Journal of Korean
Data & Information Science Society
2007, Vol. 18, No. 4, pp. 859 ~ 868

On teaching the concept of continuous functions in calculus

Hong Kyung Pak[1] · Tae Wan Kim[2]

Abstract

The present paper deals with the ordering problem for how to teach mathematical concepts successfully. Main object is the concept of continuous functions which is fundamental in analysis and topology. At first, the theoretical organization of this concept is investigated through several texts in related field, calculus, analysis and topology. And next, the historical order for this concept from the viewpoint of problem-solving is considered. Based on these two materials, we suggest a lecturing organization order in order to establish a balanced unification of three concepts - intuitive, logical and formal concepts.

Keywords : 개념학습, 논리적 개념, 미적분학, 연속 함수, 위상수학, 직관적 개념, 형식적 개념

1. 서론

수학적 개념을 어떻게 지도할 것인가는 수학교육에 있어서 근본적이며 본질적인 문제의 하나이다. 본 논문에서는 특히 개념지도의 순서문제를 다룬다. 다시 말하면, 개념지도에 있어서 순서를 어떻게 정할 것인가에 주목한다. 개념지도의 순서는 크게 3가지 유형으로 나뉜다([김용운(1986)]). 그 중 2가지는 원료로서 역사적 발생을 강조하는 역사적 순서와 이론의 미와 힘을 강조하는 이론적 체계이다. 그리고 이들의 결합인 강의적 체계순서가 있다.

역사적 순서는 역사적 변천과정을 그대로 순서로 택하는 것이다. 이것은 역사적인 발견의 맥락을 간접 체험함으로써 학생들의 자연스러운 학습동기나 개념형성에 도움이 된다. 반면에 오랜 시간을 요할 뿐만 아니라 이론적 체계를 형성하는데 취약하다는 난점이 있다. 사실 수학사는 수많은 수학 전문가들의 수많은 성과들의 누적이다.

---

1) Department of Computer Science, Daegu Haany University
hkpak@dhu.ac.kr

2) Basic Science Research Institute, Daegu Haany University
nwtwkim@hanmail.net

따라서 전문가들의 발자취라 할 수 있는 이러한 역사적 순서를 초심자인 학생들이 그대로 답습하는 것은 통상 많은 무리가 따른다.

이론적 체계는 구조적인 측면에서 단순한 것에서 복잡한 것으로, 쉬운 것에서 어려운 것으로 구성된다. 말 그대로 여기에는 순서가 없고 체계가 있다. 역사성 대신에 구조의 단순성이나 용이성에 따라 순서를 택한다. 현재 대부분의 교과서의 순서는 학습의 효과면에서 이론적 체계를 따른다.

우리의 주된 관심사는 문제해결의 측면에서 강의적 체계순서를 구성하기 위해 역사적 순서와 이론적 체계의 두 원료를 어떻게 결합하는가에 있다. 말하자면 역사성과 체계성이라는 2가지 순서 기준의 깊은 조사를 바탕으로 문제제기와 문제해결이라는 상호작용의 입장에서 개념의 강의적 체계순서를 정하고자 하는 것이다.

[박홍경 외2(2005)]에서는 기하학의 기본적인 1차원 측도의 하나인 각에 대해 강의적 체계순서를 정하는 문제를 고려하였다. 또한 각의 개념은 도형의 개념과 관계하여 정의되기 때문에 도형의 개념의 강의적 체계순서도 논의하였다. 같은 맥락에서 본 논문에서는 함수의 연속성을 대상으로 삼는다. 이 개념은 극한 개념을 바탕으로 하기 때문에 해석학에 관련되고 또한 연속 함수의 특수한 경우인 동형사상(homeomorphism)에 불변인 성질을 연구하는 위상수학에 관련한다. 함수의 연속성은 함수의 개념과 더불어 성장하였다. 이러한 점에서 여기서는 함수 개념의 강의적 체계순서도 함께 논의된다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저 함수의 연속성에 관해 교양수학에서 대부분의 교과서가 따르는 전형적인 개념지도의 순서를 조사한다. 이 순서는 사실 함수의 연속성에 관한 이론적 체계임을 확인한다. 다음으로 함수의 연속성에 관한 역사적 순서를 조사한다. 이것은 해석학과 위상수학의 역사 속에서 다루어진다. 특히 문제해결의 측면에서 크게 7단계로 나누어 논의된다. 이로부터 1변수 실함수론의 경우 역사적 순서는 정확히 이론적 체계의 역순임을 관찰한다. 끝으로 함수의 연속성에 관해 강의적 체계순서를 위한 방안을 제안한다. 이 체계순서는 기본적으로 역사적 순서를 따르며 직관적, 논리적, 형식적 개념을 균형적이고 통합적으로 형성하는 목적을 달성하기 위함이다.

2. 교양수학에서 함수의 연속성에 관한 이론적 체계

교양수학에서는 통상 중등과정의 수학과는 달리 체계성을 강조하는 방식으로 개념지도를 한다. 그것은 기초부터 명확하고 체계적으로 개념을 형성하는 것이 향후의 순수수학에 대한 이해나 응용수학에 대한 활용이 높아지기 때문이다. 이러한 의미에서 1변수 실함수의 연속성에 관한 순서를 조사해보면 대부분의 교재는 <그림1>과 같은 흐름을 따른다. 가령, 여기서는 [Burk(1978)], [中尾愼宏(1987)] 등을 든다. 사실 이 순서를 따르지 않는 교재를 찾기 어려운데 가령 [Hairer, Wanner(2000)] 정도를 들 수 있다.

집합론 → 실수론 → 극한 → 연속성 → 미분 ⇢ 정적분

⇅ ↗

부정적분

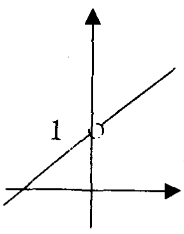
<그림1>

이를 좀더 구체적으로 기술하면 다음과 같다. 먼저 집합론에서는 간단한 수리논리, 집합과 함수, 자연수 등의 개념을 다룬다. 여기서 함수의 개념은 특수한 관계나 대응규칙으로서 형식적 정의로 규정한다.

집합론에서 실수론으로의 이행은 크게 2가지 방향이 있다. 하나는 자연수로부터 실수의 개념을 도입하는 것이다. 자연수로부터 정수를 정의하고 이로부터 유리수를 정의한다. 유리수에서 실수로의 정의는 통상 Cantor의 완비성「Cauchy 수열은 수렴」이나 Dedekind의 연속성 「절단(cut)에 의한 정의」을 따른다.

다른 하나는 실수를 집합론의 입장에서 공리적으로 규정하는 것이다. 통상 연산성질, 대소관계, 그리고 유리수가 갖지 못하는 위상적 성질인 연속성을 활용하여 실수를 전순서완비체(totally ordered complete field)로서 정의한다. 연속성은 Dedekind의 절단이나 Weierstrass의 최소상계(least upper bound)에 의해 규정된다. 실수는 직관적으로 1차원 유클리드공간으로서 수직선과 동치이다.

다음으로 극한의 개념은 수열의 극한을 경유하여 함수의 극한을 정의하는 경우와 경유하지 않는 경우로 나뉜다. 전자의 경우는 Bolzano의 단조수렴정리「모든 유계 단조수열은 수렴한다」와 부분수렴수열에 관한 Bolzano-Weierstrass정리「모든 유계 무한집합은 집적점을 가진다」를 얻는다. 이들 두 정리는 각각 Cantor의 완비성과 동치이다. 극한에 있어서는 함수의 직관적 정의로서 1변수 실함수를 고려한다. 이러한 함수의 경우에 극한에 대한 개념은 논리적인 정의, 소위 ϵ-δ법에 따른다. 동시에 이는 직관적으로 그림으로 표현된다. 또한 직관적인 이해와 형식적 정의를 잇는 것으로서 계산에 도움이 되는 좌극한과 우극한에 의한 동치적인 성질을 얻는다(<그림2>와 <그림3>).

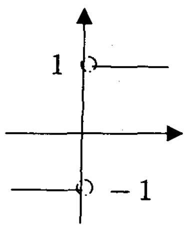


$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0-} f(x)$$

<그림2>



$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

$\lim_{x \to 0} f(x)$ 존재안함

$$\lim_{x \to 0+} f(x) \neq \lim_{x \to 0-} f(x)$$

<그림3>

함수의 극한은 자연스럽게 함수의 연속성을 정의한다. 논의는 여전히 1변수 실함수를 대상으로 한다. 여기에는 크게 2가지 접근방법으로 나뉜다. 하나는 해석학의 입장에서 정의하는 것이며 다른 하나는 위상수학의 입장에서 정의하는 것이다. 전자는 연속성의 국소적 정의이며 논리적 정의이다. 즉 한 점에서 연속이란 그 점에서 함수의 극한이 존재하고 함수값이 정의될 때 함수의 극한과 함수값이 일치할 때이다. 직관적인 이해를 돕기 위해 극한은 그림으로도 표현한다. 가령 <그림2>에서는 $f(0) = 1$으로 정의하면 f는 실수 전체에서 연속이다. <그림3>의 경우에는 f는 $x = 0$에서 불연속이다. 후자는 연속성의 대역적 정의에 해당하며 형식적 정의로 규정된다. 즉 개집합의 원상이 개집합일 때를 함수가 연속이라고 정의한다. 한편 이들 두 정의는 위상구조가 usual topology일 때 일치한다.

이러한 1변수 실함수에 관한 연속성의 정의가 완료되면 해석학의 입장에서는 논리적으로 확장하여 다변수 함수론으로 진행되고 또는 동시에 복소함수론으로 나아간다. 더욱이 공간을 보다 확장하여 Hilbert 공간과 같은 해석적 공간에서 정의한다. 한편 위상수학의 입장에서는 연속성을 규정하는 공간으로서 가장 일반적이고 추상적인 것으로서 위상공간에서 함수의 연속성을 형식적 정의에 의해 규정한다.

3. 함수의 연속성에 관한 역사적 순서

이제 함수의 연속성에 관한 역사적 순서를 조사한다. 놀랍게도 이것은 앞에서 논의한 이론적 체계의 역순을 포함한다. 특히 문제해결의 측면에서 크게 7단계로 나눌 수 있다. 역사적으로 구체적인 사항은 [김용운, 김용국(1986)], [本間龍雄(1995)], [井關淸志, 近藤基吉(1977)], [野口宏(1971)], [Boyer, Merzbach(2000)], [Eves (1997)] 등을 참조한다.

3-1 직관적 초등적 개념 형성 : 18세기 초까지

이 당시까지는 함수의 개념은 직관적이었을 뿐만 아니라 함수의 연속성 개념 또한 직관적이었다. 함수의 연속성에 대한 논의보다 함수 자체의 개념화가 선행되는 것은 당연하다.

함수(function)의 어원은 Leibniz가 functio(접선, 작용 등)라는 그리스어를 사용한 것에서 비롯한다. 이것을 函數라고 번역한 것은 19세기말 중국의 발음에 기인한다. 일본에서는 關數라고 한다. 이후 Euler에 의해 함수란 변수 x 또는 상수로 표현되는 식 $f(x)$로 표기하고 이를 곡선 또는 직선의 표현으로 이해하였다. 다루는 함수는 주로 1변수 실함수로서 다항함수, 무리함수, 지수 로그함수, 삼각함수와 같은 초등함수였다. 함수뿐만 아니라 그 연속성의 개념도 직관적 개념이었다. 즉 종이위에 연필을 떼지 않고 그릴 수 있는 것을 연속함수로 보는 정도의 직관적인 수준에 그쳤다.

사실 근대 수학에서는 개념이 직관적으로 명백한 경우에는 별로 문제삼지 않았다. 근대 수학이란 17세기 Descartes에 의한 수학 합리주의에서 시작하여 18세기의 수학 지상주의로 모험적 긍정적 인식이 지배적이던 시절을 말한다. 말하자면 근대 수학은 개념화보다 문제해결 및 그 응용에 관심이 높았던 양적 팽창기였다. 이러한 수학적 유용성으로 인해 개념에 특별한 문제가 드러나지 않는 한 용인되었던 것이다.

개념화에 주목하는 비판적 사고는 근대 수학의 팽창과 더불어 서서히 형성되었으며 특히 철학에서 18세기 Kant의 영향이 크다. 본격적인 수학의 개념화 작업은 19세기 비판주의시기에 수학전반에서 일어나기 시작했다. 그 결과 나타난 집합론은 수학의 기초론으로 이어졌고 이 집합론적 수학관은 수학에 철학적 논의를 불러 일으켰으며 이로 인해 수학의 엄밀화 작업이 시도되어 현대 수학으로 나아가는 계기를 마련하였다.

3-2 직관적 개념에 대한 문제의식 발단 및 모색 (해석학적 배경) : 18세기 중엽

미적분학은 18세기에 접어들어 활발한 성장을 거듭하였다. 미분방정식론, 급수론, 변분법 등 많은 결과가 얻어졌다. 그러던 중 D'Alembert는 Euler에 비판적인 입장을 취하면서 함수의 극한이나 미분이 무한소 해석의 기초임을 지적하고([김용운, 김용국

(1986)]), 무한급수가 연속적인지 나아가 미분가능인지 등에 대한 해의 상태에 주목하였다([Boyer, Merzbach(2000)]). 또한 Fourier는 미분방정식의 급수론에 의한 해법에서 해의 연속성에 대한 문제를 인식하고(구체적인 함수는 [김용운, 김용국(1986)] 참조), 미분방정식의 해로 표현된 무한급수가 연속인지 미분가능한지를 조사하였다.

이러한 직관적 개념에 대한 문제점은 함수의 개념을 명료화하도록 요구하였고 특히 미적분학의 발달로 초등함수가 아닌 함수들에 대해서도 인식하기 시작하였다. 이러한 함수들은 더 이상 그림으로 표현할 수 없는 경우가 많았다. 연속성에 있어서도 직관적으로 판정하기 어려운 함수들을 쉽게 구성할 수 있게 되었다.

3-3 문제해결을 위한 논리적 시도(미적분학 정비) 및 보다 근본적인 문제인식 : 19세기 중엽

Cauchy는 D'Alembert의 주장에 따라 함수의 연속성 개념을 위해 함수의 극한에 대한 개념화를 시도하였다. 그는 해석학 기초 확립을 위한 기반 마련하였고 함수론 연구에도 큰 성과를 내었다. 먼저 Cauchy(1821)는 함수에 대한 개념을 정비했다. Euler는 식으로 표현된다는 조건을 붙였지만 그는 함수를 단지 변수 사이의 관계로 규정함으로써 보다 간결하고 일반적으로 파악하였다. 즉 종래의 기하학적 이미지(그래프)나 대수적 식이라는 기하학이나 대수학과의 연관성과는 독립적인 개념으로 인식하는 계기를 마련했다. 물론 지금의 수학에서 보면 도형, 방정식, 함수는 다른 표현일 뿐 동일한 것으로 인식된다. 다만 함수의 개념 형성 초기에 도형이나 방정식과는 독립적으로 다루어진 것은 획기적인 진전이었다는 점을 지적해 둔다. 이러한 진전은 Dirichlet에 의해 오늘날의 현대적 추상적 함수의 개념으로 나아갔다. 즉 함수가 대상들 간의 특수한 관계로서

$$x \xrightarrow{f} y \quad \text{또는} \quad y = f(x)$$

의 표기법이 정착되었다.

Cauchy(1823)는 함수의 개념을 정비한 후 함수의 극한 개념을 소위 $\epsilon-\delta$논법에 의해 논리적으로 규정하였다. 이어 극한을 이용하여 연속성, 미분, 정적분을 정의하였다. 그리고 미적분학 기본정리를 밝힘으로써 부정적분과 정적분과의 관계를 도출하였다.

Riemann은 Cauchy에 이어 함수론을 발전 시켰고 리만면 연구(1851), 리만적분론을 전개하였다(1853). 리만면의 연구는 위상수학 발전의 중요한 계기가 되었다. 또한 리만 기하학을 주창하여 20세기 가장 중요한 개념의 하나인 다양체론의 효시가 되었다.

이러한 개념화와 발전에도 불구하고 함수의 극한 개념은 여전히 미흡하다는 인식이 남아있었다. 핵심적인 부분은 극한 개념을 뒷받침하는 보다 근본적인 개념이 불분명하다는 것이다. 이러한 문제의식은 무한 개념을 포함하여 실수의 연속성, 수열의 극한 등의 실수론의 정립의 배경이 되었다. 다행히 이 문제는 집합론의 등장으로 해결되기 시작했으며 공리적 집합론의 탄생을 초래하였다.

3-4 근본적인 문제 해결 공리적 시도(해석학 기초 정립) 및 점집합론적 위상기하학 개시 : 19세기 후반

앞서 언급한 바와 같이 19세기 후반은 비판주의의 입장에서 Cantor, Dedekind, Bolzano, Weierstrass 등에 의해 개념의 엄밀화 작업이 수학 전반에 일어났다. 그리하

여 실수론 정립과 더불어 무한의 개념을 포함하여 집합, 관계, 함수 등의 개념을 추상화하고 일반화하는 집합론이 등장하게 되었다. 이를 기초로 하여 수체계, 나아가 함수의 극한 개념, 연속성, 미분, 적분에 관한 엄밀화가 시도되었고 그 결과 1변수 실함수론(미적분학)이 정립되었다. 흥미로운 사실은 이 분야의 이론적 체계가 <그림4>와 같이 정확히 역사적 순서의 역순이라는 점이다.

집합론 ← 실수론 ← 극한 ← 연속성 ← 미분 ← 정적분

⇅ ↙

부정적분

<그림4>

한편 Cantor는 집합론을 바탕으로 점집합론적 위상기하학의 연구에도 착수하였다. 이것은 Euler, Poincare 등에 의한 조합적 위상기하학과 더불어 위상수학 성립의 중요한 축이 되었다.

3-5 차원 확장(고등미적분학, 벡터해석학) : 19세기 말

벡터와 행렬 이론, 고차원 기하학의 영향으로 미적분학에서 차원 확장이 시도되었다. 또한 함수론의 연구로 실수공간 뿐만 아니라 복소공간도 고려대상이 되었다. 하지만 공간관은 여전히 유클리드 공간으로서 유한차원 수공간이었다. 그리하여 함수의 영역은 주로 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 또는 $f:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$을 다루었다.

반면에 차원 확장은 수학의 여러 분야에 영향을 미쳤다. 가령, 다음과 같은 연구가 행해졌다.

해석학 쪽 : 실함수론, 복소함수론, 기하학적 함수론, 다변수 함수론 등

대수학 쪽의 영향 : 선형대수학, 군론 발달

기하학 쪽 : 벡터해석학, 미분기하학, 비유클리드기하학, 리만기하학 등

한편 여기까지는 연속성의 개념이 해석학적 입장에서 다루어졌다. 1변수에서 다변수로 확장된 것이 다른 정도이지만 무한소 접근방법(infinitesimal approach)이라는 점에서 여전히 국소적 이론이었다.

3-6 공간의 추상화(위상수학으로의 독립) : 20세기 초

3-5까지는 공간은 여전히 수공간이므로 논의가 매우 제약적이었다. 이러한 문제점과 응용의 필요성으로 인해 Frechet, Riesz, Brouwer, Hausdorff등에 의해 공간에 대해 보다 일반적이고 추상적인 개념화 시도가 일어나게 되었다.

그 출발점으로서 집합론에서는 Dedekind에 의해 집합 상의 함수 개념으로 추상화가 이루어졌다. Frechet는 위상공간을 추상화하여 공간 구조의 이론적 체계를 수립하였다. 이 당시의 위상공간은 기하학적 공간 중에서 가장 일반적인 공간으로서 고려되었다. 이것은 Bourbaki 이후 구조주의 입장에서 2가지 기본적인 구조인 대수적, 위상적 구조로 더욱 체계화되었다.

공간관의 추상화는 연속성의 추상화로 이어졌고 이로 인해 점집합론적 위상기하학은 더욱 발달하게 되었다. 그리하여 위상수학의 입장에서 연속성의 가장 일반적인 형식적 정의가 얻어졌다. 특히 연속성에 대한 대역적 정의가 도입되었다. 이 때부터 연속성은 해석학적 정의에서 벗어나 위상적 개념이 되었다고 할 수 있다.

현재 수학에서 연속성의 정의는 해석적 정의(국소적 개념)와 위상적 정의(대역적 개념) 양자가 가능하다. 특히 수공간상에서 usual topology의 경우에는 해석적 정의와 위상적 정의는 일치한다.

공간관의 확장은 해석학에 비약적인 발전을 가져다주었다. 즉 실해석학, 다변수 함수론, 함수해석학, 초함수론, 비선형해석 등의 현대 해석학의 발전이 시작되었다.

1930년대에 이르러 위상기하학은 Hopf, Aleksandrov 등에 의해 기하학의 한 분과에서 독립하여 수학의 대분야로서 위상수학으로 자리하기 시작했다. 위상수학의 입장에서 연속성은 위상동형이라는 개념을 낳는다. 이것은 위상수학의 개념을 구분하는 기준으로 위상수학의 목표는 위상동형의 관점에서 위상공간의 성질, 분류, 결정하는 것이라 할 수 있다.

이러한 개념들의 이론적 체계는 사실 역사적 순서를 따른다. 그것은 이미 집합론에 의해 위상수학의 기초가 마련되었기 때문이다. 즉 집합론을 출발점으로 하여 추상적 일반적인 논의가 전개된다. 먼저 구조적으로 가장 일반적인 것 중 하나인 위상공간을 정의한다. 위상공간의 여러 동치적인 구성(기저 포함)에 대해 접한다. 위상동형의 개념을 고려한다.

흥미로운 것은 위상수학에서의 연속성에 관한 역사적 순서는 해석학의 경우와는 대조적으로 이론적 체계와 일치한다(<그림5>).

집합론 (← 극한 ← 연속성(local) ← 미분 ← 정적분) : 해석학
↓ ⇅
위상공간 → 기저 → 연속성(global) → 위상 동형 : 위상수학

<그림5>

3-7 연속성 개념의 발전(확장 및 응용) : 20세기 중엽 이후

함수의 연속성으로부터 향후 연구방향은 해석학 방향, 위상수학 방향으로 나뉜다. 해석학 방향에서 볼 때 연속은 미분과 적분 사이의 개념으로 자리하고 있다. 또한 적분법은 함수공간이나 보다 일반으로 계량공간 또는 위상벡터공간 상으로의 확장이 시도되었다. 함수개념은 함수공간 상에 범함수나 초함수 등의 개념으로 확장되어 함수해석학, 초함수론, 비선형해석 등 현대 해석학이 발전하였다.

위상수학 방향은 일반, 대수적, 미분위상수학으로 다시 나뉜다. 일반위상수학은 집합론으로부터 출발하여 위상적 성질이나 구조를 명확히 하는 분야이며, 대수적 위상수학은 호몰로지, 코호몰로지, 호모토피 등의 위상공간의 다양한 대수적 성질을 조사한다. 미분위상수학은 해석학을 전자의 두 위상수학 분야에 적용한 분야로서 대수적 방법보다 더욱 강력한 방법으로 다양체의 성질 및 분류를 연구한다. 이것은 위상수학에 국한되지 않고 나아가 해석학, 가령 편미분방정식론에 적용되거나 물리나 생물 등의 다른 분야의 연구에 활용되고 있다.

한편 위상수학과 기하학과의 연관성은 단적으로 global과 local의 관계로 규정할 수 있다. 이들 사이에는 20세기 중반이후 다양체상의 기하학, 대역해석학, 미분위상수학 등 활발한 연구를 통해 상호관련성이 속속 밝혀지고 있다.

끝으로 한가지 언급하고 싶은 것은 연속성의 문제는 현대 수학의 중요한 분야 중의 하나인 이산수학과 대조된다는 점이다. 이산수학은 컴퓨터의 발달로 날로 급속한 발

전을 이룩하고 있는 분야이다. 위상수학과 이산수학은 연속과 이산이라는 모델의 입장에서 구별과 통합의 성과들이 다양하게 얻어지고 있다. 사실 우리의 실제적 관측과 실험은 모두 이산적임을 상기해야 한다. 동시에 이론적인 설명은 연속 모델 상에서 일어나는 것이 더욱 설득력이 있고 이해하기 쉽다.

시기 단계	함수 및 연속성 개념	해석학 내용 및 주요 공헌자
17 (1)	직관적 개념 초등함수 형성	미적분학 기원(배경과 탄생) Cardano, Descartes, Fermat, Newton, Leibniz
17, 18 (2)	직관적 개념 비판 (무한수학 인식) 비 초등함수	미적분학 성장 (급수론, 상미방, 수치해석, 변분법, 고전미분기하) Bernoullis, Maclaurin, Euler, D'Alembert, Legendre, Laplace, Lagrange, Fourier
19 (3), (4)	논리적 개념 형성 (해석학 산술화) 고차원 수공간	해석학 기초(미적분학, 1변수 실함수론) 정립 Weierstrass, Heine, Cantor, Meray
19, 20 (5)~(7)	형식적 개념 (해석학 기초화) 추상적 공간	해석학 발전(다변수 해석학, 벡터 해석학 중심) 그 외 편미방, 함수해석, 초함수, 비선형해석 Hausdorff, Grassmann, Hilbert, Frechet

4. 결론

역사적 순서에서 살펴본 바와 같이 함수의 연속성 개념은 해석학적 문제 제기와 해석학적 문제 해결 및 집합론의 도움으로 1변수 실함수론이 정립되었고 이것은 다변수 함수론으로 확장되었다. 한편 집합론은 수학의 개념화 작업을 초래하여 실수론이 확립되었고, 이를 토대로 점집합론 나아가 일반 위상기하학을 탄생시켰다. 위상기하학은 초기에는 기하학의 한 분야로서 인식되었지만 조합적, 점집합론적 위상수학의 발달로 1930년대에 이르러 기하학으로부터 독립된 대분야로서 위상수학의 모습을 갖추어갔다.

뿐만 아니라 연속성 개념은 해석학적 배경에서 시작했지만 공간의 추상화 및 집합론으로 인해 위상수학의 가장 중요하고 본질적인 것으로 자리하였다. 따라서 함수의 연속성 개념은 크게 해석학적, 위상적 2가지 뿌리와 1가지 이산적 대자를 가진다.

이제 [박홍경 외 2(2005)]에서 다룬 각의 개념과 여기서 논의한 연속성의 개념을 비교해보자. 전자의 경우 강의적 체계순서는 이론적 체계를 적절히 배합하고 역사적 순서는 별로 따르지 않았다. 반면에 앞서 살펴본 바와 같이 해석학에서의 연속성 개념은 1변수 실함수의 경우 이론적 체계는 정확히 역사적 순서의 역순이다. 이후 차원과 공간과의 확장에 따라 다음과 같은 흐름으로 발전하였다.

① 1변수 실함수 : 미적분학

② 다변수 실함수 : 고등미적분학, 해석학 개론, 벡터해석학

③ 복소함수 : 복소함수론
④ 다변수 복소함수 : 다변수 복소함수론, 여기까지는 수공간을 대상
⑤ (위상공간 상의) 추상 함수 : 일반위상수학
⑥ (함수공간 상의) 작용소 : 실해석학, 함수해석학
⑦ 초함수 : 초함수론
⑧ 응용

하지만 위의 함수적 전개는 이론적인 입장에서 보더라도 쉽고 간단한 것에서 나아가는 흐름과 일치한다. 대부분의 교재는 위의 순서를 따른다. 그리고 많은 수학자들도 이 순서에 대해 동감한다. 따라서 강의적 체계순서도 마찬가지로 하는 것이 당연하다. 그렇지만 이 또한 교육적 상황에 따라 순서의 변화는 가능하다.

이러한 순서문제와 관련하여 [박홍경 외 3(2002)], [박홍경 외 2(2004)]에서는 수학사의 적극적인 활용을 제안하면서 사례로서 대수학과 기하학을 고찰하였다. [박홍경 외 2(2005)]에서 논의한 각의 개념지도의 경우에는 역사적 순서와 이론적 체계 사이에는 별로 상관성이 없다. 그래서 강의적 체계순서를 정하기 위해 새로운 기준으로 문제해결의 측면에서 각의 정의와 관련한 대역적 성질을 채택하였다.

반면에 본 논문의 주제인 함수의 연속성의 개념지도에 있어서는 놀랍게도 역사적 순서와 이론적 체계가 긴밀한 관련이 있다. 단적으로 말하면 고등학교나 대학에서의 교육과정에서 볼 때 통상 이 분야의 이론적 체계는 역사적 순서를 그대로 따르거나 역순이다. 즉 1변수 실함수론의 정립까지는 이론적 체계가 정확히 역사적 순서의 역순이며 이후의 해석학의 정립 과정은 역사적 순서를 그대로 따른다.

이러한 차이의 발생에 주목할 가치가 있다. 가장 중요한 원인은 전자는 해석학의 기초화에, 후자는 해석학의 성장에 관계하는 것에 있다. 기초란 바로 출발점을 의미하므로 기초화는 현재에서 출발점으로 돌아가는 과정이라 할 수 있다. 따라서 전자는 자연히 역순이 된다.

게다가 전자가 역순이 된 것에는 해석학의 기초화 작업이 극한 개념, 본질적으로 무한 개념과 관련되어 있는 것에도 기인한다. 사실 무한 개념은, Cantor가 그러했듯이, 논리적으로나 직관적으로 이론을 이해하고 전개하기 어렵다. 어려웠던 만큼 수학적인 이론이 되기 위해서는 19세기까지 오랜 역사를 거치지 않으면 안되었다. 수를 발명하여 정수론을 전개하고, 방정식을 풀고, 유클리드 기하학을 탄생시키고, 해석학을 개척하고, 집합론을 창시하여야 했던 것이다. 현재는 수학의 특질로서 무한을 다루는 학문을 들 정도로 발전하였지만 역사적으로 먼저 이론으로 정립되기에는 무한이 너무 어려운 개념이다([김용운, 김용국(1986)]).

이제 1변수 실함수론이 정립되자 이것은 해석학에 있어서 가장 기초적인 이론이 되었다. 이후의 해석학은 이를 기반으로 하여 전반적으로 간단한 것에서 복잡한 것으로 또한 쉬운 것에서 어려운 것으로 나아가면서 발전하였다. 따라서 후자는 이론적 체계가 역사적 순서와 자연히 일치한다.

수학적 활동에 있어서 증명은 사실 최종 단계이다. 증명을 하기 전에 명제가 참인지, 그리고 참이라면 증명해야 할 가치가 있는지를 고려한다. 이러한 탐구적 단계가 잘 행해지기 위해서는 관련내용의 전체적인 파악이 중요하다. 이러한 개관은 직관적인 이해와 논리적인 훈련을 요구한다. 직관적 개념과 논리적 개념은 상보적이다. 따라서 이러한 수학적 활동의 흐름을 비추어볼 때 수학적 개념지도의 순서는

직관적 개념 → 논리적 개념 → 형식적 개념

의 순서로 진행하는 것이 자연스럽다. 특히 1변수 실함수의 연속성의 개념지도는 역사적 순서와 부합하는 위의 흐름을 따르는 것이 이론적 체계를 중시하는 전형적인 순서보다 더욱 바람직하고 효율적이다.

한편 위에서 제시한 강의적 체계순서와는 달리 수학적 활동의 동인의 입장에서 순서를 고려할 수 있다. 수학적 활동의 동인은 크게 현실에의 응용을 위한 실제적 요구와 지적 호기심이나 진리추구를 위한 순수학술적 요구로 대별할 수 있다. 가령 역사적으로 정적분은 길이, 면적, 부피와 같은 기하학적 대상의 측정을 위해 시작하였다. 하지만 이러한 실제적 요구는 동시에 순수학술적 요구에 의해 개념화 활동이 일어난다. 다른 예로 미분의 개념은 Newton의 입장은 실제적 요구에서 Leibniz의 입장은 순수학술적 요구에서 독립적으로 발전하였다고 할 수 있다. 이와 같이 2가지 동인은 역사적 순서와 이론적 체계의 형성에 역동적인 역할을 담당하였다. 따라서 이들 동인의 상호작용의 관계에서 강의적 체계순서를 세우는 것도 흥미로운 일이다.

참고문헌

1. 김용운(1986), 수학사학과 수학교육, 한국수학사학회지 3, 21-33.
2. 김용운 김용국 (1986), 수학사대전, 우성문화사, 서울.
3. 박홍경, 김태완, 정인철(2004), 수학사를 활용한 수학교육II, 한국수학사학회지 17, 101-122.
4. 박홍경, 김태완, 정인철(2005), 수학교육에 있어서 각의 개념지도 방안, 한국수학사학회지 18, 85-100.
5. 박홍경, 장이채, 김태균, 임석훈(2002), 수학사를 활용한 수학교육, Proc. Jangjeon Math. Soc. 5, 73-86.
6. 本間龍雄, 임승원 역(1995), 위상공간으로 가는 길, 전파과학사, 서울.
7. C. Boyer and U. Merzbach, 양영오 조윤동 역 (2000). 수학의 역사 하, 경문사, 서울.
8. E. Hairer and G. Wanner(2000), Analysis by its history, Springer, New York.
9. H. Eves, 허민 오혜영 역 (1997), 수학의 위대한 순간들, 경문사, 서울.
10. 井關淸志 近藤基吉(1977), 現代數學-成立と課題, 日本評論社, 東京.
11. 中尾愼宏(1987). 微分積分學, 近代科學社, 東京.
12. 野口宏(1971), トポロジ - 基礎と方法, 日本評論社, 東京.
13. R. C. Buck(1978), Advanced claculus, Mcgraw Hill, Wisconsin.

[2007년 10월 접수, 2007년 10월 채택]