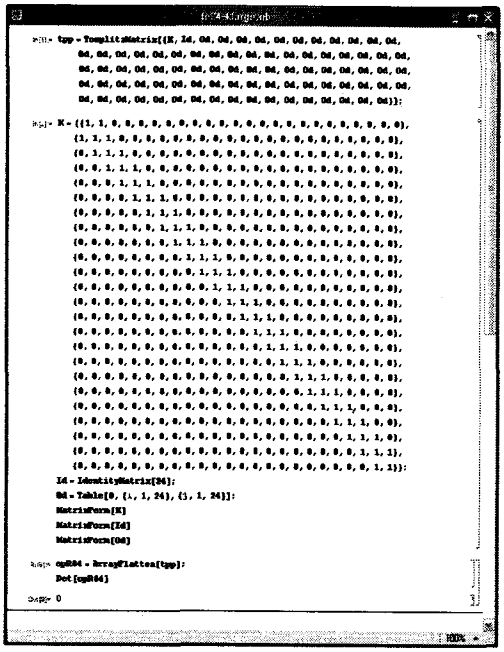


<그림 7> 84×24 주변의 행렬식 분포도

이제 앞에서 세운 가설이 맞는지 직접 84×24, 84×23경우에 대하여 생성되는 행렬들의 행렬식을 직접 *Mathematica*를 이용하여 구해보자.

예제 1.5 84×24 흑백문제는 해를 가질 것인가?

증명 : 위의 타일링을 이용하여 판단할 때 <그림 7>에 나온 것처럼 2 타입이므로 실제로 행렬식은 0이 나올 것이다. 이를 확인하기 위해 실제로 *Mathematica*로 계산해 보면 실제로도 0이 나오는 것을 알 수 있다.



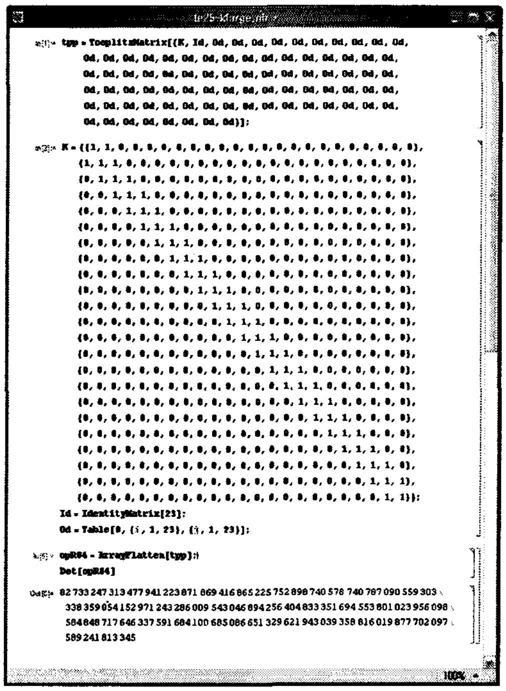
<그림 8> 84×24 경우에 대한 행렬식 계산

예제 1.6 84×23 흑백문제는 해를 가질 것인가?

증명 : 위의 타일링을 이용하여 판단할 때 <그림 7>에 나온 것처럼 1타입이므로, 행렬식이 0이 아닌 값이 존재한다. 이를 *Mathematica*로 확인한 행렬식 값은

827332473134779412238718694168652257528987405787407870905593033383590541529712432860095430468942564048333516945538010239560985848487176463375916841006850866513296219430393588160198777020975892418133345

이다. 즉 0이 아니므로, 이 경우의 흑백문제는 해결할 수 있다.



<그림 9> 84×23 경우에 대한 행렬식 계산

이런 방법으로 우리는 굉장히 복잡한 큰 크기의 일반적인 흑백문제에 대한 해를 구할 수 있는지, 없는지를 앞에서 소개한 타일링을 통하여 행렬식의 값을 추론하여 구할 수 있다.

3. Java Applet Simulation

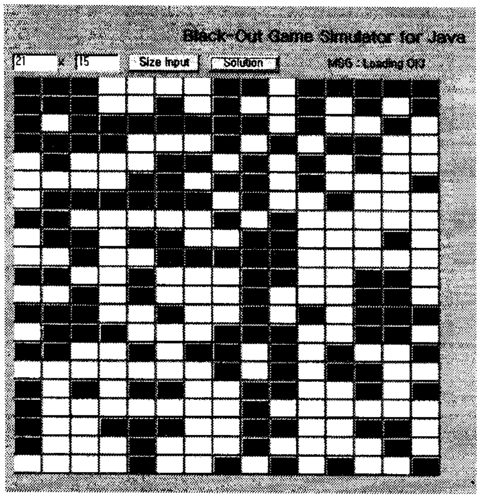
본 원고에서는 위의 내용에 대한 증명을 특수행렬에 대한 전문지식을 이용하는 증명대신 공학적 도구를 이용한 실제 계산을 통한 패턴의 생성과 타일링을 얻어 대학수준에서의 이용에 대한 교육 목적을 극대화하며 시각적 이해가 가능하도록 디자인 하였다. 동시에 해가 존재하는 문제의 경우에 대한 선형대수학적인 모델링과 수학적 해법을 제공하였다. 이에 보태어 본 논문은 해가 유일하게 존재하는 크기의 문제에 대하여 아래와 같이 해를 제공하는 프로그램을 개발하여 소개한다. 개발된 도구는 실제 매우 큰 크기의 문제에 대한 답도 제공하도록 일반적인 알고리즘을 적용하였다. 한 예로 21×15 크기의 문제 경우, 수학적 모델링을 거쳐 대응하는 행렬을 만들면 그 행렬식이 영이 아니므로, 주어진 문제의 해는 반드시 존재 한다. 아래는 $m \times n$크기의 흑백게임을 해결하여 답을 제공하는 기능을 수행하도록 개발된 새로운 Java Applet이다.

이 Applet은 현재 본 연구팀의 홈페이지인

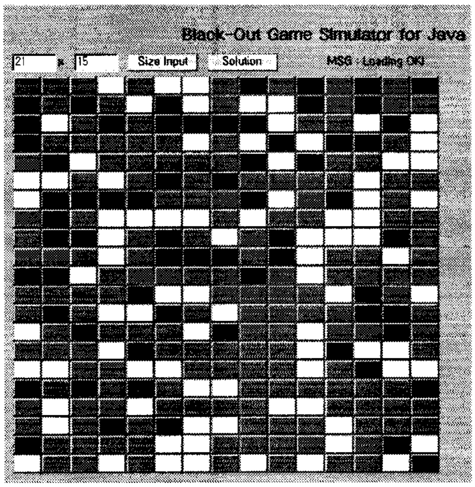
http://matrix.skku.ac.kr/bljava/Test.html

에서 바로 확인할 수 있다.

국내외에서 모두 이용이 가능하도록 영문으로 만든 이 공학적 행렬계산도구는 우선 해를 갖는 원하는 임의의 문제 크기인 $m \times n$을 입력하고, "Size Input" 버튼을 누르면 $m \times n$ 크기의 흑백게임을 제공한다. 그 뒤에 "Solution"을 클릭하면 흑색(또는 백색)으로 채울 수 있는 클릭해야할 해를 녹색(흑백으로 보면 회색) 칸으로 보여준다. 이 녹색버튼만 클릭하면 이 판 전체를 검은 색으로 (또는 흰색으로) 덮을 수 있다.[8)]



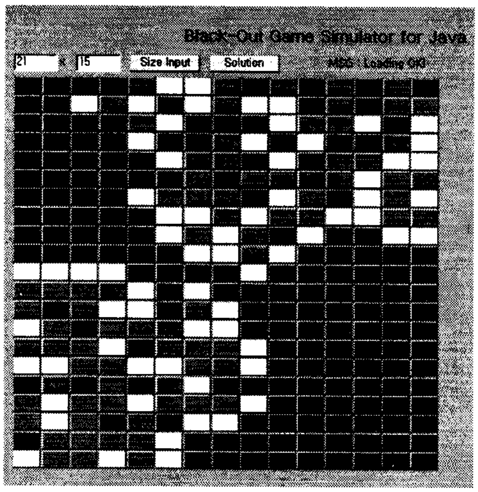
<그림 10> 실험용 Applet의 초기상태



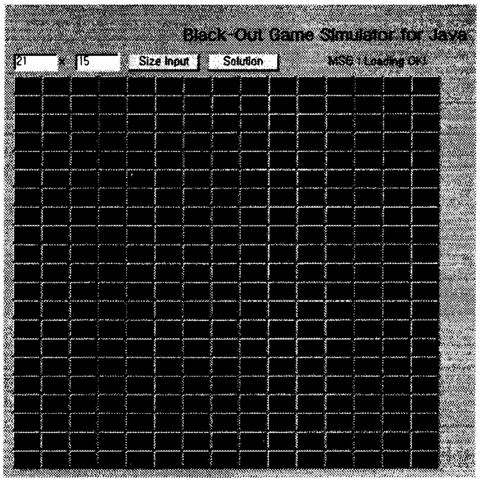
<그림 11> 21×15의 해법

---

8) 참고로 만일 클릭 중 실수로 해인 녹색 버튼 이외의 다른 버튼을 누르면, 초기 조건이 달라지므로, 녹색버튼이 모두 사라진다. 그러면 해를 다시 구해야 한다.



<그림 12> 해결하는 과정



<해결 완료>

이 일반적인 흑백게임의 일반해를 구하는 문제의 해결하는 과정과 프로그램을 개발하는 고정에서 고려된 몇 가지 사항은 다음과 같다.

1) 연립방적식의 해를 구한 후 분수화된 해에 대하여는 분자의 성분만 잉여류 2(Mod 2)로 계산하여 1은 클릭하고(녹색), 0은 클릭을 하지 않으면 된다. [9]
2) 모든 요소가 1인 행렬 J에서 초기조건을 뺀 $J-B$를 해로 계산할 경우, 모든 칸을 흰색으로 덮을 수 있게 된다. 이를 위하여 웹에 제공된 새 자바애플릿(Java Applet)도구에는 "WhiteSolution"이라는 버튼이 존재하여 이를 이용하여 모두를 흰색으로 만드는 문제에 대한 답도 제공하도록 하였다.

4. 해의 존재성에 대한 일반 이론

이미 우리는 패턴을 통하여 해가 유일하게 존재하는 문제의 크기와 그렇지 않은 문제의 경우가 앞 절 <그림 5>와 <그림 7>에서 분류하였다. 그림에서 복잡해 보이는 그러나 일정한 규칙을 가지고 있는 패턴을 완전히 분류하는 일반적인 해법은 블록삼중대각행렬(block tridiagonal matrix)인 행렬

$$A=\begin{bmatrix} K & I & \cdots & O \\ I & K & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & I \\ O & \cdots & I & K \end{bmatrix}$$

9) 즉 분수화된 결과에 대하여도 동일하게 문제를 해결할 수 있다.

에 대한 일반적인 행렬식에 대한 연구를 통하여 얻어진다. 이 부분은 순수선형대수학의 문제이다. 좀 더 설명을 보태면 행렬 A는 m개의 $n \times n$크기의 삼중대각행렬

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \; 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \; 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_n(R)$$

행렬들과 $n \times n$크기의 항등행렬들로 구성되어 있다. 즉, 위의 n값은 행렬 K의 행렬식을 결정하며, m은 행렬 K의 행렬식을 이용하여 행렬 A의 행렬식을 결정한다. 이러한 계산은 Schur Complement를 이용하여 계산할 수 있다. (Zhang,2005) 또한 삼중대각행렬 K의 행렬식은 (Cahill, Narayan, 2004)에 다음과 같이 소개되어 있다.

정리 1.7 $K_{(t)}$을 K행렬의 $t \times t$-크기의 주대각소부분행렬(principal minor submatrix)이라 하자. 그러면 $\det(K_{(t)})$은 다음과 같이 표현된다.

$\det(K_{(1)}) = 1$

$\det(K_{(2)}) = 1 - 1 = 0$

...

$\det(K_{(t)}) = \det(K_{(t-1)}) - \det(K_{(t-2)})$

$(t \geq 3)$

위의 정리는 간단하게 여인자전개(cofactor expansion)를 이용하여 보일 수 있다. 이 정리를 이용하여 행렬 K의 행렬식을 구하면 다음과 같다.

t	det(K)	t	det(K)	t	det(K)
1	1	10	-1	19	1
2	0	11	0	20	0
3	-1	12	1	21	-1
4	-1	13	1	22	-1
5	0	14	0	23	0
6	1	15	-1	24	1
7	1	16	-1	25	1
8	0	17	0	26	0
9	-1	18	1	27	-1

t	det(K)	t	det(K)	t	det(K)
28	-1	37	1	46	-1
29	0	38	0	47	0
30	1	39	-1	48	1
31	1	40	-1	49	1
32	0	41	0	50	0
33	-1	42	1	51	-1
34	-1	43	1	52	-1
35	0	44	0	53	0
36	1	45	-1	54	1

이러한 결과를 행렬 A에 적용할 경우, Schur Complement등의 방법을 이용한다면 행렬 A에 대한 주어진 m과 n에 대한 일반이론으로 발전할 수 있을 것이다. 이 문제의 일반이론은 특수행렬이론의 연구에 중요한 의미가 있다.

III. 결 론

복잡해 보이는 게임도 수학적 문제 해결과 마찬가지로 게임의 기본 구성 원리를 찾아낸다면 문제 해결의 실마리가 보인다는 사실을 알고 있다(박현수, 1999; Lewis Stiller, 1996; Alan Tucker, 1998).

위의 일반적인 흑백 게임의 경우 바둑알을 클릭 한다는 기본 조작(Operation)에 관련된 행렬을 찾아서, 선형대수학적 모델링을 거치면서, 이 행렬들이 실제로 블록삼중대각행렬을 이루고, 그 블록행렬의 형태와, 블록행렬의 개수가 모두 원래의 흑백게임의 크기인 $m \times n$에 의하여 완전하게 결정된다는 사실을 알 수 있었다.

우리는 이러한 방법을 통하여 최적의 승리 전략을 구하는 알고리즘을 찾고 이 알고리즘을 증명하기 위해 1차 연립방정식의 해법이라는 기본적인 선형대수학의 지식만을 이용했다. 우리는 여기에서 더 나아가, 일반적인 크기의 블록삼중대각행렬의 가역조건에 대한 패턴을 찾아 이를 이용하여 타일링 기법을 이용하여 가설을 만들고 확인하였으며, 수학적 해법을 분석하였다. 또한 우리가 직접 문제를 생성하여, 해를 만들어 보여주는 실습 Java도구를 통하여 제작해보고, 그 결과를 직접 시각적으로 확인하였다.

본 연구는 주위에서 찾을 수 있는 다양한 문제로부터 구체적인 일반 문제를 만들어 냈으며, 이 일반적인 문제에 대한 수학적 모델링을 통하여 원래 문제에 대한 완전한 해법을 제시하였다. 더 나아가 실제 생활에서 찾을 수 있는 많은 수학적 모델에 대한 엄밀한 수학적 증명과 연관 지식의 융합을 통해 새로운 도구를 개발하는 모델로써 수학의 응용 및 활용을 할 수 있게 해 준다. 나아가 바둑알 뒤집기라는 간단하지만 흥미있는 게임에 선형대수학의 지식을 적용할 수 있었으며, 보다 일반적인 해법으로 연구하여, 이를 통하여 더욱 많은 수학적 지식에 대한 활용과, 이를 통한 수학적 모델링이 실생활에서 어떻게 활용되는지 확인할 수 있었다.

참 고 문 헌

박현수 (1994). 바둑에서 휴리스틱 함수를 사용한 사활문제 풀이에 관한 연구, 경북대전자기술연구지 **15(2)** pp.35-43, 대구: 경북대.

Anderson M. and Feil T. (1998). *Turning lights out with linear algebra, Mathematics Magazine,* **71(4)**, pp.300-303

Cahill, N. D. (2004). D. A. Narayan, Fibonacci and Lucas Numbers as Tridiagonal Matrix determinants, *Fibonacci Quart* **42(3)**, pp.216-221

Fiedler, M. (2005). Inversion of e-simple block matrices, *Linear algebra and its applications* **400** pp.231-241

Lee, S. -G.; Park, J. -B.; Yang, J. -M. & Kim, Ik-Pyo (2004). Linear algebra algorithm for the optimal solution in the Blackout game, *Journal of Korean Soc. Math. Ed. Ser. A : The Mathematical Education*, Feb. **43(1)**, pp.87-96

Lee, S. -G. & Yang, J. -M. (2006). Linear Algebraic approach on real sigma-game, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, May **21(1-2)**, pp.295-305

Petersen, K. B. & Pedersen, M. S. (2007). *The Matrix Cookbook,* http://matrixcookbook.com September 5

Sogabe, T. (2007). On a two-term recurrence for the determinant of a general matrix, *Applied Mathematics and Computation* **187**, pp.785-788

Stiller, L. (1996). Multilinear Algebra and Chess Endgames, *Games of No Chance* **29**, pp.151-192. Berkeley: MSRI Publications

Tuckur, A. (1988). *A Unified introduction to linear algebra: Models, methods and Theory*, New York: Macmillan Pub. Inc.

Zhang, F. (2006). The Schur Complement and Its Applications, Springer Science+Business Media, Inc., ISBN : 978-0-387-24271-2, 4-5

CJ entertainment Inc. (2002). JAVA 프로그램, 영화 뷰티풀 마인드 흑백(Blackout)게임, http://www.cjent.co.kr/beautifulmind/

Analysis of optimal solutions and its tiling in $m \times n$ size Black-Out Game

Duk-Sun Kim
Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, Suwon, 440-746, Korea
E-mail: mass@skku.edu

Sang-Gu Lee
Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, Suwon, 440-746, Korea
E-mail: sglee@skku.edu

For finding the optimal strategy in Blackout game which was introduced in the homepage of popular movie "Beautiful mind", we have developed and generalized a mathematical proof and an algorithm with a couple of softwares. It did require only the concept of basis and knowledge of basic linear algebra. Mathematical modeling and analysis were given for the square matrix case in (Lee,2004) and we now generalize it to a generalized $m \times n$ Blackout game. New proof and algorithm will be given with a visualization.

This work is supported by BK21 and KRF Project : 2006-0869-000
* ZDM Classification : 97A90
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97-04
* Key Words: : Blackout Puzzle, Linear Algebra, Java Tool, Algorithm, Mod 2 Arithmetic, Merlin Game