Journal of Korean
Data & Information Science Society
2007, Vol. 18, No. 4, pp. 963 ~ 972

Change Point Estimators in Monitoring the Parameters of an AR(1) plus an Additional Random Error Model[1)]

Jaeheon Lee[2)] · Ho Yun Lee[3)]

Abstract

When a control chart signals that a special cause is present, process engineers must initiate a search for and an identification of the special cause. Knowing the time of the process change could lead to identify the special cause more quickly, and to take the appropriate actions immediately to improve quality. In this paper, we propose the maximum likelihood estimator (MLE) for the process change point when a control chart is used in monitoring the parameters of a process in which the observations can be modeled as a first-order autoregressive(AR(1)) process plus an additional random error.

Keywords : 관리도, 공정 변화시점, 자기상관 공정, 잔차, 최대우도추정량

1. 서론

통계적 공정관리(statistical process control; SPC)에서 관리도(control chart)는 공정 변동의 원인이 되는 공정 모수의 변화를 탐지하는 도구로서 널리 사용되어 왔다. 공정 모수의 변화를 탐지하는 대표적인 관리도로는 Shewhart 관리도, CUSUM (cumulative sum) 관리도, 그리고 EWMA(exponentially weighted moving average) 관리도 등이 있다.

관리도는 관리통계량이 미리 설정된 관리한계를 벗어날 경우 이상원인(special cause)이 발생했다는 신호를 주며, 신호가 발생할 경우 공정을 정지시킨 후 이상원인을 찾아 이를 규명하고 제거한 후 다시 공정을 가동시키는 것이 일반적이다. 이 때 이상원인이 발생한 시점, 즉 공정의 변화시점(process change point)을 알 수 있다면 보다 빨리 이상원인을 제거하고 공정을 관리상태로 회복시킬 수 있을 것이다.

---

1) 이 논문은 2007년도 중앙대학교 연구장학기금 지원에 의한 것임.

2) 서울특별시 동작구 흑석동 221 중앙대학교 수학통계학부 교수
E-mail : jaeheon@cau.ac.kr

3) 서울특별시 동작구 흑석동 221 중앙대학교 대학원 통계학과 석사과정
E-mail : mt831a@hanmail.net

Hawkins, Qiu와 Kang(2003)은 공정의 변화시점 추정에 대하여 다음과 같이 3가지 경우로 나누어 선행연구 결과들을 언급하였다. 첫 번째는 변화시점을 제외한 모든 공정모수 값을 알고 있는 경우, 두 번째는 관리상태에서의 공정모수 값은 알고 있지만 이상상태에서의 공정모수 값은 모르는 경우, 마지막으로 세 번째는 모든 공정모수 값을 모르는 경우로 구분하였다.

Samuel, Pignatiello와 Calvin(1998)은 두 번째 경우를 가정하고 서로 독립인 정규분포 모형에서 Shewhart의 $\overline{X}$ 관리도를 수행할 경우 공정평균의 변화시점에 대한 MLE(maximum likelihood estimator)를 제안하였다. Pignatiello와 Samuel(2001)은 같은 가정하에서 CUSUM과 EWMA 관리도에서도 신호 후 이 MLE를 사용하는 것이 CUSUM과 EWMA 관리도에서 자체적으로 제공하는 추정량(built-in change point estimator) 보다 효율적임을 모의실험을 통하여 보였다. Lee와 Park(2007)은 두 번째 경우를 가정하고 정규분포의 평균과 분산이 동시에 변하는 공정에서 고정추출비(fixed sampling rate)와 변량추출비(variable sampling rate)를 사용할 때 공정의 변화시점에 대한 MLE를 제안하였다.

공정에서 관리도를 적용할 경우의 가장 기본적인 가정은 관측값들이 서로 독립이라는 것이다. 그러나 독립성 가정은 화학공정과 같은 연속형 제조공정에서 자주 위배되고 있는 실정이다. 관성적인 요소들은 한번 정해지면 다음번 정해질 때까지 품질특성치에 지속적인 영향을 미쳐 관측값들이 서로 상관되게 하며, 특히 품질특성치를 관측하는 간격이 짧을수록 상관성은 높아지고 있다.

이렇게 독립성 가정이 위배됨에도 불구하고 전통적인 관리도를 사용할 경우 오경보(false alarm)가 매우 증가하여 관리상태에서의 평균런길이(average run length)가 미리 선정한 값보다 매우 작아진다는 사실이 잘 알려져 있다. 일반적으로 이와 같이 자기상관이 존재하는 공정에서 사용하는 관리도 절차는 2가지 접근방법을 사용하고 있다. 첫 번째는 공정의 자기상관을 고려하여 관리한계 등을 조정하는 것이고, 두 번째 방법은 시계열모형을 사용하여 잔차(residual)를 계산하고 잔차에 대하여 기존의 관리도 기법을 적용하는 것이다. 자세한 사항은 Lu and Reynolds(1999)를 참고할 수 있다.

이 논문에서는 자기상관이 존재하는 모형에서 공정모수들이 변화할 때 이를 관리도를 사용하여 탐지한 후 그 변화시점에 대한 MLE를 제안한다. 선행연구로 Timmer와 Pignatiello(2003)는 자기상관이 있는 AR(1) 모형의 공정모수들의 변화시점에 대한 추정치를 제안하였다. 이 논문에서 자기상관이 있는 공정모형으로 AR(1) 모형에 랜덤오차가 추가된 모형을 사용하고, 공정모수들의 변화를 탐지할 때 잔차를 이용한다. 또한 Hawkins, Qiu와 Kang(2003)이 구분한 3가지 경우 중 가장 일반적으로 발생할 수 있는 두 번째 경우를 가정한다. 공정관리에서 관리상태에서의 공정모수 값을 모르는 경우도 있지만, Phase I 단계에서 충분히 많은 표본으로 이를 추정할 경우 참값과 크게 틀리지 않음을 가정할 수 있기 때문에 두 번째 경우가 가장 일반적이라고 생각할 수 있다.

2. 자기상관이 있는 공정 모형

X_t는 시점 t에 공정에서 추출한 관측값이라 할 때, 랜덤오차가 추가된 AR(1) 모형

은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$X_t = \mu_t + \epsilon_t \ , \ t = 1, 2, \cdots . \tag{2.1}$$

이 때 ϵ_t들은 평균과 분산이 각각 0과 σ_ϵ^2이고 서로 독립인 정규 랜덤오차(normal random error)이고, μ_t는 다음과 같은 AR(1) 모형을 가정한다.

$$\mu_t = (1-\phi)\xi + \phi\mu_{t-1} + \alpha_t \ , \ t = 1, 2, \cdots , \tag{2.2}$$

여기서 ξ는 공정평균이며 ϕ는 $|\phi| < 1$을 만족하는 AR 모수이다. 또한 α_t들은 평균과 분산이 각각 0과 σ_α^2이고 서로 독립인 정규 확률변수이고, ϵ_t들과는 독립임을 가정한다. 초기값인 μ_0가 평균과 분산이 각각 ξ와 $\sigma_\mu^2 = \sigma_\alpha^2 / (1-\phi^2)$를 따르는 정규분포를 가정할 때, X_t의 분포는 평균과 분산이 각각 ξ와 $\sigma_X^2 = \sigma_\mu^2 + \sigma_\epsilon^2$이 됨을 알 수 있다. 여기서 σ_μ^2은 장기적인 변동을 나타내며, σ_ϵ^2은 단기적인 변동과 측정오차를 나타낼 수 있다.

이 AR(1)에 랜덤오차가 추가된 공정모형은 자기상관이 있는 모형으로 많이 사용되어 왔다. (Lu and Reynolds(1999) 참조) 만일 $\sigma_\epsilon^2 = 0$인 경우에는 AR(1) 모형으로 축소되며, 표본크기가 $n > 1$인 경우 이 모형을 확장시킬 수 있다. (Reynolds, Arnold와 Baik(1996) 참조)

또한 식 (2.1)과 (2.2)로 표현되는 공정모형은 다음과 같은 ARMA(1,1) 모형과 동치임이 알려져 있다. (Box, Jenkins와 Reinsel(1994) 참조)

$$(1-\phi B)X_t = (1-\phi)\,\xi + (1-\theta B)\,\gamma_t, \tag{2.3}$$

여기서 γ_t들은 평균과 분산이 각각 0과 σ_γ^2이고 서로 독립인 정규 확률변수, θ는 MA(moving average) 모수, ϕ와 ξ는 식 (2.2)에 정의된 것과 동일하며, B는 $BX_t = X_{t-1}$를 만족시키는 후진작용소(backshift operator)를 나타낸다. ARMA(1,1) 모형의 모수 ϕ, θ, ξ, 그리고 σ_γ^2는 AR(1)에 랜덤오차가 추가된 모형의 모수 ϕ, ξ, σ_α^2, 그리고 σ_ϵ^2로 표현할 수 있으며, 반대의 경우로도 표현할 수 있다. (Lu and Reynolds(1999) 참조)

3. 공정 변화시점의 추정

공정모수의 변화는 다음과 같이 공정평균 ξ, 공정분산에 관련된 σ_α^2 또는 σ_ϵ^2, 그리고 AR 모수인 ϕ의 변화 등 3가지를 고려한다.

3.1 공정평균 ξ에 대한 공정 변화시점의 추정

먼저 공정모형의 평균이 관리상태에서의 값 ξ_0에서 ξ_1로 변화하는 것을 탐지하는 문제를 고려해 보자. 변화량은 편의상 $\delta=(\xi_1-\xi_0)/\sigma_X$로 표시하고, ξ_0와 σ_X는 알려져 있지만 δ는 모름을 가정한다. 이 경우 공정평균의 변화시점에 대한 MLE는 Lee, Han과 Jung(2007)이 제안하였고, 이에 대하여 간략하게 요약하면 다음과 같다.

AR(1)에 랜덤오차가 추가된 공정모형과 동치인 식 (2.3)의 공정모형에서 시점 t에서의 잔차는 시점 $t-1$에서 계산된 MMSE(minimum mean square error) 예측치로부터

$$e_t = X_t - \xi_0 - \phi(X_{t-1}-\xi_0) + \theta e_{t-1} \tag{3.1}$$

로 표현된다. (Box, Jenkins와 Reinsel(1994) 참조) 만일 공정평균이 시점 $t=\tau$와 $t=\tau+1$ 사이에 ξ_0에서 ξ_1으로 변화한다고 가정하자. 그러면 잔차는

$$c_t(\tau) = \frac{\theta^{t-\tau-1}(\phi-\theta)-\phi+1}{1-\theta}\sigma_X \tag{3.2}$$

라 할 때,

$$e_t = \begin{cases} \gamma_t\,, & t \le \tau \\ c_t(\tau)\,\delta + \gamma_t\,, & t \ge \tau+1 \end{cases}$$

가 되므로 기대값은

$$E(e_t) = \begin{cases} 0\,, & t \le \tau \\ c_t(\tau)\delta\,, & t \ge \tau+1 \end{cases}$$

이 되고 분산은 모든 t에 대하여 $Var(e_t)=\sigma_\gamma^2$이 된다. (Lu and Reynolds(1999) 참조) 즉, 공정이 변화한 후 이 잔차의 기대값은 점점 감소하여 $(1-\phi)\delta\sigma_X/(1-\theta)$로 수렴하게 되며, 잔차들은 서로 독립이고 평균 $E(e_t)$와 분산 σ_γ^2을 갖는 정규분포를 따르게 된다. 따라서 공정평균 ξ의 변화를 탐지하는 관리도는 잔차의 평균의 변화를 탐지하는 문제로 귀결되며, 측정된 잔차를 통계량으로 사용하는 Shewhart, CUSUM, 그리고 EWMA 관리도 등을 적용할 수 있다.

관리상태에서의 제일 마지막 시점인 τ를 공정 변화시점이라 정의하고, $T(>\tau)$가 관리도에서 이상상태의 신호를 준 시점이라 하자. 그러면 $X_1, X_2, \cdots, X_\tau$은 관리상태에서 추출한 관측값이고, $X_{\tau+1}, X_{\tau+2}, \cdots, X_T$는 이상상태에서 추출한 관측값이 된다. Lee, Han과 Jung(2007)은 식 (3.1)에 의하여 계산된 잔차들을 이용하여 공정 변화시점 τ의 MLE를 다음과 같이 제안하였다.

$$\hat{\tau}_{\xi} = \arg\max_{0 \le t < T} \left\{ \frac{\left(\sum_{i=t+1}^{T} c_i(t)\, e_i \right)^2}{\sum_{i=t+1}^{T} c_i(t)^2} \right\}.$$

여기서 $c_i(t)$는 식 (3.2)에 정의되어 있다. 상세한 유도과정은 Lee, Han과 Jung(2007)을 참조할 수 있다.

3.2 분산 σ_α^2 또는 σ_ϵ^2에 대한 공정 변화시점의 추정

공정의 분산에 관련된 σ_α^2 또는 σ_ϵ^2이 변화하는 경우를 고려해 보자. σ_α^2과 σ_ϵ^2는 식 (2.3)의 ARMA(1,1) 모형의 σ_γ^2과는 다음의 관계가 있다.

$$\sigma_\gamma^2 = \frac{\phi}{(\phi-\theta)(1-\phi\theta)}\sigma_\alpha^2\,,\ \ \sigma_\gamma^2 = \frac{\phi}{\theta}\sigma_\epsilon^2\,. \tag{3.3}$$

따라서 σ_α^2 또는 σ_ϵ^2이 변화한다는 것은 σ_γ^2이 변화한다는 것과 동치이기 때문에, 공정이 관리상태인 경우에는 $\sigma_{\gamma 0}^2$이고 이상상태인 경우에는 $\sigma_{\gamma 1}^2$으로 변화하는 것을 탐지하는 경우로 생각할 수 있다. 여기서 $\sigma_{\gamma 0}^2$은 $\sigma_{\alpha 0}^2$ 또는 $\sigma_{\epsilon 0}^2$, 그리고 $\sigma_{\gamma 1}^2$은 $\sigma_{\alpha 1}^2$ 또는 $\sigma_{\epsilon 1}^2$이 사용된 값으로 정의한다. 또한 $\sigma_{\gamma 0}^2$은 알려져 있지만 $\sigma_{\gamma 1}^2$은 모름을 가정한다. 이 경우 잔차

$$e_t = X_t - \xi - \phi(X_{t-1} - \xi) + \theta e_{t-1}$$

는 γ_t가 됨을 쉽게 알 수 있으며, 여기서 e_t, 즉 γ_t의 분포는 $t \le \tau$인 경우에는 $N(0,\sigma_{\gamma 0}^2)$이고 $t \ge \tau+1$인 경우에는 $N(0,\sigma_{\gamma 1}^2)$을 따르게 된다. 결국 σ_α^2 또는 σ_ϵ^2의 변화를 탐지하는 절차는 잔차의 분산을 탐지하는 것과 동일하므로, 일반적으로 공정의 분산을 탐지하는데 사용하는 관리도, 예를 들면 잔차의 제곱을 통계량으로 사용하는 Shewhart, CUSUM, 그리고 EWMA 관리도 등을 적용할 수 있다.

이 경우 관리도에서 이상신호를 준 시점을 T라 할 때, 공정의 변화시점에 대한 MLE는

$$\hat{\tau}_{\sigma^2} = \arg\min_{0 \le t < T} \left\{ (T-t)\left\{ \ln\left(\frac{\sum_{i=t+1}^{T} e_i^2}{T-t} \right) + 1 \right\} + t\ln(\sigma_{\gamma 0}^2) + \frac{\sum_{i=1}^{t} e_i^2}{\sigma_{\gamma 0}^2} \right\} \tag{3.4}$$

이 된다. 식 (3.4)에 대한 상세한 유도과정은 부록 A에 수록하였다.

3.3 AR 모수 ϕ에 대한 공정 변화시점의 추정

공정모형에서 AR 모수 ϕ가 변화하는 경우 동치모형인 ARMA(1,1)은

$$X_t = \xi + \phi_t (X_{t-1} - \xi) + \gamma_t - \theta\, \gamma_{t-1} \tag{3.5}$$

로 표현되며, MMSE 예측치는

$$\widehat{X}_t = \xi + \phi_0 (X_{t-1} - \xi) - \theta\, e_{t-1} \tag{3.6}$$

이 된다. 위의 식에서 ϕ_t는 $t \le \tau$인 경우 ϕ_0이고 $t \ge \tau+1$인 경우 ϕ_1으로 정의할 수 있다. 그러나 ϕ가 변화하는 경우에는 식 (3.3)에서 알 수 있듯이 σ_γ^2도 변화하기 때문에 γ_t의 분포는 $t \le \tau$인 경우에는 $N(0, \sigma_{\gamma 0}^2)$이고 $t \ge \tau+1$인 경우에는 $N(0, \sigma_{\gamma 1}^2)$을 따른다고 할 수 있으며, 이 때 $\sigma_{\gamma 0}^2$은 ϕ_0, 그리고 $\sigma_{\gamma 1}^2$은 ϕ_1이 사용된 값으로 정의할 수 있다.

잔차 e_t는 식 (3.5)와 (3.6)을 이용하면, $t \le \tau$인 경우에는 $e_t = \gamma_t$가 되고 $t \ge \tau+1$인 경우에는 $k \ge 1$에 대하여

$$\begin{aligned} e_{\tau+k} &= \gamma_{\tau+k} + (\phi_1 - \phi_0) \sum_{i=1}^{k} \theta^{i-1} (X_{\tau+k-i} - \xi) \\ &= \gamma_{\tau+k} + (\phi_1 - \phi_0) \left[\sum_{i=1}^{k} \phi_1^{i-1}\, \gamma_{\tau+k-i} + \frac{(\phi_0 - \theta)(\phi_1^k - \theta^k)}{\phi_1 - \theta} \sum_{i=1}^{\tau-1} \phi_0^{i-1}\, \gamma_{\tau-i} \right] \end{aligned} \tag{3.7}$$

로 표현된다. 식 (3.7)에 대한 상세한 유도과정은 부록 B에 수록하였다.

따라서 잔차 e_t는 서로 독립인 정규분포를 따르며, 기대값은 모든 t에 대하여 $E(e_t) = 0$이고, 분산은 $t \le \tau$인 경우에는 $Var(e_t) = \sigma_{\gamma 0}^2$이고 $t \ge \tau+1$인 경우에는

$$\begin{aligned} Var\,(e_{\tau+k}) &= \sigma_{\gamma 1}{}^2 \left[1 + \frac{(\phi_1 - \phi_0)^2 (1 - \phi_1^{2(k-1)})}{1 - \phi_1^2} \right] \\ &+ \sigma_{\gamma 0}{}^2 \left[(\phi_1 - \phi_0)^2 \phi_1^{2(k-1)} + \frac{(\phi_1 - \phi_0)^2 (\phi_0 - \theta)^2 (\phi_1^k - \theta^k)^2 (1 - \phi_0^{2(\tau-1)})}{(\phi_1 - \theta)^2 (1 - \phi_0^2)} \right] \end{aligned} \tag{3.8}$$

이 된다. 따라서 공정모형에서 AR 모수 ϕ가 변화하는 것을 탐지하는 절차는 3.2절과 같이 잔차의 분산을 탐지하는 것과 동일하게 되므로, 공정의 분산을 탐지하는데 사용하는 관리도의 절차를 적용시킬 수 있다. 단, 3.2절에서 $\sigma_{\gamma 1}^2$을 식 (3.8)로 간주하면 된다. 또한 이와 같은 관리도에서 이상신호를 준 시점을 T라 할 때, 공정의 변화시점에 대한 MLE $\widehat{\tau_\phi}$은 식 (3.4)와 동일하게 된다.

4. 결론

관리도를 사용하여 제조 공정을 탐지하는 경우 이상신호 후 그 원인의 발생시점을 추정할 수 있다면 이상원인을 보다 빠르고 정확하게 규명하고 이를 제거하여 공정을 관리상태로 회복시킬 수 있을 것이다.

이 논문에서는 자기상관이 존재하는 공정으로 AR(1) 모형에 랜덤오차가 추가된 모형을 사용하고, 공정모수들의 변화할 때 잔차들의 특성을 연구하고 관리도를 사용하여 이상신호가 주어졌을 때 공정의 변화시점에 대한 MLE를 제안하였다. 여기서 공정모수들의 변화로는 공정평균 ξ, 공정분산에 관련된 σ_α^2 또는 σ_ϵ^2, 그리고 AR 모수인 ϕ의 변화 등 3가지를 고려하였다. (공정평균 ξ의 변화에 대한 내용은 Lee, Han과 Jung(2007)의 연구를 참조하였음)

이 논문은 관리도에서 표본크기 $n=1$을 사용함을 가정하고 작성하였다. 선행연구에서 표본크기와 표본추출간격의 표본추출비(sampling rate)를 일정하게 할 경우 CUSUM과 EWMA 관리도에서는 $n=1$인 경우가 더 효율적이라는 사실을 밝힌 바 있다. (Reynolds와 Stoumbos(2004) 참조) 만일 표본크기가 $n>1$인 경우에는 식 (2.1)에서 X_t를 $\overline{X_t}$, ϵ_t를 $\overline{\epsilon_t}$, 그리고 σ_ϵ^2을 σ_ϵ^2/n으로 대체하면 논문의 결과를 그대로 이용할 수 있다.

실제 공정이 이 논문에서 가정한 공정모형과 동일한 경우, 제안된 공정 변화시점의 MLE를 사용할 경우 공정을 효율적으로 관리하는데 도움이 될 것이라 판단된다.

부록 A: 식 (3.4)의 유도

σ_α^2 또는 σ_ϵ^2에 변화가 있는 경우 e_t의 분포는 $t \le \tau$인 경우 $N(0,\sigma_{\gamma 0}^2)$이고 $t \ge \tau$인 경우 $N(0,\sigma_{\gamma 1}^2)$이 되고, τ와 $\sigma_{\gamma 1}^2$은 모름을 가정한다. 전차 $e_1, e_2, \cdots, e_T$가 주어진 경우 로그우도비함수(log likelihood function)는

$$\ln L(\tau, \sigma_{\gamma 1}^2 \mid e_1, \cdots, e_T) = (2\pi)^{-\frac{T}{2}} - \frac{\tau}{2}\ln(\sigma_{\gamma 0}^2) - \frac{T-\tau}{2}\ln(\sigma_{\gamma 1}^2) - \frac{\sum_{i=1}^{\tau} e_i^2}{2\sigma_{\gamma 0}^2} - \frac{\sum_{i=\tau+1}^{T} e_i^2}{2\sigma_{\gamma 1}^2}$$

으로 표현된다.

만일 τ를 알고 있다고 가정하면, $\sigma_{\gamma 1}^2$의 MLE는

$$\widehat{\sigma_{\gamma 1}^2} = \frac{\sum_{i=\tau+1}^{T} e_i^2}{T-\tau}$$

이 되고 이 추정량을 로그우도비함수에 대입하면

$$\ln L(\tau \mid e_1, \cdots, e_T) = (2\pi)^{-\frac{T}{2}} - \frac{1}{2}\left[(T-\tau)\left\{\ln\left(\frac{\sum_{i=\tau+1}^{T} e_i^2}{T-\tau}\right)+1\right\} + \tau\ln(\sigma_{\gamma 0}^2) + \frac{\sum_{i=1}^{\tau} e_i^2}{\sigma_{\gamma 0}^2}\right]$$

을 얻는다. 따라서 τ의 MLE는 식 (3.4)와 같이

$$\widehat{\tau_{\sigma^2}} = \arg\min_{0 \le t < T}\left\{(T-t)\left\{\ln\left(\frac{\sum_{i=t+1}^{T} e_i^2}{T-t}\right)+1\right\} + t\ln(\sigma_{\gamma 0}^2) + \frac{\sum_{i=1}^{t} e_i^2}{\sigma_{\gamma 0}^2}\right\}$$

이 된다.

부록 B: 식 (3.7)의 유도

먼저 $Z_t = X_t - \xi$라 할 때, Z_t는

$$\begin{aligned} Z_t &= \gamma_t + (\phi_0 - \theta)\sum_{i=1}^{t-1}\phi_0^{i-1}\gamma_{t-i}, \quad t \le \tau \\ Z_{\tau+k} &= \gamma_{\tau+k} + (\phi_1 - \theta)\sum_{i=1}^{k}\phi_1^{i-1}\gamma_{\tau+k-i} + (\phi_0 - \theta)\phi_1^k\sum_{i=1}^{\tau-1}\phi_0^{i-1}\gamma_{\tau-i}, \quad k \ge 1 \end{aligned} \tag{B.1}$$

가 됨을 알 수 있다. (Box, Jenkins와 Reinsel(1994) 참조) 이 Z_t와 $Z_{\tau+k}$의 표현식을 이용하여 식 (3.7)의 첫째 줄의 식에서 둘째 줄의 식을 유도하였지만, 그 계산 과정이 복잡하여 여기서는 수학적 귀납법(mathematical induction)을 사용하여 증명하려고 한다.

먼저 $k=1$인 경우

$$\begin{aligned} e_{\tau+1} &= \gamma_{\tau+1} + (\phi_1 - \phi_0)Z_\tau \\ &= \gamma_{\tau+1} + (\phi_1 - \phi_0)\left\{\gamma_\tau + (\phi_0 - \theta)\sum_{i=1}^{\tau-1}\phi_0^{i-1}\gamma_{\tau-i}\right\} \end{aligned}$$

가 되므로, 성립함을 알 수 있다. $k=l$인 경우

$$\begin{aligned} e_{\tau+l} &= \gamma_{\tau+l} + (\phi_1 - \phi_0)\sum_{i=1}^{l}\theta^{i-1}Z_{\tau+l-i} \\ &= \gamma_{\tau+l} + (\phi_1 - \phi_0)\left[\sum_{i=1}^{l}\phi_1^{i-1}\gamma_{\tau+l-i} + \frac{(\phi_0 - \theta)(\phi_1^l - \theta^l)}{\phi_1 - \theta}\sum_{i=1}^{\tau-1}\phi_0^{i-1}\gamma_{\tau-i}\right] \end{aligned} \tag{B.2}$$

가 성립함을 가정한다면, $k=l+1$ 인 경우

$$\begin{aligned} e_{\tau+l+1} &= \gamma_{\tau+l+1} + (\phi_1 - \phi_0) \sum_{i=1}^{l+1} \theta^{i-1} Z_{\tau+l+1-i} \\ &= \gamma_{\tau+l+1} + (\phi_1 - \phi_0) \left[Z_{\tau+l} + \theta \sum_{i=1}^{l} \theta^{i-1} Z_{\tau+l-i} \right] \end{aligned}$$

이 되고, $Z_{\tau+l}$ 과 $(\phi_1 - \phi_0) \sum_{i=1}^{l} \theta^{i-1} Z_{\tau+l-i}$ 를 각각 식 (B.1)과 (B.2)를 이용하여 대체하면

$$\begin{aligned} e_{\tau+l+1} = \gamma_{\tau+l+1} + (\phi_1 - \phi_0) \Bigg[& \gamma_{\tau+l} + (\phi_1 - \theta) \sum_{i=1}^{l} \phi_1^{i-1} \gamma_{\tau+l-i} + (\phi_0 - \theta) \phi_1^{l} \sum_{i=1}^{\tau-1} \phi_0^{i-1} \gamma_{\tau-i} \\ & + \theta \sum_{i=1}^{l} \phi_1^{i-1} \gamma_{\tau+l-i} + \theta \frac{(\phi_0 - \theta)(\phi_1^{l} - \theta^{l})}{\phi_1 - \theta} \sum_{i=1}^{\tau-1} \phi_0^{i-1} \gamma_{\tau-i} \Bigg] \end{aligned}$$

가 된다. 이를 정리하면

$$e_{\tau+l+1} = \gamma_{\tau+l+1} + (\phi_1 - \phi_0) \left[\sum_{i=1}^{l+1} \phi_1^{i-1} \gamma_{\tau+l+1-i} + \frac{(\phi_0 - \theta)(\phi_1^{l+1} - \theta^{l+1})}{\phi_1 - \theta} \sum_{i=1}^{\tau-1} \phi_0^{i-1} \gamma_{\tau-i} \right]$$

가 되므로, 증명을 완성하였다.

참고문헌

1. Box, G. E. P., Jenkins, G. M., and Reinsel, G. C. (1994). *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, 3rd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
2. Hawkins, D. M., Qiu, P., and Kang, C. W. (2003). The Changepoint Model for Statistical Process Control, *Journal of Quality Technology*, 35, 355-366.
3. Lee, J., Han, J. H., and Jung, S. H. (2007). Estimation of the Change Point in Monitoring the Mean of Autocorrelated Processes, *The Korean Communications in Statistics*, 14, 155-167.
4. Lee, J. and Park, C. (2007). Estimation of the Change Point in Monitoring the Process Mean and Variance, to appear in *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, 36.
5. Lu, C. W. and Reynolds, M. R., Jr. (1999). EWMA Control Charts for Monitoring the Mean of Autocorrelated Processes, *Journal of Quality*

Technology, Vol. 31, 166-188.
6. Pignatiello, J. J., Jr. and Samuel, T. R. (2001). Estimation of the Change Pint of a Normal Process Mean in SPC Applications, *Journal of Quality Technology*, 33, 82-95.
7. Reynolds, M. R., Jr. Arnold, J. C., and Baik, J. W. (1996). Variable Sampling Interval $\overline{X}$ Charts in the Presence of Correlation, *Journal of Quality Technology*, 28, 12-30.
8. Reynolds, M. R., Jr. and Stoumbos, Z. G. (2004). Control Charts and the Efficient Allocation of Sampling Resources, *Technometrics*, 46, 200-214.
9. Samuel, T. R., Pignatiello, J. J., Jr., and Calvin, J. A. (1998). Identifying the Time of a Step Change with $\overline{X}$ Control Charts, *Quality Engineering*, 10, 521-527.
10. Timmer, D. H. and Pignatiello, J. J., Jr. (2003). Change Point Estimates for the Parameters of an AR(1) Process, *Quality and Reliability Engineering International*, 19, 355-369.

[2007년 10월 접수, 2007년 11월 채택]