韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2007. 11. 제 46권, 제 4호, 423-443

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
November. 2007, Vol. 46, No. 4, 423-443

수학수업에서의 담론을 통한 수학적 개념 형성에 관한 연구

고 상 숙 (단국대학교)
강 현 희 (단국대학교 대학원)

I. 서 론

1. 연구의 필요성과 목적

제 7차 교육과정에서는 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 탐구하고 예측하며 논리적으로 추론하는 능력, 수학을 사용하여 정보를 처리하고 교환하는 의사소통능력, 창의력, 수학적으로 사고하는 성향, 자신감 등의 수학적 힘의 신장을 강조하고 있다. 이에 따라 학생들에게 사회적 정보를 분석하고 앞으로의 변화를 예측하고 대응할 수 있는 사회적 지식과 힘을 길러주기 위해서는 수학교육도 변하여야 하며, 단편적인 지식 습득을 위한 교사 중심의 획일적인 학습지도 방식으로부터 개인의 독창성과 협동 능력을 발휘할 수 있게 하는 새로운 학습 지도 방법으로 전환해야 한다(강옥기, 2000)는 목소리가 높다.

이런 수학교육 개선을 위해 학교 현장에서는 지식 전수와 같은 전통적 수학 교수-학습에서 벗어나 학생 스스로 지식을 구성할 수 있는 학습 환경을 모색하는 다양한 접근이 필요하다. 이러한 접근의 하나로써 본고에서는 수학교실에서 이루어지는 수학적 개념, 원리에 관한 교사와 학생, 학생과 학생의 언어적 상호작용인 담론에 초점을 둔다. 그리고 수학교육 개선을 목적으로 하는 노력들은 교사의 역할을 학생의 학습을 지지하는 촉진자로 특징짓고, 교사는 교실에서의 수학 활동과 학생들의 수학 활동의 발달을 안내하도록 격려된다. 이러한 안내는 교사가 학생들의 활동과 설명에 의한, 수학 학습을 위한 기회를 활용하려고 시도하면서 활동에 대한 교사의 자각을 요구하며, 이는 교실 담론의 조정, 생산적 수학 담론에의 참여, 그리고 적당하다고 판단되는 방향과 안내 제공에 대한 책임감과 함께 온다(McClain & Cobb, 2001).

수학수업에서 학생들이 적극적으로 참여할 수 있는 생산적인 담론을 만들기 위해서는 먼저, 개방된 교실 분위기의 조성과 학생의 설명이나 활동에 대한 교사의 민감성이 요구된다. 그러나 몇몇 연구들은 교사가 개선을 실행하려고 할 때 직면하는 딜레마를 묘사하였는데, 예를 들면, 교사들이 학생들의 아이디어를 위해 교실을 개방할 때, 교수가 의도하는 수학적 방향을 관리하는 것이 더욱 어렵다는 것을 알게 되거나 또는 학생들이 수학적으로 틀린 주장을 하고 있다는 것을 알게 된다(Silver & Smith, 1996). 또한 교사들은 수업이 어디로 나아갈 지를 예견하는 것이 매우 어렵고 따라서 교수활동에서 자신들의 역할을 위해 준비하고 참여하는 것이 더욱 어렵다고 한다(M. S. Smith, 2000; Hufferd-Ackles, Fuson, & Sherin, 2004에서 재인용). 따라서 학생들이 적극적으로 참여하고 교사가 이를 지지하는 생산적인 담론의 발달은 수학 교육개선에 있어서 중요한 요소임에도 불구하고, 교사들은 수업의 변화를 추구할 때 따르는 어려움으로 인해 망설이게 된다. 그러나 이런 어려움 속에서도 수학 교수-학습 방법의 개선을 위하여 많은 문제점을 극복할 수 있고 또 극복하기 위해 노력해야 하는 주체는 여전히 수학교실의 교사다.

본 연구는 수학수업에서의 담론을 통하여 자신의 교수-학습 방법을 개선하고자, 교사와 학생, 학생과 학생의 상호작용을 활발하게 하며, 다양한 의사소통 방법으로 학생들의 수학적 이해를 돕고자 하는 적극적인 한 교사의 수업에 근거한다. 따라서 본 연구에서는 수학수업에서 학생들의 스스로의 문제해결과정에 대해 설명하기, 다른 사람의 설명에 대해 질문하기, 그리고 자신의 수학

* 본 연구는 2006년도 단국대학교 대학연구비 지원으로 연구되었음.
* 2007년 10월 투고, 2007년 11월 심사 완료
* ZDM 분류 : C53
* MSC2000 분류 : 97C60
* 주제어 : 수학적 의사소통, 수학적 개념, 담론: 설명-질문-정당화, 상호작용, 교사의 역할.

적 사고를 정당화하기 등이 권장되는 교실환경에서 교사와 학생, 학생과 학생의 수학적 개념에 관한 담론을 관찰하여 학생들의 수학적 개념형성 과정을 이해하고, 학생의 수학적 개념형성을 돕는 담론의 특징을 알아보고자 한다. 그 결과 수학수업에서 중요한 역할을 하는 담론의 특징을 구체적으로 규명해봄으로써, 교사 자신의 수업 개선을 모색할 수 있을 뿐만 아니라 수학수업에서의 담론을 통한 의사소통을 활성화할 수 있는 교실환경에 대해 앞으로의 나아가야할 방향을 제시할 수 있을 것으로 사료된다.

2. 연구 문제

본 연구의 목적을 위하여 다음과 같은 연구문제를 정하였다.

가. 수학적 개념에 대한 설명, 질문, 그리고 수학적 사고의 정당화를 통한 수학수업의 담론에서 학생들은 수학적 개념을 어떻게 구성하는가?

나. 수학수업의 담론 과정에서 학생의 수학적 개념 형성을 촉진하는 담론의 수준은 어떻게 나타나는가?

Ⅱ. 이론적 배경

앞에서 제시된 연구문제는 수학수업 중의 교사와 학생, 학생과 학생 간의 수학적 의사소통, 특히 교실 담론을 통한 학생들의 수학적 개념 발달에 초점을 두고 있다. 따라서 본 장에서는 연구문제의 근거가 되는 Vygotsky의 교육이론, 설명, 질문, 정당화에 초점을 둔 교실 담론의 요소, 교실 담론의 참여자간의 수학적 의사소통의 유형을 분석하기 위한 근거로서 상호작용론, 그리고 수학적 의사소통을 위해 활발한 담론을 이끌어내야 하는 교사의 역할에 대해 살펴보기로 한다.

1. Vygotsky의 교수-학습 이론

Vygotsky(1979)에 의하면 언어는 두 가지 기능을 가지는데, 첫 번째는 사회적 상호교환으로서, 어떤 아이디어를 의사소통하기 위해 언어를 사용하는 경우이고, 두 번째는 일반화한 사고로서, 언어를 사고의 도구로 사용하는 경우이다. 이 같은 두 가지 기능은 사용된 단어에 의미를 부여하는 과정에 기여하기 때문에 교실에서 매우 중요하다(David & Lopes, 2002에서 재인용).

또한 Vygotsky는 학습자의 인지발달을 생물학적 존재로서 개인내적인(intra-mental) 상호작용에 기초를 두고 있는 Piaget의 입장과 달리, 사회적인 존재로서 개인간적인(inter-mental) 상호작용에 기원을 두며(강이철 · 정성희, 2005), 문제를 해결하는데 도움을 주고 행동을 수행할 수 있는 방편인 도구를 물리적인 도구(tool)와 심리적 도구인 신호(기호, sign)로 구분하고, 이러한 도구의 큰 특징으로 인간과 환경 사이의 상호작용을 중재하는 기능을 들었으며, 문화적으로 산출된 신호 체계의 내면화, 즉 외적 조작의 내적 재구성이 행동적 전환들을 야기하고 개인발달의 초기 형태와 후기 형태들 간에 다리를 놓는다고 믿었다(Vygotsky, 1978). 한편, 강이철(2004)은 이러한 중재 전략에 관한 Wood, Sigel, Gallimore & Goldenberg 등 7개의 선행연구를 비계설정 유형에 따라 분석하고 현장의 교사가 교실 현장에서 학습자의 수준에 따라, 수업의 사상에 따라 실천적 접근을 수행할 것을 제안하고 있다.

Vygotsky(1962)는 새로운 개념을 구성하는 사고의 과정을 실험적 연구와 실제 개념의 발달인 비-실험적 방법으로 나누어 연구하였다. 그는 개념형성은 모든 근본적인 지적 기능이 관여하는 복잡한 행위의 산물로서, 이 과정을 연합, 주의집중, 심상, 추론, 또는 결정 경향으로 분해할 수 없는 것이라고 하였으며, 개념형성의 단계를 크게 세 가지 단계로 구분하였는데, 첫 번째 단계를 문제를 해결하기 위해 사물들을 체계화되지 않은 묶음이나 덩어리로 만드는 *비체계화된* 범주(unorganized categories)의 단계라 하고, 아동에게 임의적 단어의 의미를 부여하는 혼합적 덩어리가 형성되는 이 단계는 사고의 발달에서 시행착오단계(trial-and-error stage)로 나타난다고 하였다.

그 다음은 아동의 경험의 증가에 따른 구체적이며 사실적인 관계들을 형성해가는 복합체적 사고(thinking in complex)의 단계라 하였다. 이 단계는 정교화 수준에 따라 다섯 단계로 나누어지는데, 먼저, 여러 가지 사물을 복합체의 핵심을 이루는 것과 연계하는 형태로 새로운 사물을 추가하는 연합적 유형(associative type), 두 번째

는 사물들을 매우 유사한 방식으로 집단화하도록 만드는 구체적 인상으로 구성되는 수집(*collection*) 유형, 세 번째는 개별적인 연계들을 역동적이며 연속적으로 하나의 연쇄로 결합시키는 연쇄 복합(*chain complex*) 유형, 사물이 무엇인가 공통적인 게 있을 것이라는 애매한 인상을 갖게 되며 요소들을 하나로 결합시키는 속성의 유동성을 특징으로 갖는 확산 복합(diffuse complex) 유형, 그리고 다섯 번째는 마음속에서 형성된 일반화가 표면상으로는 개념을 닮았지만 본질적으로 아직 복합체인 의사개념(pseudo-concept) 유형인데, 이는 복합체로의 사고와 개념으로의 사고간의 연계로 작용한다. 이러한 복합체적 사고는 경험의 개별적 요소들을 집단으로 단일화하고 체계화함으로써 일반화의 기초를 생성한다.

세 번째 단계인 진정한 개념(true concept) 형성은 연합의 상호작용을 통해서가 아니라 모든 기초적 심리 기능이 특정한 결합에 참여하는 지적 과정을 통해서 형성된다고 하였다. 진정한 개념을 형성하기 위해서는 요소들을 추출해내고, 추출된 요소들을 그 요소들이 포함되어 있는 전체와 분리시켜 보는 능력이 필요하다. 즉, 진정한 개념을 형성하기 위해서 종합은 분석과 결합되어야 한다. 고호경(2002)은 그래핑 계산기를 활용한 의사소통 환경에서 학생들의 수학적 개념 발달 과정은 처음엔 일상 개념에 머물러 있는 모호한 혼합적 응집체로 시작하여 복합적 사고의 단계들을 거쳐 진정한 개념에 이르는 특징들을 파악할 수 있었다고 한다.

또한, Vygotsky(1978)는 학습 가능성에 대한 발달적 과정의 실제적 관계를 발견하고자 하면 이미 이전에 발달된 수준만을 결정하는 것을 넘어서서 앞으로 발달할 수 있는 수준을 측정해야 하며, 그러기 위해서 이미 완성된(completed) 어떤 발달적 주기의 결과로써 수립된 정신기능의 발달수준으로 실제적 발달 수준(actual developmental level)과 성인이나 좀 더 능력 있는 또래들과 협동하여 문제를 해결함으로써 결정되는 잠재적 발달 수준(level of potential development)을 제안하고, 두 발달 수준간의 거리를 근접발달영역(ZPD)이라 정의하였다. 그리고 그는 학습의 기본적 형태는 근접발달영역을 창출하는 것, 즉 학습은 다양한 내적 발달과정들을 일깨운다는 것이고 이 내적 발달과정들은 아동이 자신의 환경 속에서 동료들과 협동해서 상호작용을 할 때만 진행될 수 있으며, 이 과정이 내면화되면 이것들은 아동의 독자적 발달 성취의 부분이 되며, 적절하게 조직화된 학습은 정신발달을 가져오고 학습과 분리할 수 없는 다양한 발달적 과정들로 나아가므로, 학습을 문화적으로 조직된 특히 인간에 있어서 심리적 기능을 발달시키는 과정의 필수적이고 보편적인 측면으로 보았다.

Vygotsky는 아동의 근접발달영역 내에서 이루어지는 성인이나 유능한 또래의 신호의 매개, 특히 언어를 통한 가르침과 그에 수반되는 상호작용이 아동의 인지발달을 가져오는데 매우 중요하다고 보았으며, 아동의 능력이나 발달 상태는 성인이나 유능한 또래와의 공동 활동을 통해 가장 잘 드러난다고 보았다(한순미, 1999). 즉, 독립적인 개인보다 인식의 주체가 포함되어 있는 사회적인 맥락을 강조하고, 모든 지식은 공동체의 역사를 통해 누적된 문화의 형태로 존재하는 사회적 산물이며, 아동들은 상호작용적인 활동을 통하여 지식을 구성하게 된다는 것이다.

2. 교실 담론의 요소

NCTM(1989)에서 모든 학생들은 수학적 아이디어를 듣고, 읽고, 쓰고, 말하고, 숙고하고, 논증하는 것에 대해 확장된 경험을 해야 하며, 개인별 또는 소집단 탐구를 통한 학생들의 활동적인 참여는 토론하고, 질문하고, 듣고, 요약하는 다양한 기회를 제공해야 한다고 주장된 이래, 수학에 대해 좀 더 깊은 개념적 이해를 강조하는 수업을 위해서 수학적 의사소통이 강조되고 있다.

또한, 학생들은 의사소통을 통해 그들의 수학적 사고를 조직하고 견고히 할 수 있어야 하며, 학생들은 자신의 동료, 교사, 그 밖의 사람들과 논리적이고 명확하게 자신의 수학적 사고를 의사소통할 수 있어야 하며, 다른 사람들의 수학적 사고와 전략들을 분석하고 평가할 수 있어야 하며, 수학적 아이디어들을 정확하게 표현하기 위하여 수학 언어들을 사용할 줄 알아야 한다(NCTM, 2000). 따라서 수학수업에서 교사는 학생들로 하여금 자신의 생각을 충분히 표현할 기회를 제공해야 하며, 그들의 설명과 그들만의 언어의 가치를 인정할 필요가 있다.

수학의 지식은 특별한 개념과 절차가 깊이 스며있는 폭 넓은 상황의 수학적 담론(discourse)을 포함하는데,

수학에서의 담론은 패턴을 검증하기, 추상화하기, 일반화하기, 수학적 논증을 확증하기, 정의, 예, 반례의 역할 및 가정, 증거, 증명의 이용을 포함하며, 수학적 질문, 추측을 형성하는 것, 명제를 구성하고 평가하는 것, 연결 짓는 것, 수학적 아이디어를 교환하는 것 등은 수학적 담론의 중요한 측면이다(NCTM, 1991). Frid(1993)에 의하면, 수학 학습자들이 수학적으로 의사소통하고 수학 문제를 풀 수 있으려면, 수학적 언어가 그들에게 유의미해야 하며, 교사는 언어와 아이디어에 관한 학생들의 해석의 가치를 자신과 학생 모두에게 인정할 필요가 있고, 학생들이 자신들의 생각을 설명할 때 그들의 언어의 가치는 인정받고 격려 받아야 한다고 제안하였다. 이것은 수학 교수-학습 현장인 교실이 일상적으로 수학적 아이디어를 말하고, 쓰고, 토론할 수 있으며, 탐구할 수 있는 담론의 장소가 되어야 한다는 점을 시사한다.

한편, Hufferd-Ackles, Fuson과 Sherin(2004)은 라틴계 학생들로 구성된 초등학교 교실에서 한 교사에 관한 오랜 사례연구를 통하여, 학생들이 의미 있는 수학 담론에 참여함으로써 다른 학생의 수학 학습을 지지하는 수학-대화 학습 공동체(math-talk learning community)의 구성요소로 (a) 질문하기: 질문자로서의 교사로부터 질문자로서의 학생들과 교사로의 도약, (b) 수학적 사고 설명하기: 학생들은 점점 더 많이 자신들의 수학적 사고를 설명하고 분명히 말한다, (c) 수학적 사고의 근원, 자료: 모든 수학적 아이디어의 근원으로서의 교사로부터 수업 방향에 영향을 주는 학생들의 아이디어로의 도약, 그리고 (d) 학습에 대한 책임감: 다른 학생들과 자신의 학습과 평가에 대해 점점 더 많이 증가되는 학생들의 책임감을 제안하고, 각 구성요소의 발달 정도에 따라 수학-대화 학습 공동체의 발달 수준을 4 단계로 구분하였다: 수준 0은 학생들로부터 간략한 해답을 갖는 전통적인 교사에 의해 통제된 교실; 수준 1은 학생의 수학적 사고를 추구하기 시작하는 교사. 교사는 수학-대화 공동체에서 중심적 역할을 한다; 수준 2는 학생들이 새로운 역할을 구성하도록 모형화하고 돕는 교사. 어느 정도의 상호교수(co-teaching)와 상호학습(co-learning)은 학생 대 학생 대화가 증가하면서 시작된다. 교사는 물리적으로 교실의 옆이나 뒤로 움직이기 시작한다; 수준 3은 동료 교사이자 동료 학습자로서의 교사. 교사는 일어나는 모든 것을 조정하고(monitor), 여전히 완전히 참여한다. 교사는 지원할 준비가 되어있으나, 지금은 보다 주변적이고 조정하는 역할을 한다(지도하고 지원한다). 이러한 수학-대화 학습 공동체의 구성요소와 발달 수준에 관한 틀이 그러한 공동체를 구성하기 위해 노력하는 교사들로 하여금 학생들에게 귀 기울이고, 학생들의 아이디어를 밖으로 그려내고, 그리고 학생들이 서로 듣도록 지원을 제공한다고 주장하였다.

또한 본 연구문제에서의 '정당화(Justify)'란 수학적 논리를 따르는 형식적 증명뿐 아니라 학생들의 지각이나 경험에 의한 발견 및 몇 개의 예를 통한 검증, 수학적인 내용을 포함하지 않는 설명, 교사나 교과서의 권위에 의해 심적으로 수학 명제가 참임을 확신하고 이로써 다른 사람을 설득할 때 사용하는 방법 등을 모두 포함한다. Simon과 Blume(1996)은 구성주의에 입각한 교수실험으로 운영된 한 학급에서 수학적 정당화에 관한 교실 규범이 어떻게 형성되었는지 분석하는 과정에서 학생들의 정당화의 수준을 4개의 수준으로 범주화하였다: 수준 0은 정당성을 도입하지 않고 단순히 동기를 확인하려는 반응; 수준 1은 외부의 권위에 호소; 수준 2는 경험적인 설명; 수준 3은 특정한 예에 의해서 표현하는 연역적 정당화, 또는 포괄적인 예; 그리고 수준 4는 특정한 예와는 독립적인 연역적 정당화(조경희, 2004에서 재인용).

3. 수학 수업에서의 상호작용론

상호작용론은 한 사람의 사고와 행동은 다른 사람의 사고 및 행동과 불가분하게 얽혀있다는 데서 출발한다. 이종희 · 김선희(2002)는 상호작용적 접근에 따르면, 언어는 단순한 의사소통의 도구도 독립적인 요소도 아니고, 실제로 인간은 말을 하는 것이 아니라 언어화(languaging)하고 있는 것이다. 언어의 주요한 기능으로 Piaget는 사고의 표현으로 보았고, Vygotsky는 문화적 전달의 수단으로 파악했지만, 상호작용적 접근에서 언어는 분리된, 독립적인 대상이 아니다. 또한 지식은 교사의 머릿속에 있는 것이 아니라, 교실, 학교 제도, 나아가 사회의 문화에서 공유된 담론의 실행으로부터 등장한다고 보고 인식론적 가정은 가치 있는 수학을 배울 수 있는 교실 문화를 만드는 것이라고 보았다.

지금까지의 상호작용적 접근의 연구는 몇 가지 수업 상호작용 패턴을 확인하였는데, 다음과 같다. 교사가 의도한 답을 학생이 답할 수 있도록 질문의 범위를 좁혀 문제를 여러 개의 하위 문제로 나누어 교사가 학생에게 질문하는 깔때기 패턴(Funnel Pattern)[1], 학생들이 대화에 동등하게 참여함으로써 학습하는 상황을 만들어 학생들이 과제에 집중하고 참여하여 해결할 수 있도록 교사가 격려하는 집중 패턴(Focusing Pattern), 그리고 교사가 학생들에게 질문을 시작하고, 학생은 답하고, 그 대답을 교사가 평가하는 전통적인 상술 패턴(Initiation-Response-Evaluation)[2]이다. 그 후에, IRE 패턴은 ERE 패턴[3]으로 칭하였고, 초기에 ERE 패턴이 나타나고 후에 수학적 아이디어가 공유되면, 학생들이 서로 토론하며 상호작용하는 상황인 PD 패턴[4]이 나타나는 것이 반복되는 순환적 패턴(Cyclic Pattern) 등이 연구되었다(나미영, 2006).

4. 교사의 역할

교실 담론을 효과적으로 지원하기 위해서, 교사들은 학생들이 자신의 아이디어를 자유롭게 말할 수 있는 공동체를 만들어야 한다(NCTM, 2000). 교실 담론은 교사와 학생, 학생과 학생간의 상호작용이므로, 이들 모두가 주체인 공동체를 의미한다.

von Glasersfeld에 의하면, 교사는 학생의 마음속에 진행되는 것에도 관심을 가져야 한다. 교사는 학생의 말에 귀 기울여야 하고, 학생이 수행하고 말하는 것을 해석해야 하며, 학생의 개념적 구조에 대한 모형을 수립하려고 노력해야 한다. 물론 여기에는 오류가 있을 수 있는 과업이다. 그러나 그렇지 않고서는 학생의 개념적 구조를 바꾸려는 어떤 시도도 작위적인 시도에 불과하다. 학생의 사고에 대한 유용한 모형을 수립하기 위해서는 문제해결 상황에서 학생이 수행하고 말하는 것은 무엇이든지 그 순간에 있어서 학생에게 의미 있는 것이라고 생각하는 것이 중요하다. 이것이 교사에게는 무의미할 수도 있지만, 학생이 어떻게 정답에 도달했는지 교사가 설명이나 가정할 수 없다면 그 학생의 개념적 구조를 수정할 가능성은 희박하다고 하였다(Steffe & Gale, 1995).

수학 교실 개선을 위한 교사의 역할은 그럴만한 가치가 있는 문제의 제기와 수학적 과제에의 참여, 담론을 포함한 교실에서 지적인 활동 관리, 그리고 학생이 수학적 아이디어를 이해하고 자신의 이해를 조정하도록 돕는 것을 포함하기 위해서 다양화되었다. 학생들은 "담론 공동체"에 활동적으로 참여하여 수학을 하는데 참여하도록 기대 받는다. 따라서 수학 교사를 위해 그려지는 새로운 역할은 의사소통에 관한 논의와 밀접하게 관련된 것이다(Silver & Smith, 1996). 의사소통은 학생들에게 자신의 수학적 아이디어를 공식화하고 공유하는데 중요하다. 따라서 학생들은 수학적 아이디어를 접하고 참여할 많은 다양한 기회에 접할 권리가 있으며, 교사는 가능한 한 그런 기회를 제공할 수 있는 교과과정 구성에 대한 책임이 있다(Pimm, 1996). 따라서 교사는 학생들의 수학적 의사소통 능력을 개발하기 위해서 수학적 언어 사용을 모니터해야 한다. 이는 다른 학생의 설명에 동의하는지 물어봄으로써 또는 수학적 아이디어나 실세계 현상에 대한 다양한 표상을 제시하게 함으로써 이루어질 수 있으며, 교사들이 학생들과의 또는 학생들 간의 의사소통을 극대화하기 위해서는 교사가 수업 논의를 주도하는 시간을 최소로 해야 한다(NCTM, 1991).

한편, 최근의 연구들을 살펴보면, 교사는 학습자의 수학적 태도를 갖게 하는 발문, 수학적 방법이나 사고를 떠올리게 하는 발문, 그리고 개념형성에 필요한 수학적 기능을 시사하는 발문의 단계로 제시해야 한다고 제안하였다(이은주, 2002). 또한 공간 시각화 활동을 통한 기하 학습이 전통적인 기하학습보다 의사소통 능력의 향상에 더 효과적이며(김혜정, 2003), 교사와 학생의 상호작용에 대한 이해를 통해서 교사는 교실에서 일어나는 다양한 상호작용 유형을 자각하고 예측하여 맥락에 알맞은 상호작용을 선택하여 수업을 전개할 수 있고(이옥희, 2004), 교사와 학생의 활발한 상호작용을 위해 교사의 다양한 질문법 개발과 필요한 경우에 지연 피드백을 주기 위한 전략의 개발을 제안하였다(이호연, 2006).

위의 논의로부터 의사소통과 담론을 강조하는 수학수업에서 교사의 역할은 학생들로 하여금 자신의 생각을

1) 깔때기 패턴은 Bauersfeld(1988), Voigt(1985)가 제안.
2) IRE 패턴은 Mehan(1979)이 제안.
3) ERE(Elicitaion-Response-Elaboration) 패턴은 Bowers와 Nickerson(2001)이 제안.
4) PD(Proposition-Discussion) 패턴.

편안하게 설명하고 다른 사람의 주장에 대해 질문함으로써 그들의 아이디어의 분석이나 종합을 자극하는 질문이나 과제를 제공하는 촉진자이며, 학생들의 언어 해석 그리고 관련되어 구성된 의미와 대규모의 수학 공동체와의 해석 사이의 연결이라는 의미에서 매개자이다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 방법

정성연구는 연구주제에 대한 해석적, 자연주의적 접근을 수반하며, 초점에 있어서 복합적인 방법을 사용한다. 이는 정성 연구자들이 자연스런 상황에서 사물을 연구하고, 사람들이 그들에게 가져다준 의미에 의해 현상을 이해하거나 해석하려 시도한다는 것을 의미한다(Denzin & Lincoln, 1994). 정성연구의 철학적 가정은 자신의 사회적 세계는 상호작용하는 각 개인에 의해 구성된다는 관점이다(Merriam, 1998). 또한 정성연구를 이용하는 정당성이나 효율성은 제기된 연구문제의 유형에 따라 뒷받침되는데(고호경, 2002), 정성연구의 철학적 가정과 수학수업에서 이루어지는 담론 과정에서의 의사소통을 통하여 학생들이 수학적 개념을 어떻게 구성하는 가에 관심을 가진 본 연구의 문제에 합당하다고 생각되어, 정성연구 방법에 기초하여 수학적 개념 형성을 촉진하는 담론의 특징을 알아보고자 한다.

2. 연구 대상

본 연구의 목적이 수학수업에서의 담론을 통하여 연구자의 교수-학습 방법을 개선하고 학생들의 수학적 이해를 돕는 의사소통 방법을 확인하는 것이므로, 연구 대상은 연구 목적을 고려한 의도적 표본추출 전략 중에서 시간, 비용, 노력을 절약할 수 있는 편의적 표본추출에 의거하여 연구자가 근무하는 S 중학교 1학년 1개 반을 선정하였다. 연구자가 2006년도에 3학년 4개 반과 1학년 1개 반을 담당하였는데, 좀 더 풍부한 수학적 개념을 다룰 수 있는 학년이 3학년임에도 불구하고 연구를 시작한 시기가 2학기였기 때문에 3학년은 10월 말이나 11월 초까지 교과진도가 종료되어야 했으므로, 시간적으로 여유있고 평소 수업시간에 활발하게 질문하고 발표하였던 1학년 1개 반을 연구대상으로 선정하였다. 또한 연구자는 완전한 참여자(Gold, 1958; Merriam, 1998에서 인용)로 연구에 임하였다.

S 중학교는 서울시 중랑구에 위치한 공립중학교로 대부분의 학생들의 거주형태는 아파트이고, 그 중 임대아파트에 거주하는 학생이 한 학급의 30% 정도에 해당되며, 연구를 시행한 2006년 당시에 1학년 11학급, 2학년 12학급, 3학년 13학급으로 전체 36학급 규모이고, 한 학급당 학생 수는 평균 35명이었다. 연구 대상 학급은 학기 초에는 36명이 배정되었으나 4명이 전학을 가서 여학생 14명, 남학생 18명으로 구성되었으며, 그 중에 발달장애를 겪는 남학생이 1명 포함되어 있고, 학기 초에 시행된 진단평가에서 11개 학급 중에서 가장 낮은 점수를 기록하였다. 본 연구는 2006년 2학기에 시작하였는데, 2학기는 1학년 학생들에게 있어서 중학교에 입학하여 낯선 학교 환경, 교과마다 담당이 다른 교과 교사들, 그리고 학급 친구들에게 어느 정도 익숙해진 시기였다.

연구자인 K 교사는 S 중학교에 2년간 근무한 8년차 경력의 여교사로, 20여 년 동안 S 중학교 인근의 거주지역에 주거하여 학생, 학교, 학부모, 지역 사회의 사회·경제적 배경에 대해 익숙한 편이었다. K 교사는 교실에서의 수학수업이 대부분 언어를 매개로 하여 이루어지므로 학생들의 자주적인 수학적 개념 형성을 돕는 교사와 학생, 학생과 학생 사이의 활발한 의사소통으로서의 담론에 특히 관심을 갖고 있었다.

3. 연구 절차

본 연구를 위해서 2006년 10월부터 12월까지 수업 관찰이 진행되었으며, 연구를 시작하면서 K 교사는 학생들에게 자신의 수업방법 개선을 목적으로 수업을 비디오로 녹화하고, 녹화내용은 오로지 교사 자신의 연구를 위해서만 사용하며, 교수-학습 방법에 있어서도 변화가 있을 것이라고 미리 안내하였다. 즉, 학생들은 교과내용에 관한 자신들의 생각을 칠판 앞에 나와서 설명하는 기회를 많이 가질 것이며, 교과내용에 관한 질문을 교사에게 하기보다는 친구들에게 하도록 권장될 것이라고 안내하였다.

수업 중의 담론에 대한 정보를 얻기 위해서 교실 관

찰은 주 당 2시간씩 실시되었으며, 교실 뒷면의 중앙에 비디오카메라를 고정시키고 학생들의 문제해결과 설명이 주로 이루어지는 칠판을 중심으로 교실정면을 촬영하였다. 본 연구는 연구자이자 연구 대상인 K 교사 자신의 수업에 대해 관찰하고 고찰하는 것이기 때문에 비디오카메라를 이용한 녹화자료는 자료의 진실성을 위해서 중요한 자료로 간주되었다. 촬영 후에 학생과 교사의 대화를 중심으로 비디오 녹화자료를 전사하였는데, 전사 자료는 날짜별로 현장일지 형식으로 기록하였고, 비디오 녹화자료는 나중의 분석을 위해 컴퓨터에 저장되었다. 이 전사자료에는 그날의 수업에서 일어난 것, 교사와 학생의 대화, 학생과 학생의 대화, 대화 내용 중 설명과 질문들, 학생들의 칠판 활동, 교실의 사회적 분위기(예를 들면, 발표하는 학생들의 특징과 그들에 대한 학급 학생들의 반응) 등을 기록하였다. 또한 나중의 분석을 위해 수학수업에서 학생들의 의미 있는 학습활동을 보여주는 활동지를 복사하였으며, 학생들의 사고활동에 대한 분석을 위해 유의미한 자료는 컴퓨터에 저장하였다.

4. 자료 분석

자료 분석은 여러 단계에 걸쳐 진행되었다. 먼저, 녹화된 비디오테이프는 분석을 위해서 날짜별로 전사하여 녹화 자료와 전사 자료인 현장일지를 모두 컴퓨터에 저장하였다. 현장일지와 교사의 수업후기를 전사하는 과정은 다음 차시의 수업계획을 수립하고 진행하기 위해서 본 차시의 수업에 대한 개선점을 찾는 자료수집 과정인 동시에 1차적 자료 분석이 이루어지는 과정이었다. 두 번째는 교사와 학생, 학생과 학생 사이의 담론에서 나타나는 의미 있는 의사소통을 분석하기 위해서, Hufferd-Ackles, Fuson과 Sherin(2004)의 분석틀 중에서 두 가지 구성요소, 즉, a) 질문하기와 b) 수학적 사고 설명하기를 선택하였다. 한편, 수학적 개념이나 문제해결과정에 대한 학생의 설명과 그 설명에 대한 다른 학생들의 질문도 중요한 요소이지만, 그 질문에 대해 자신의 문제해결과정이나 수학적 사고를 정당화하는 과정을 통해서, 학생들은 자신이 갖고 있는 수학적 개념과 사고를 더욱 분명히 하거나 오류가 있다면 수정하고 보완하는 과정을 통해 더욱 심화시킬 수 있다. 따라서 본 연구에서는 '수학적 사고의 정당화'라는 요소를 첨가하였다. 따라서 현장일지에 나타난 교사와 학생의 담론을 교사(T)와 학생(S)이라는 두 가지 측면에서, 그리고 그 각각을 다시 설명(E), 질문(Q) 그리고 정당화(J)[5]라는 세 가지 측면에서 담론의 수준을 분석하였다. 이 단계의 목적은 교실 내에서 교사와 학생뿐만 아니라 학생들 사이의 유의미한 담론과정을 통해 학생들이 수학적 개념을 구성하는 것을 확인하는 것이다. 세 번째는 학생들의 수학적 개념형성과정을 확인 할 수 있었던 담론 내에서 학생들의 근접발달영역에서의 사고 및 개념 수준의 발달을 좀 더 자세히 분석하고 학생들의 상호작용 패턴을 도식화하였다. 특히, 유의미한 담론 과정에 대해서는 학급 내의 사회적 분위기나 교사와 학생, 학생과 학생 사이의 상호작용 측면에서 발생하는 변화를 확인하기 위해서, 녹화자료를 다시 보고 그 담론 과정의 특징과 그 상황에 대한 연구자의 해석을 기술하였다. 이것은 학생의 수학적 개념 형성을 촉진하는 담론의 특성에 대한 논의를 위한 기초를 제공한다.

자료에 관한 해석의 신뢰성을 확보하기 위해서 먼저, 동료 검토(peer examination)를 결정하고 같은 학교에 근무하는 교사에게 도움을 청하였으나 해당교사의 개인사정으로 인하여 지속적으로 이루어지지 못하였다. 따라서 두 번째로 잠정적인 해석을 가지고 자료를 제공한 학생들에게 다시 보여주고 결과들이 자신의 생각과 일치한지 알아보는 참여자검토로 검증단계를 거쳤다.

Ⅳ. 연구 결과

본 연구의 주요한 결과는 학생들의 설명과 질문 그리고 정당화와 같은 수학수업에서의 담론과정을 통하여 학생들이 자신의 학습 수준에 따라 어떻게 수학적 개념을 구성하는 가를 규명하고, 수학적 개념 형성을 촉진하는 담론의 특징을 찾아내는 것이다. 이를 위해서 교실 관찰을 통해 얻은 현장일지, 전사기록 그리고 학생들의 활동지 중에서, 수학 수업담론을 통해 학생들의 수학적 개념 형성 과정을 확인할 수 있었던 유의미한 수업사례들을

5) 자료 분석 시, 설명하기(E)와 질문하기(Q)는 Hurrered-Ackles, Fuson과 Serin(2004)의 분석틀에 의해, 그리고 정당화하기(J)는 Simon과 Blume(1996) 분석틀에 의해 분석하였다.

사용하였다.

1. 수학적 개념이나 사고에 대한 설명, 질문, 그리고 정당화를 통한 수학수업의 담론에서 학생들은 수학적 개념을 어떻게 구성하는가?

가. 담론과정에 참여함으로써 수학적 개념형성

학생들이 자신의 수학적 개념이나 사고를 교사나 다른 학생들에게 설명하고, 그 설명에 대해서 질문을 하고, 질문을 받은 부분에 대해서 자신의 문제해결과정이나 수학적 사고를 정당화하는 수학 수업의 담론과정에 참여함으로써, 학생들은 교사나 다른 학생들과의 상호작용을 통해 자신의 실제적 발달수준에서 잠재적 발달수준으로 나아가는, 즉 학생들의 근접발달영역에서의 수학적 개념 형성과정들을 확인할 수 있었다. 이 때, 학생들마다 실제적 발달수준이 개인마다 달랐으며, 잠재적 발달수준으로 나아가는 근접발달영역에 있어서도 차이가 나는 것을 확인할 수 있었다. 또한 개인 간 상호작용에서 개인 내 상호작용으로의 전환도 확인할 수 있었다.

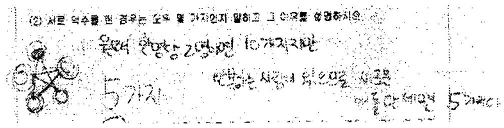
1) 수업사례 1

본 수업사례는 수업 관찰이 시작되고 3번 째 시간에 행해졌던 사례로, 평면도형의 성질 중 다각형의 대각선의 총수를 구하는 과제를 활동지로 만들어 학생들에게 제시하고 우선 10분간 개별적으로 문제를 해결한 후에, 홀수 줄이 몸만 뒤로 돌아 앉음으로써 4명으로 이루어진 모둠들을 구성하여 돌아가면서 서로의 문제해결과정에 대해 설명하고, 모르는 문제에 대해서는 질문하고, 질문을 받은 학생은 다른 모둠원들에게 설명하도록 하였다. 이 때, 교사는 교실을 돌아다니며 학생들의 문제해결과정을 관찰하거나 그림만 그려도 되는지, 답만 써도 되는지 등의 문제에 관하여 질문하는 학생들의 질문을 받았다. 또한 교사는 수업 전에 수학반장인 성현이가 있는 모둠의 대화를 녹음해도 좋을지를 물었고 학생들의 동의하에 한 모둠의 대화를 녹음할 수 있었다.

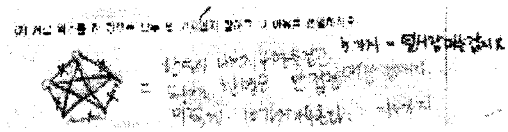
<발췌문 1>

문제 1. 5명의 학생들 재중, 윤호, 준수, 유천, 창민이가 게임을 하기 위해서 옆 친구의 손을 잡고 둥글게 서 있다. 호루라기를 불면 잡고 있던 손을 놓고 자신과 손을 잡지 않았던 사람들과 악수를 한다고 할 때, 다음 물음에 답해보자.

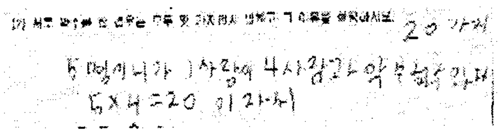
문제 (2) 서로 악수를 한 경우는 모두 몇 가지인지 말하고, 그 이유를 설명하시오.



<그림 1> 재영

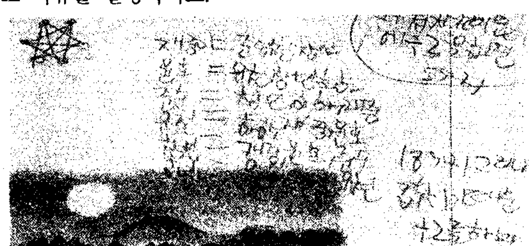


<그림 2> 성현



<그림 3> 혁주

문제 (3) 하하가 와서 6명이 함께 게임을 한다고 할 때, 서로 악수를 하는 경우는 모두 몇 가지인지 말하고, 그 이유를 설명하시오.



<그림 4> 승기

문제 2. 학생들이 서 있는 장소를 꼭지점으로 하여 다각형을 만든다고 할 때, 다음 물음에 답해 보자.

문제 (3) 3명, 4명, 6명, 7명의 학생들로 게임을 한다고 할 때, 아래의 표를 완성하시오.

성현[3SE11[6]]: 한 명이 4명과 악수하니까 연결하면 이렇게(<그림 2>*를 가리키며*[7]) 나오니까 10가지이지. 재영이, 너는?

재영[3SE31]: 그런데, 네 그림에서 손을 잡지 않은 사람과 악수를 해야 하니까 바깥 것은 지워야지. *(성현의 활동지의 그림에 빨간 펜으로 표시한다)* 난 이렇게 풀었어. 한 명당 2명과 악수를 하면 5×2=10인데, 겹치니까 5가지. 혁주는?

혁주[3SE12]: 난 그림을 못 그리겠어. 내겐 너무 어려워. 그냥 5명이 4명과 악수를 하니까 5×4=20가지라고 썼어. 너희들 설명을 들으니까 내 것은 확실히 틀린 것 같아.

승기[3SE32]: 나도 재영 이처럼 생각했어. 혁주가 구한 20가지를 그림으로 나타내면 아마 성현 이처럼 될 거야. 거기서 바깥 것을 지우고, 겹치는 것을 빼면 5가지 나와.

성현[3PR1[8]]: 듣고 보니 재영이 설명이 맞는 것 같아.

혁주[3PR2]: 그래. 그런 것 같아.

승기[3SE33]: 나는 (3)번을 풀 때 6명에 대해서 악수하는 사람의 이름을 썼더니 이렇게(<그림 4>) 3명씩 해서, 18가지 나와. 그러나 겹치기 때문에 2로 나누니까 9가지 나와.

재영[3SE21]: 나두 9가지 나오는데, 난 그림을 그려서 구했어.

성현[3SQ11]: 난 옆의 친구 2명을 뺀 4명에게 악수한다고 생각하고 6명이 하니까 4×6=24가지 나왔는데?

재영[3SJ31]: 한 사람이 4명에게 악수하는 것이 아니라 3명에게 하는 것이지. 자기 자신도 빼야 하잖아.

성현[3SE22]: 아, 그렇구나. 이제 알았다. *(고개를 끄덕거리며 자기 자신에게 설명한다)* 3개를 빼야지. 그리고 겹치니까 2로 나누고 그래서 3×6÷2=9.

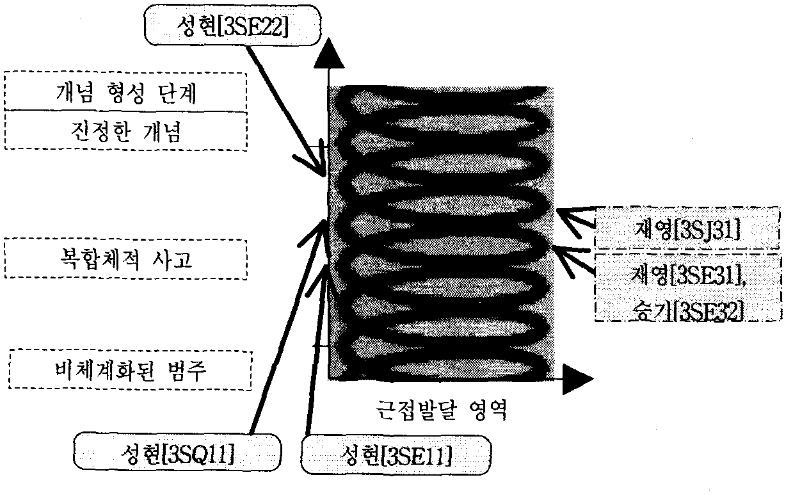
혁주[3NR1[9]]: 난 모르겠는데……. *(성현, 재영과 승기가 혁주에게 구체적으로 설명한다)* 그래, 그림을 그려서 얘기하니까 좀 알겠다.

……중략……

승기[3SJ32]: (문제2번의) (3)번에서 n각형이면 n명이 게임을 하는 것이라고 생각하고, 대각선의 수는 악수의 수라고 생각하면 되겠네.

재영[3SJ33]: 그럼, n각형이면……. n명이 n-3번씩 대각선을 그을 수 있으니 n(n-3)이고, 2개씩 겹치니까 2로 나누면, n(n-3)÷2네.

성현[3SQ21]: n에 5를 넣어봐. 1번 문제에서 구한 5가 나오나.*(학생들은 n에 5를 대입하여 확인한다)* 정말 5가 나오네!



<그림 5> 성현의 개념발달

6) [3SE11]은 3차시 학생 설명 1수준 첫줄을 의미함.

7) ( ) 안의 기울임체는 학생들의 행동에 대한 설명임.

8) [3PR1](Positive Response)은 3차시 단순히 수긍하거나 긍정적인 반응 첫 번째 줄을 의미함.

9) [3NR1](Negative Response)은 3차시 미심쩍어하거나 부정적인 반응 첫 번째 줄을 의미함.

위의 <발췌문1>에서 성현[3SE11]은 처음에 악수를 하는 관계와 손을 잡는 관계를 연쇄로 결합하는 연쇄 복합 유형을 나타냈으나, 재영[3SE31]과 승기[3SE32]의 도움을 받고 성현[PR1]에서 보이는 것처럼 이해하는 듯이 보였으나, 이어지는 성현[3SQ11]의 질문을 보면, 손을 처음에 잡았던 사람을 제외하는 것이 공통된 속성일 것이라는 애매한 인상을 갖고 있어, 복합체적 사고수준 중에서도 확산적 복합 유형에 다다랐다고 할 수 있을 것이다. 그러나 곧 재영[3SJ31]의 정당화를 듣고 성현[3SE22]이 자기 자신에게 설명하는 것을 보면서, 개인 간 상호작용에서 개인 내 상호작용으로의 전환, 즉 내면화 과정을 확인할 수 있었으며, 내면화 과정이 이루어진 후에는 혁주에게 적극적으로 설명하는 모습까지 확인할 수 있었다. 그러나 승기[3SJ32]와 재영[3SJ33]의 담론에 대해 추상적으로 사고하지 못하고 n에 5를 구체적으로 넣어서 확인하기를 원하는 성현[3SQ21]의 질문으로부터, 표면상으로는 일반화한 것 같지만 본질적으로는 복합적 사고수준인 의사 개념 유형을 갖고 있음을 확인할 수 있었다. Vygotsky(1978)에 의하면, 발달은 순환적인 것이 아니라 좀 더 높은 수준으로 진보되면서 각각 새로운 변혁의 동일 지점을 통과하는 나선형으로 진행된다고 하였다. 이러한 나선형적 발달모형과 앞에서 살펴본, 재영과 승기와의 담론을 통하여 성현이 갖게 된 다각형의 대각선의 개수에 관한 수학적 개념 수준의 변화를 도식으로 나타내면 <그림 5>와 같다. 한편, 재영[3SE31]과 승기[3SE32]는 복합체적 사고수준에서 시작해서 서로의 담론을 통하여(승기[3SJ32]와 재영[3SJ33]에서 보듯이), n각형의 대각선의 총 개수로 추상화하는, 즉 진정한 개념수준까지 발달하는 것을 확인할 수 있었다(부록1 참고).

또한, 근접발달영역은 현재 조성 중에 있는, 발달이 막 시작되는 발달과정들도 확인할 수 있었다. 즉, 발달상으로 이미 성취된 것뿐 아니라 성숙의 과정 중에 있는 것 또한 설명할 수 있다(Vygotsky, 1978)고 하였는데, 정당화하기를 요구함으로써 학생들의 발달수준을 더욱 명확히 확인할 수 있었다.

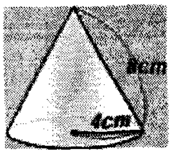
2) 수업사례 2

수업관찰이 시작되고 3주차에 관찰된 수업사례로, 부채꼴의 중심각의 크기와 호의 길이가 비례한다는 것을 지난주에 학습하였고 이번 차시는 회전체에 관한 교과서의 문제를 학생들이 나와서 해결하는 시간이었다. 교사는 칠판에 문제의 번호만을 쓰고 나와서 풀기를 희망하는 학생들의 신청을 받아 나와서 풀도록 하였는데, 이때, 문제 선택은 자신이 원하는 문제를 풀도록 하였다. 학생들은 칠판 앞으로 나와 문제를 해결하면서, 문제해결에 자신감이 없거나 잘 모르는 학생들은 앉아 있는 학생들에게 틀린 곳이 없는 지를 확인해달라고 하거나 도움을 받아 해결하였다. 그 동안 교사는 교실의 뒤에 서서 다른 학생들의 질문을 받거나 칠판의 풀이과정을 눈으로 확인하며 앉아 있는 학생들이 칠판의 해결과정에 관심을 갖도록 요구하였다. 모든 학생들이 문제를 해결한 후에, 교사는 학생들이 돌아가면서 나와서 자신의 문제해결과정을 설명하도록 하였고, 다른 학생들은 모르거나 이상한 부분에 대해 질문하도록 권하였다.

이 사례에서 수학 수업에서의 담론을 통하여, 특히 학생들의 수학적 사고와 개념에 관하여 질문하고 정당화하기를 요구함으로써 학생들의 실제적 발달수준을 좀 더 명확히 확인할 수 있었다. 교사가 계산결과만을 확인하여 정답과 오답을 가리고 지나쳤다면 학생들의 발달수준의 차이를 제대로 확인하기 어려웠을 텐데, 학생들로 하여금 자유롭게 질문하고 정당화하도록 요구하자 각 학생들의 발달수준에 있어서 차이가 분명해졌다. 따라서 정당화하기는 학생들로 하여금 반성적 사고과정을 유도하므로, 근접발달영역에서의 학생들의 발달수준을 확인하고 좀 더 나은 발달수준으로 나아가기 위해 꼭 필요한 담론요소라고 생각한다.

<발췌문 2>

문제 6. 그림과 같은 원뿔의 전개도에서 옆면에 해당하는 부채꼴의 중심각의 크기를 구하여라(강옥기 외, 2001).



<그림 6> 원뿔

진영[5SE11]: 전개도를 펼치면 다음과 (칠판에 그린 자신의 그림을 가리키며) 같습니다. 중심각을 구하는 공식이 {(밑면의)반지름/모선의 길이}*360도이므로 (칠판에 쓴 풀이과정을 다 설명하지 않고) 답은 180도가 나옵니다.

승기와 인혁[5SQ31]: 그 공식은 어떻게 나온 거야?

교사[5TQ11]: 음……. 4/8 곱하기 360도라고요?

진영[5SE12]: 예

교사[5TQ31]: 여러분, 답은 맞아요? 그런데 정말 저런 공식은 어떻게 나왔어요?

진영[5SJ11]: 학원에서 배웠는데, 이유는 설명 못하겠어요.

학생들[5SJ12]: 맞아요. 초등학교 때, 학원에서 배운 공식이에요.

교사[5TQ32]: 학원에서 배운 거야? 그럼, 왜 저렇게 말할 수 있는지 설명해볼까? (진영이가 난감한 얼굴로 서있다.) 설명할 수 있는 사람 있어요?

학생들[5SJ13]: 학원에서 그냥 외워서 쓰라고 했어요.

교사[5TQ33]: 외우는 것도 좋지만, 자신의 풀이과정에 사용한 것이면 설명할 수 있어야겠지. 그런데, 이 문제 공식을 몰라도 구할 수 있어요. 혹, 다른 방법으로 답을 구한 사람?

(인혁이가 손을 들자 교사는 칠판에 나와서 풀게 하고, 인혁은 진영이가 그린 전개도의 중심각에 x라 표시한 후 2πr*x/360=호의 둘레, 2π*8*x/360=8π 라 쓰고 계산하여 180도라는 답을 구한다.)

진영, 승기와 학생들[5SQ32]: (인혁의 풀이를 눈으로 읽고 있다가) 똑같은 거 아냐?

인혁[5SJ21]: 중심각을 x라 하면, 부채꼴의 호의 길이는 2πr*x/360이고, 부채꼴의 호의 길이와 원의 둘레와 같습니다. 그런데 반지름이 4이므로 8π가 나옵니다. 2πr에서 r은 모선의 길이 8이므로 16π*x/360=8π, (양변의)π가 지워지고 16과 360을 약분하면 (2/45)*x=8, 방정식을 해결하기 위해 양변에 역수를 곱하여 180도가 나옵니다.

진영[5SQ33]: 저랑 똑같은 거 아니에요?

교사[5TQ34]: (인혁에게) 잘 했어요. 일단 밑면인 원의 둘레, 원주와 호의 길이는 같다는 것은 이제 다 알죠? 호의 길이 8π는 잘 구했어요. 그런데 여러분은 호의 길이가 이렇게(인혁이 쓴 공식을 가리키며) 구할 수 있다는 것을 아직 배우지 않았어요. 진영이의 공식도 우리가 어떻게 나왔는지 설명할 수 없는 것이고. 그럼 아직 배우지 않은 것에 대해 물어보니 교과서의 순서가 잘 못 된 것일까? 혹, 다르게 푼사람 있어요?

(교사는 장혁이 조심스럽게 손을 들자 나와 설명하도록 한다.)

장혁[5SJ31]: (원뿔의 모선을 가리키며) 여기가 8이니까 (모선을 반지름으로 하는 큰 원을 그리며)원의 둘레가 2πr인데 r이 8이니까 16π구. (밑면인 원의 둘레를 가리키며) 8π니까… 원일 때 16π니까 8π가 되려면 반이니까 180도요.

교사[5TQ35]: 자, 장혁이 설명을 했는데, 잘 들었어요? 장혁아, 잘했어요. 앞의 두 친구가 썼던 공식을 사용하지 않고도 답이 나왔네. 장혁은 문제를 풀기 위해서 무엇을 사용했어요? (학생들이 응답하지 않자) 이해가 되었어요? 질문이 있는 사람?

인혁, 진영과 학생들[5PR1]: 잠깐만요…….(장혁이 칠판에 그린 그림을 보면서 이해하려고 한다.) 아!

승기[5SQ34]: 뭐가 반이야? (질문을 하자마자) 아! 8π이가 16π의 반!

진영과 우진[5SE31]: 부채꼴의 호의 길이가 중심각에 정비례한다는 것을 쓴 거예요.

승기와 학생들[5PR2]: 뭐야, 싱겁게……. 괜히 어렵게 구했잖아.

교사[5TE21]: 그래, 공식을 몰라도 정비례한다는 성질만으로 이 문제는 답을 구할 수 있잖아요. 그리고 여러분이 사용했던 공식도 이 정비례한다는 성질로부터 유도된 것입니다.

승기[5SJ01]: 그래도 답은 맞잖아요.

교사[5TQ21]: 그래, 답은 맞지. 틀리다고는 안했어요. 그러나 어느 것이 진짜 아는 것일까? 공식만 암기하는 것과 성질을 이해하고 공식을 아는 것과?

진영과 우진[5SE21]: 공식만 외운 것은 금방 잊어요.

인혁[5SE32]: 학원에서는 공식을 외우라고 하고 대입해서 계산하라고 하니까 다른 생각은 없이 그냥 외우게 되요. 정비례한다는 것을 알고 있었는데 아까는 생각이 안 났어요. 그런데 이렇게 쉽게 푸는 것을 보니까 어이가 없어요.

<발췌문 2>에서 진영[5SE11]이 전개도를 바르게 그리고 자신이 쓴 식에 오류 없이 수를 대입하여 옳은 답을 구했음에도 불구하고, 승기와 인혁[5SQ31]의 질문에 대한 진영[5SJ11]의 대답을 보면 공식에 대하여 진정한 개념을 갖고 있는 것이 아니라 복합체적 사고 수준 중 의사 개념 단계에 머물러 있음을 확인할 수 있었다. 그

러나 인혁[5SJ21]의 정당화에 대한 진영[5SQ33]의 질문과 창혁[5SJ31]의 정당화를 듣고 난 후에 그 과정에 대해 반성적으로 생각하는(진영[5PR1]) 과정을 거쳐 나온 진영[5SE31]의 대답으로부터, 부채꼴의 호의 길이가 중심각에 비례한다는 수학적 사실에 대해 진정한 개념을 갖게 된 것을 확인할 수 있었다. 즉, 진영은 담론과정을 통해서 복합체적 개념 수준에서 진정한 개념수준으로 발달했다는 것을 확인할 수 있었다. 만약 학생의 결과적인 답에 대해 정당화를 요구하지 않고 정 · 오만을 판단하고 지나치는 수업이었다면, 진영의 개념수준을 제대로 확인할 수 없었을 것이고, 결국은 개념수준의 발달로 이끌 수 없었을 것이다.

또한, 학생들이 공식을 무조건 암기하고 수를 대입하여 옳은 답을 구하는 것으로 끝내는 결과중심의 학습의 문제점들을 확인하고(진영[5SJ11], 학생들[5SJ12], 학생들[5SJ13], 진영과 우진[5SE21]), 학생들 스스로 과정 중심의 학습의 필요성을 깨달을 수 있었다(승기와 학생들[5PR2], 인혁[5SE32]). 이런 사례는 수학에 관한 학생들의 정의적인 면에 영향을 주고 나아가 학생들의 수학적 성향에 긍정적인 영향을 줄 수 있기 때문에 의미 있는 수업이다.

Vygotsky(1978)는 신호 조작의 구조를 설명하면서 자극과 반응 간의 중재된 연계의 필요성을 강조하고, 이러한 중재된 연계를 확립하기 위해서는 능동적인 참여가 필요하다고 하였다.

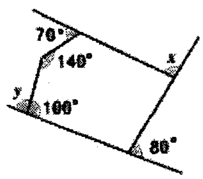
연구를 시작한 이후에, K 교사는 수학수업의 담론과정에서 학생들로 하여금 자신의 생각을 다양하게 표현하도록 하기 위해서, 같은 결과가 나왔더라도 풀이 방법이 다르다면 칠판 앞에 나와서 설명하도록 지속적으로 격려하였다. 학생들은 교사가 제시한 풀이방법이 아닌 다른 방법으로 푸는 것에 대해 안심하지 못하였고, 과정이 다르면(different) 결과가 틀리게(wrong) 나올 것이라 생각하고 불안해했던 연구의 초반 분위기와 달리, 관찰이 시작된 지 5주째 되던 <발췌문 3>에서 학생들은 다른 학생의 설명을 듣고, 그것과 다른(different) 자신만의 풀이방법을 설명하고 정당화하는데 능동적으로 참여하는 모습을 보였으며, 전체 학급의 학생들은 다양한 학생들의 설명을 듣고 비교 · 대조하면서 기존에 자신이 갖고 있던 수학적 개념과의 유사성을 찾아 공유하고, 더 간단한 풀이방법을 선호하는 것을 확인할 수 있었다. 이처럼 수학수업의 담론과정에서 수학적 개념에 관한 다양한 설명과 정당화를 비교 · 대조하는 학생들의 개인 간 상호작용이 내적으로 재구성되어지는 전환, 즉 내면화되는 과정을 확인할 수 있었다.

3) 수업사례 3

학생들의 설명, 질문, 그리고 정당화를 강조하는 담론중심의 수학 수업을 진행한지 한 달이 지난 후에 관찰된 수업사례로, 평면도형의 측정 중 다각형의 외각의 크기의 합을 학습한 후에 교과서의 문제를 나와서 해결하고 설명하도록 한 수업이다. 이 수업에서 교사는 학생들이 문제를 옳게 해결하고 설명을 한 후에, 그 문제해결과정과 답이 옳더라도 그 밖의 다른 방법으로 해결할 수 있다면, 더 나와서 설명해보도록 권하였다. 수업에서 학생들의 설명, 질문, 그리고 정당화하기를 격려하는 담론 중심의 수업이 한 달 이상 지속되면서 학생들은 적극적으로 수학적 개념에 관한 자신의 생각을 설명하고 정당화하게 되었다. 또한 연구의 초반에는 대부분의 학생들이 담론에 참여하는데 소극적인 모습을 보이거나 특별히 반응을 보이지 않았으나, 이 수업에서는 학생들의 설명이나 교사의 질문에 대하여 대부분의 학생들이 즉각적으로 질문하고 반응하며 서로 발표하고자 하는 경향을 볼 수 있었다.

<발췌문 3>

문제 6. 다음 그림에서 $\angle x$와 $\angle y$의 크기를 구하여라.



<그림 7> 다각형의 내각과 외각의 합

해창[9SE31]: 내각으로 하면 5각형이 540도이니까……. 내각을 구하면……. (칠판에 하나씩 내각을 표시하면서) 아, y는 180도에서 여기(100°)를 빼면 되

니까 80도. 여기(80°의 내각)는 180빼기 80은 100도고 여기는 (70°의 내각) 같은 방법으로 하면 110도니까 100도, 140도를 더하면, 450도니까 540도에서 빼면 90도니 까……. 여기(x의 내각)가 90도니까 180도에서 90도를 빼면 x는 90도.

교사[9TQ31]: 잘 했죠? x는 90도 맞아?

학생들[9SE21]: 맞아요.

교사[9TQ32]: 둘 다 맞는데, 혹시, 여러분 중에 x를 (교사가 손을 들어 보이며) 다른 방법으로 구한 사람? 지금 해창이 5각형의 내각의 합이 540도니까 내각을 구해서 뺐죠? 다른 방법으로 구한 사람?

지혜[9SE22]: (손을 들면서) 외각이요!

교사[9TE21]: (여러 학생들이 손을 들자) 먼저 손든 지혜 시키겠어요. 나와 보세요.

지혜[9SJ31]: 다각형의 외각의 합은 360도이므로 (해창이 표시하지 않은 외각을 표시하면서) 70도, (각 140° 의 한 변을 연장해서 외각을 표시하며) 40도, 80도, 80도를 다 더하면, 270도입니다. 360도에서 270도를 빼면 x는 90도.

교사[9TQ33]: (전체 학급의 학생들을 보며) 뭐로 구했어요? 이 사람은?

학생들[9SE23]: (큰 소리로) 외각의 합

교사[9TQ34]: 내각의 합이 아니라 외각의 합으로 구했죠? 수학 문제가 답은 하나지만 푸는 방법은 다양할 수 있어요. (학생들을 둘러보며) 어느 방법이 더 좋다?

학생들[9SE32]: (저마다 각자의 생각을 말한다) 해창이 방법이요, 지혜 방법이요.

교사[9TE31]: 어느 방법이 더 좋다! 그건 말할 수 없어요. 잘 보시면 사람마다 자주 사용하는 풀이 방법이 있어요. 그것은 사람마다 다 다를 수 있어요. 해창이 방법도 좋고 지혜 방법도 좋아요.

종문[9SJ32]: 외각의 합은 늘 360도니까 따로 내각을 구할 필요 없이 외각의 합에서 빼면 되니까 지혜의 방법이 더 좋은 것 같아요.

위의 <발췌문 3>에서 해창[9SE31]의 설명과 또 다른 문제해결방법을 요구하는 교사[9TQ32]의 질문에 대한 지혜[9SJ31]의 정당화를 듣고 보여준 종문[9SJ32]의 정당화는, 다각형의 내각과 외각이라는 수학적 개념에 관한 사회적 수준에서의 상호작용에서 개인적 수준으로의 전환, 즉 내면화 과정이 종문에게 일어나고 있음을 확인할 수 있었다. 특히, 학생들([9SE32])의 반응은 학생들 개개인이 선호하는 풀이방법이 다르다는 것을 말해주는데, 이는 학생들의 실제적 발달수준의 차이와 그로 인한 다양한 설명, 질문, 그리고 정당화와의 연계에 있어서의 차이에서 기인한다고 볼 수 있다. 또한, 교사[9TQ33]의 질문에 대해 보여준 학생들([9SE23], [9SE32])의 즉각적이고 적극적인 반응과 지혜[9SE22]와 종문[9SJ32]의 반응으로부터, 담론 중심의 수학수업은 모든 학생들이 능동적으로 참여할 수 있는 환경을 제공하는 수업방법임을 확인할 수 있었다. 연구의 초반에는 지혜를 비롯한 대부분의 여학생과 종문처럼 수학에서 낮은 성적을 받는 학생들의 수학적 개념이나 사고에 관한 설명, 질문, 그리고 정당화를 보기 어려웠기 때문이다.

위의 결과로부터 학생들은 수학적 개념이나 사고에 관한 설명, 질문, 그리고 정당화하기와 같은 수학수업에서의 담론과정에 참여함으로써, 자신의 실제적 발달수준에서 잠재적 발달수준으로 나아갈 수 있었고, 교사는 학생들에게 질문과 정당화를 요구함으로써 학생들의 실제적 발달 수준의 차이를 확인할 수 있었는데, 이는 교사로 하여금 학생들의 개인차를 고려한 교수-학습방법을 모색하도록 하였다. 또한 이러한 담론 중심의 수학수업은 평소에 자신의 생각을 말하기를 꺼려하는 여학생이나 수학에서 자신을 갖지 못하던 학생들의 능동적인 참여를 증가시킨다는 것을 확인할 수 있었다.

2. 수학수업의 의사소통과정에서 학생의 수학적 개념 형성을 촉진하는 담론의 특징은 무엇인가?

수학적 개념에 관한 교사와 학생, 그리고 학생들 간의 설명, 질문, 그리고 정당화에 초점을 두고 수학수업의 담론을 분석한 결과로부터, 학생들의 수학적 개념 형성을 촉진했던 담론과정에는 주요한 한 가지 특징이 있음을 확인할 수 있었다. 즉, 학생들이 수학적 개념을 잘 형성했던 수업과정에는 수학수업 담론의 참여자들이 서로에게 활발히 feedback을 주고받으면서 상호작용할 때, 즉, 수학적 개념에 관한 교사와 학생, 학생들 간의 활발한 토론이 있음을 확인할 수 있었다.

가. 수학적 개념 형성을 촉진했던 수업의 상호작용

앞에서 3개의 수업사례를 통하여 학생들이 수학수업의 담론과정에 참여함으로써 수학적 개념을 형성하는 것을 확인하였다. 수학적 개념 형성을 촉진했던 수업의 상

호작용 패턴을 확인하기 위해서, 앞에서 보았던 수업사례 1과 수업사례 2의 상호작용 패턴을 분석하여 각각 <표 1>, <표 2>의 결과를 얻을 수 있었다.

모둠수업으로 진행한 수업사례 1과 일제수업으로 진행한 수업사례 2에 대한 각각의 상호작용 패턴 분석표 <표 1>, <표 2>들로부터, 공통적으로 ERE 패턴이 형성된 이후에 PD 패턴이 나타나는 것을 확인할 수 있었다. 이처럼 토론이 이루어질 수 있었던 것은 수학적 개념형성을 촉진했던 담론과정에서 학생들의 제안(승기[3SE33], 승기[3SJ32])과 질문(승기와 인혁[5SQ31]) 그리고 교사의 질문(교사[5TQ31])과 정당화에 대한 요구(교사[5TQ33], 교사[5TQ34])가 학생들의 수학적 사고를 자극하여 적극적 참여를 유도한 것으로 파악된다. 즉, 수학수업에서 교사가 학생들로 하여금 수학적 개념에 관한 설명, 질문, 그리고 정당화하도록 요구하는 것은 학습 참여자들 간의 상호작용을 증가시키는 교수-학습 방법임을 확인할 수 있었다.

특히, 토론 뒤에 나타나는 학생들의 스스로의 학습에 대한 평가(진영과 우진[5SE21], 인혁[5SE32])는 개인 간 상호작용이 개인 내 상호작용으로 전환되는 과정으로써, 학습에 대한 학생들의 내면화 과정이 일어나고 있음을 보여준다고 할 수 있다.

<표 1> 수업사례 1의 상호작용 패턴

수업	담 론	상호작용
사례1	성현[3SE11]	R
	재영[3SE31]	Eb[10]
	혁주[3SE12]	R
	승기[3SE32]	Eb
	성현[3PR1], 혁주[3PR2]	Ev[11]
	승기[3SE33]	P
	재영[3SE21]→성현[3SQ11]→ 재영[3SJ31]→성현[3SE22]→ 혁주[3NR1]	D
	승기[3SJ32]	P
	재영[3SE34]→성현[3SQ21]	D

<표 2> 수업사례 2의 상호작용 패턴

수업	담 론	상호작용
사례2	진영[5SE11]	R
	승기와 인혁[5SQ31], 교사[5TQ11]	El[12]
	진영[5SE12]	R
	교사[5TQ31]	El
	진영[5SJ11], 학생들[5SJ12]	R
	교사[5TQ32]	El
	학생들[5SJ13]	R
	교사[5TQ33]	El
	진영, 승기와 학생들[5SQ32]→인혁[5SJ21]→진영[5SQ33]	D
	교사[5TQ34]	El
	장혁[5SJ31]	Eb
	교사[5TQ35]	Ev
	인혁, 진영과 학생들[5PR1], 승기[5SQ34], 진영과 우진[5SE31], 승기와 학생들[5PR2]	R
	교사[5TE21]	Eb
	승기[5SJ01]	Ev
	교사[5TQ21]	El
	진영과 우진[5SE21], 인혁[5SE32]	Ev

나. 수학적 개념 형성을 촉진하는 담론의 수준

교사와 학생, 학생들 간의 수학적 개념에 관한 설명, 질문, 그리고 정당화하기가 격려되는 수학수업의 담론이 학생들의 수학적 개념형성을 촉진하고, 수학적 개념형성을 촉진했던 담론에서 ERE 패턴과 PD 패턴이 반복적으로 나타나는 순환적 패턴의 상호작용이 나타나는 것을 사례로부터 확인하였다. 이러한 순환적 패턴의 출현으로부터, 토론 과정에서 교사와 모든 학생을 포함한 학습참여자 간의 수학적 개념에 관한 정교화와 평가가 능동적으로 충분히 이루어졌음을 확인할 수 있었다.

담론 수준의 향상은 Hufferd-Ackles, Fuson과 Sherin(2004)의 분석틀을 바탕으로 분석하였는데, 수업사례들의 발췌문에서 보았듯이 담론 분석에서는 교사와 학생을 구분하여 각각의 설명(E), 질문(Q), 정당화(J)로 분

10) Eb(Elaboration) 정교화.
11) Ev(Evaluation) 평가.
12) El(Elicitaion) 유도, 도출.

석하였으나, 전체적인 담론 수준을 분석할 때는 교사와 학생을 하나의 담론 참여자로서 분석하였다. 왜냐하면 담론의 주체는 담론에 참여한 교사와 학생 모두이므로 포함하여 분석하는 게 전체적인 담론 수준을 파악하기에 적합하다고 판단되었고, 설명, 질문 그리고 정당화라는 담론을 구성하는 각각의 요소에 대한 수준 변화를 파악하는 것이 주된 목적이었기 때문이다.

담론 수준의 변화를 파악하기 위해서, 관찰 첫 시간의 수업 중에서 일부를 발췌한 <발췌문 4>를 첨가한다. <발췌문 4>는 1차시에 관찰된 수업사례로, 학생들은 지난 시간에 기본도형의 작도와 삼각형의 합동에 대해 학습하였고, 이번 차시에는 삼각형의 합동에 의해 작도의 타당성에 대해 토론하고 궁극적으로는 작도의 타당성을 이해하는 것이 목적이었다. 교사는 4명으로 구성된 각각의 모둠에게 서로 다른 4개의 문제를 제시하고, 각자 10분간 문제를 해결한 후에 다른 모둠원에게 자신의 문제를 돌아가면서 20분간 설명하도록 하였다. 이 때, 문제에 대해 자유롭게 질문하거나 틀렸다고 생각되는 부분은 서로 수정해주도록 하였다. 교사는 학생들이 담론에 참여하는 동안 칠판에 4개의 문제를 쓰고, 교실 앞에 나와서 설명할 학생들을 선정하기 위해서 교실을 돌아다니며 다른 학생들에게 자신의 생각을 적극적으로 설명하거나 정당화하는 학생을 파악한 후에, 다시 칠판 앞으로 돌아와 각 문제에 대해 한 명의 학생들을 호명하여 나와서 설명하도록 하였던 사례이다.

<발췌문 4>

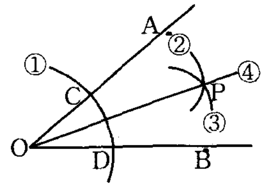
문제 3. 다음은 각의 이등분선을 작도하는 방법에 대한 설명이다.

① 점 O를 중심으로 적당한 반지름의 원을 그리고, 각의 두 반직선 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$와의 교점을 각각 C, D라 한다.

②, ③ 점 C와 D를 중심으로 반지름의 길이가 같은 두 원을 그려서 그 교점을 P라 한다.

④ 두 점 O와 P를 잇는 반직선 $\overrightarrow{OP}$을 그으면, 반직선 $\overrightarrow{OP}$가 ∠AOB의 이등분선이다.

(1) 삼각형의 합동을 이용하여 위의 작도가 각의 이등분선을 작도하는 옳은 방법임을 설명하시오.



교사[1TQ01]: 다현아, 나와서 해볼래?

다현[1NR]: 전 못하겠어요.

교사[1TQ02]: 왜? 한 번 해보자. (다현이 고개를 젓는다) 재영이가 할래? 난 이렇게 풀었다라고 설명하면 되는데……. (재영이 고개를 숙이자 다현을 보며) ①번의 호를 그리면 무엇이 같아요?

다현[1SE01]: (작은 소리로) $\overline{OC}$랑 $\overline{OD}$

교사[1TQ03]: 그래, 알고 있잖아. 나와서 해봐 (다현이 고개를 흔들자 학급을 향해) 자, 힌트를 주었는데 나와서 해볼 사람? (학생들이 손을 들지 않자 계속해서 질문한다) ②, ③번의 호를 무엇이 같아요? (어느 학생도 대답하지 않자 진영을 향해) 진영아, 무엇이 같아져요?

진영[1SE02]: $\overline{CP}$, $\overline{DP}$요.

교사[1TQ21]: 왜?

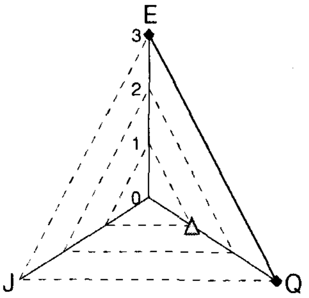
진영[1SE03]: 예? (진영이 당황해하자 학생들이 웃는다) 그냥요.

위의 <발췌문 4>에서 보듯이 학생들은 자신의 문제해결과정에 대해 다른 학생들 앞에 나와서 설명하기를 꺼려하거나 설명을 해도 짧게 대답할 뿐이었으며, 교사의 '왜'라는 질문에 대해서 학생들의 수학적 개념이나 사고에 관한 전략에 대한 설명은 없었다. 학생들의 대답에 대해 다른 학생들의 질문이나 정당화도 확인할 수 없었으며, 교사가 주로 질문하였다.

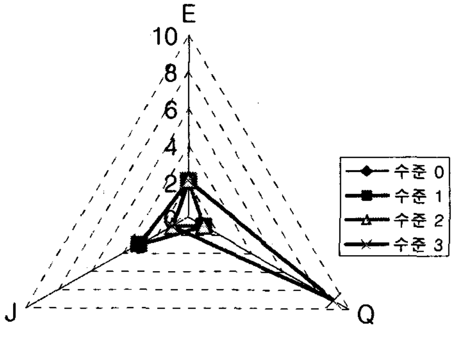
다음의 <그림 8>과 <그림 9>는 <발췌문 4>와 <발췌문 2>에 나타난 담론 참여자들의 설명, 질문, 정당화 각각에 대해 수준별로 나타난 횟수를 도식화한 것이다.

담론 중심의 수업을 시작한 첫 시간으로 담론이 잘 이루어지지 않았던 <발췌문 4>에 대한 <그림 8>로부터, 수준 0의 설명과 질문이 주를 이루고 수준 2의 질문이 나타나기는 하지만 수준 1이상의 설명이나 정당화가 없는 것을 확인할 수 있었다. 즉, 교사와 학생, 학생과 학생 사이에 학생들의 수학적 개념이나 사고 전략에 관한 질문이나 정당화가 이루어지지 않았음을 확인할 수 있었다. 또한, 질문의 개수와 설명의 개수가 별 차이가 없는

것으로 봐서 질문하는 사람(교사 또는 학생)과 설명하는 사람(교사 또는 학생)간의 짧은 담론만이 오고 갔을 뿐 그 외의 학생들이 담론에 참여하고 있는 지 확인할 수 없었다. 이로부터 <그림 8>의 담론이 이루어진 교실은 Hufferd-Ackles, Fuson과 Sherin(2004)의 분석틀에 의하면 수준 0의 수학-대화 학습 공동체(Math-Talk Learning Community)로서 주로 교사에 의해 통제되는 교실로 파악된다.



<그림 8> 발췌문 4의 E-Q-J 수준



<그림 9> 발췌문 2의 E-Q-J 수준

반면에, 학생들의 수학적 개념에 관한 발달을 확인할 수 있었으며, 교사와 학생, 학생과 학생간의 활발한 상호작용을 확인할 수 있었던 <발췌문 2>에 대한 <그림 9>를 보면, 수준 1, 수준 2, 그리고 수준 3의 설명, 질문, 정당화가 고르게 나타나는 것을 확인할 수 있었으며, 특히 질문의 개수가 다른 항목에 비해 현저하게 많은 것을 볼 수 있었는데, 이것은 담론의 주된 질문자가 교사만이 아니라는 것을 의미한다. 즉, 담론 과정에서 교사뿐만 아니라 학생들이 질문을 많이 한다는 것은 담론에의 참여가 증가하였음을 보여준다고 말할 수 있다. 또한 <그림 8>에서는 볼 수 없었던 다양한 수준의 정당화가 나타나고, 수준 3의 설명, 질문, 그리고 정당화까지 나타나는 것을 확인할 수 있었다. 이는 담론의 참여자들이 문제의 해답을 구하는 것으로 담론을 끝내는 것이 아니라 서로의 수학적 개념이나 사고에 대한 정당화와 설명을 요구하고 토론하는 담론 수준의 향상을 보여주는 것이다. 위의 결과로부터 <그림 9>의 담론이 이루어진 교실은 교사가 학생들의 동료 교사(co-teaching)이자 동료 학습자(co-learning)로서 담론에 완전히 참여하지만 보다 주변적(peripheral)이고 조정하는 역할을 담당하는 수준 3의 공동체라 할 수 있다.

따라서 수학적 개념에 관한 설명, 질문, 그리고 정당화를 통하여, 즉 학생들이 담론과정에 참여함으로써 수학교실의 담론 수준이 향상되는 것을 확인할 수 있었다.

V. 결 론

개념은 교사로부터 학습자에게 기성품으로 전달될 수 없다. 개념적 발달은 학습자가 스스로 개념을 구성하거나 만드는 개인적 과정이다(von Glasersfeld, 1987; Frid, 1993에서 재인용). 수학 수업에서 교사와 학생, 학생과 학생간의 담론이라는 사회적 과정을 통하여 수학적 개념에 관한 학생들의 개인적 발달과정을 돕는 것이 이 연구의 목적이었다.

앞에서 수업사례를 통하여, 첫째, 수학적 개념이나 사고에 관한 설명, 질문 그리고 정당화에 초점을 둔 수학 수업의 담론과정에 참여함으로써, 학생들은 각자 자기 자신의 실제적 발달수준에서 잠재적 발달수준으로 나아가는 것을 확인할 수 있었으며, 특히, 담론과정에서 교사와 학생들의 질문과 정당화를 요구하는 것은 학생들의 실제적 발달수준의 차이를 확인하도록 돕기 때문에 담론에 초점을 둔 수학수업이 개인차를 반영할 수 있는 교수-학습 방법임을 확인하였다.

둘째, 수학적 개념 형성을 촉진했던 수학수업에서 담론 참여자들 간의 상호작용 패턴은 ERE 패턴이 형성된 이후에, PD 패턴이 나타나는 순환적 패턴임을 확인할 수 있었다. 특히, 토론 과정의 마지막에 학생들이 보여주었

던 자신의 학습에 대한 평가는, 개인 간 상호작용이 개인 내 상호작용으로 전환되는, 즉 수학적 개념에 관한 학생들의 반성적 사고과정을 통한 내면화 과정이 나타나고 있음을 확인할 수 있었다.

셋째, 수학적 개념에 관한 학생들의 설명, 질문, 정당화가 격려되는 수학수업의 담론이 지속적으로 진행되면서 교사가 통제하는 교실 담론 수준 0에서 교사는 학생들의 동료 교사이자 동료 학습자로서 학생들의 학습을 조정하고 지원하는 주변적인 역할을 담당하는 교실 담론 수준 3으로 발달하는 것을 확인할 수 있었다. 이는 수학수업의 담론과정에서 학생들이 다른 학생들의 동료 교사이자 동료 학습자로 수학수업에 참여한다는 것을 의미하며, 담론에 초점을 둔 수학 수업이 학생들의 수학적 개념이나 사고를 학생들 스스로 구성하도록 돕는다는 것을 의미한다.

그러나 학생들의 수학적 개념형성이 학생들 스스로 구성하는 개인적 과정이라고 해서 교사가 불필요하다거나 교사의 역할이 축소된다는 것을 의미하는 것은 아니다. 오히려 NCTM(2000)에서는 반성과 의사소통은 수학 학습에서 서로 얽힌 과정이다. 교사의 명백한 관심과 계획에 의해서, 반성을 위한 의사소통은 수학 학습의 자연스런 일부가 될 수 있으며, 교실 담론을 지원하기 위해 학생들이 자유롭게 자신의 아이디어를 말할 수 있는 교실 공동체를 만드는 교사의 역할을 강조하고 있다. 이는 교실 담론에서 수학적 의사소통을 위해서 학생들이 자유롭게 다양한 표현방법을 사용하도록 격려함으로써 학생들의 오개념을 바로잡고(correct), 개념을 공유하며(share), 수학적 사고를 분명히 할(clarify) 수 있기 때문이다.

따라서 학생들의 수학적 개념형성을 촉진하는 담론을 지원하기 위한 교사의 역할을 제안하고자 한다. 수학수업에서 수학적 개념이나 사고에 관한 학생들의 설명, 질문, 그리고 정당화에 초점을 둔 담론을 촉진하기 위해서, 먼저, 교사는 학생들 간의 수학적 개념 발달 수준의 차이를 고려해야 한다. 그러므로 학생들의 개념발달 수준에 따라 조작이 가능한 구체물, 그래프와 같은 도식적 기호, 그리고 수학적 기호와 같은 상징적 기호 등을 다양하게 학생들에게 제시하며 설명할 수 있어야 한다. 또한 학생들이 보여주는 다양한 의사소통 방법은 교사로 하여금 학생들의 실제적 발달단계를 파악하도록 하는 근거가 될 수 있기 때문에 중요하다. 이를 바탕으로 교사는 학생들에게 적절하고 의미 있는 수업계획을 세울 수 있기 때문이다. 둘째, 교사는 학생들이 다양한 수학적 개념수준을 나타낼 수 있는 개방형의 구조화된 과제를 제시해야 한다. 교실 담론을 통하여 개방형 과제를 해결하면서 학생들은 수학적 개념이나 사고에 접할 기회를 더 많이 갖게 되고, 수학적 개념을 공유하고 공식화할 수 있게 된다. 교사는 개방형 과제의 제시와 함께 오류를 포함한 질문, 참조적(referential) 질문 등을 해야 하는데, 이러한 질문들은 학생들의 수학적 사고를 자극하며 이런 질문에 대한 학생들의 정당화를 통하여 수학적 개념의 발달을 가져올 수 있기 때문이다. 셋째, 그러나 무엇보다 교사는 학생들로 하여금 다른 학생들이나 교사로부터의 비판이나 비난을 걱정하지 않고 자유롭게 자신의 수학적 사고나 개념에 대한 설명, 질문, 정당화하기를 할 수 있도록 편안한 학습 환경과 분위기를 조성해야 한다. 학생들이 보이는 오류에 대해 교사가 정답인지 아닌지를 판단하지 않고, 오히려 학생들의 오류나 오개념을 담론의 주제로 다루어 거기서부터 담론을 시작함으로써 불분명한 것을 명확히 함으로써 수학적 개념을 형성할 뿐만 아니라 학생들의 담론에의 책임감과 참여를 증가시키는 방법이 될 수 있다.

수학교실에서 담론의 주요한 참여자는 교사와 학생이며, 지식을 구성하는 주체는 학생이고, 수업은 학생들에게 의미 있는 언어와 수학적 기호를 사용하는 의사소통으로 이루어진다. 따라서 학생의 수학적 개념형성을 촉진하는 담론과 의사소통방법에 대해 교사가 관심을 갖고 연구하는 것은 교사 자신의 수업개선을 목적으로 하는 교사에게는 필수적이다. 본 연구에서는 Hufferd-Ackles, Fuson과 Sherin(2004)의 분석틀에 의해 설명과 질문을 분석하고, Simon과 Blume(1996)의 분석틀에 의해 정당화하기를 분석하였는데, 학생들은 수학적 개념에 관한 개인 간 상호작용에서 개인 내 상호작용으로 전환할 때, '잠깐만요…….', '음……. 아! 알겠다!' 와 같이 정확하지 않은 언어로 표현하는 경우가 많았다. 이러한 학생들의 유성어, 몸짓, 표정 등을 긍정적인가 부정적인가에 따라 PR과 NR로 구분하였는데, 학생들이 표현하는 몸짓이나 유성어도 교실 담론에 참여하고 있음을 나타내는 또 다

른 의사소통 방법이므로 이에 대한 연구를 후속연구로 제안한다.

참 고 문 헌

강옥기 (2000). 수학과 학습지도와 평가론, 서울: 경문사.

강옥기 · 정순영 · 이환철 (2001). 중학교 수학 7, 서울: (주)두산.

강이철 (2004). Vygotsky의 중재전략을 반영한 수업사상별 비계활용 방안, 교육공학연구 **20(3)**, pp.21-52.

강이철 · 정성희 (2005). Vygotsky의 교육관: 교사론, 학생론, 방법론, 중등교육연구 **53(3)**, pp.115-139.

고호경 (2002). 그래핑 계산기를 활용한 협동학습을 통해 수학적 개념 발달과정에서 나타난 학생들의 언어적 · 사회적 상호작용에 관한 사례연구, 단국대학교 박사학위논문.

김혜정 (2003). 공간 시각화 활동을 통한 기하 학습이 공간감각능력과 의사소통능력에 미치는 효과, 한국교원대학교 석사학위논문.

나미영 (2006). 풍부한 발표환경에서 상호작용에 관한 반성적 실행연구, 서울대학교 석사학위논문.

이옥희 (2004). 중학교 과학 수업에서의 교사와 학생의 상호작용에 관한 연구. 서울대학교 박사학위논문.

이은주 (2002). 교사의 발문이 학습자의 수학적 개념 형성에 미치는 영향. 서울교육대학교 석사학위논문.

이종희 · 김선희 (2002). 수학적 의사소통. 서울: 교우사.

이호연 (2006). 중학교 과학 수업에서 나타나는 교사와 학생의 언어적 상호작용 형태 분석. 이화여자대학교 석사학위논문.

조경희 (2004). 학생들의 수학적 정당화 유형과 논쟁 구조의 관계: 선형 연립 미분방정식의 탐구과정을 중심으로, 이화여자대학교 석사학위논문.

한순미 (1999). 비고츠키와 교육: 문화-역사적 접근. 서울: 교육과학사.

David, M. M., & Lopes, M. P. (2002). Students-teacher interactions and the development of students' mathematical thinking. In S. Goodchild & L. English (Eds.), Researching mathematics classroom: A Critical Examination of methodology, 대한수학교육학회 집중세미나, **48**, 2005.

Denzin, N., & Lincoln, Y. (Eds.). (1994). *Handbook of qualitative research.* Thousand Oaks, CA: Sage.

Frid, S. (1993). *Communicating mathematics: A social sharing of language and decisions pertaining to truth and validity.* In M. Stephens, A. Waywood, D. Clarke & J. Izard (Eds.), Communicating mathematics: perspectives from classroom practice and current research. Camberwell: Austrailian Council for Education Research Press.

Hufferd-Ackles, K.; Fuson, K. C., & Sherin, M. G. (2004). Describing levels and components of a math-talk learning community. *Journal for Research in Mathematics Education*, **35**, pp.81-116.

McClain, K., & Cobb, P. (2001). A analysis of development of sociomathematical norms in one first-grade classroom. *Journal for Research in Mathematics Education*, **32**, pp.236-266.

Merriam, S. B.(1998) 정성연구방법론과 사례연구, 강윤수 · 고상숙 · 권오남 · 류희찬 · 박만구 외 공역 (2005). 서울: 교우사

National Council of Teachers of Mathematics. (1989) 수학교육과정과 평가의 새로운 방향, 구광조 · 오병승 · 류희찬, 공역 (1991) 서울: 경문사.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for teaching mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics. Reston,* VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Pimm, D. (1996). Diverse communications. In P. C. Elliot (Ed.), *Communication in mathematics*, K-12 and beyond: 1996 yearbook(pp.11-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Silver, E. A., & Smith, M. S. (1996). *Building discourse communities in mathematics classroom: A worthwhile but challenging journey.* In P. C. Elliot

(Ed.), Communication in mathematics, K-12 and beyond: 1996 yearbook(pp.20-28). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Steffe, L. P., & Gale, J. (1995) 교육과 구성주의 (2005). 서울: 학지사.

Vygotsky L. S. (1962). *Thought and Language*, E. Hanfmann & G. Vakar (Eds. & trans). Cambridge Massachusetts: M. I. T. Press.

Vygotsky L. S. (1978). *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*, Cole M. & John-Steiner V. et al(ed). Cambridge: Harvard University Press.

Developing Mathematics Concepts through Discourses in a Math Classroom

Sangsook Choi-Koh
DanKook University, Jukjeon-Dong, Gyeonggi, Korea
E-mail: sangch@dankook.ac.kr

Hyunhee Kang
Sinhyeon middle school, Sangbong-Dong Seoul, Korea
E-mail: math68@naver.com

Based on the framework of Huffered-Ackles, Fuson and Sherin(2004), data were analyzed in terms of 3 components: explaining(E), questioning(Q) and justifying(J) of students' mathematical concepts and problem solving in a math classroom. The students used varied presentations to explain and justify their mathematical concepts and ideas. They corrected their mathematical errors or misconceptions through discourses. In addition, they constructed and clarified their concepts and thinking while they were interacted. We were able to recognize there was a special feature in discourses that encouraged the students to construct and develop their mathematical concepts. As they participated in math class and received feedback on their learning, the whole class worked cooperatively in a positive way. Their discourse was improved from the level of the actual development to the level of the potential development and the pattern of interaction moved from ERE(Elicitaion-Response-Elaboration to PD(Proposition Discussion).

* ZDM classification : C53
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C60
* Key Words : Mathematical communication, Mathematical concept, Discourse: explaining-questioning-justifying, Interaction, Teacher's role.

<부록 1> 이재영의 학습 활동지

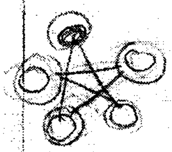
단 원	학습 요소	학습 내용	차시	2
III. 도형의 성질	1. 평면도형	1. 다각형의 대각선의 총수	학번	11121
	§1. 다각형 (p.82~p.84)	< 쓰기와 말하기 >	이름	이재영

1. 5명의 학생 재중, 윤호, 준수, 유천, 창민이가 게임을 하기 위해 옆의 친구의 손을 잡고 서 있다. 호루라기를 불면 서로 잡고 있던 손을 놓고 자신과 손을 잡지 않았던 사람들과 악수를 한다고 할 때, 다음 물음에 답해 보자.(그림과 함께 설명해도 됩니다.)

(1) 재중이가 악수해야 할 사람들을 모두 말하시오.

유천, 준수

(2) 서로 악수를 한 경우는 모두 몇 가지인지 말하고 그 이유를 설명하시오.



원래 한명당 2명이면 10가지지만

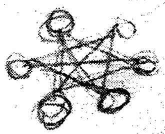
5가지

반복하는 사람이 있으므로 새로운 애들만 세면 5가지다

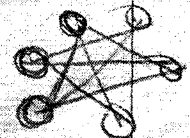
(3) 하하가 와서 6명이 함께 게임을 한다고 할 때, 서로 악수를 하는 경우는 모두 몇 가지인지 말하고 그 이유를 설명하시오.

9가지

원래 한명당 3명이면 18가지지만 반복하는 사람이 있으므로 2를 나눈다



재중 윤호 창민 준수 유천



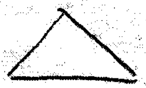
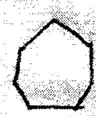
2. 학생들이 서 있는 장소를 꼭지점으로 하여 다각형을 만든다고 할 때, 다음 물음에 답해 보자.

(1) 5명의 학생들이 서 있는 장소를 꼭지점으로 하여 다각형을 만든다면 어떤 다각형이 만들어 지겠는가? 오각형

(2) 앞의 게임에서 했던 학생들의 악수는 다각형에서 무엇을 의미하는가? 그렇게 생각하는 이유를 쓰시오. 그다각형의 대각선개수

이웃하지 않는 직선 긋는법은 다각형의 대각선세는거랑 같아서

(3) 3명, 4명, 6명, 7명의 학생들로 게임을 한다고 할 때, 아래의 표를 완성하시오.

학생 수	3명	4명	6명	7명	n명
다각형	삼각형	사각형	육각형	칠각형	n각형
					
꼭지점의 개수	3	4	6	7	n
한 꼭지점에서 그은 대각선의 개수	×	1	3	4	n-3
대각선의 총수	0	2	9	14	$\frac{n(n-3)}{2}$

n(7-3)4 6

3. 다음과 같은 특징을 가지는 다각형의 대각선의 총수를 구하는 과정을 서술하시오. 2

- 8개의 내각을 가지고 있다. 팔각형
- 한 꼭지점에서 그을 수 있는 대각선의 수는 5개이다. 팔각형

<풀이>

식은 $\frac{n(n-3)}{2}$ 다

답: 20개

이유는 (팔각형) 한꼭지점에서 그을수 있는 대각선의 수는 자기와 양쪽옆에 있는 3개를 빼 5개다. 팔각형이니까 5를 곱하면 40인데 겹쳐지는 게 있으므로 2를 나눈다.