

확장형 Boussinesq 방정식의 유한요소모형 개발

우승범*¹ · 최영광² · 윤병일²

¹인하대학교 해양과학과

²인하대학교 해양과학·생물공학과

Development of Finite Element Method for the Extended Boussinesq Equations

SEUNG BUHM WOO*¹, YOUNG KWANG CHOI² AND BYUNG IL YOON²

¹Department of Ocean Science, Inha University, 253 Yonghyun-dong, Nam-gu, Incheon, Korea

²Department of Biotechnology & Marine Sciences, Inha University, 253 Yonghyun-dong, Nam-gu, Incheon, Korea

장파와 단파의 거동을 동시에 모의할 수 있는 확장형 Boussinesq 방정식에 대한 유한요소모형을 개발하였다. 3차 공간 미분항을 처리하기 위한 추가변수를 도입하고 Galerkin 가중잔차방법을 적용하여 모형을 수립하였으며, 시간 적분방법으로 Adams-Bashforth-Moulton Predictor Corrector 기법을 적용하여 비물리적인 수치분산이나 수치소산 현상을 줄일 수 있도록 하였다. 이 개발된 모형을 검증하기 위해 고립파가 전파하는 문제에 적용을 하였다. 개발된 모형을 적용한 결과 이론해 또는 수리실험 결과에 매우 양호한 일치율을 보였다.

A finite element model is developed for the extended Boussinesq equations that is capable of simulating the dynamics of long and short waves. Galerkin weighted residual method and the introduction of auxiliary variables for 3rd spatial derivative terms in the governing equations are used for the model development. The Adams-Bashforth-Moulton Predictor Corrector scheme is used as a time integration scheme for the extended Boussinesq finite element model so that the truncation error would not produce any non-physical dispersion or dissipation. This developed model is applied to the problems of solitary wave propagation. Predicted results is compared to available analytical solutions and laboratory measurements. A good agreement is observed.

Keywords: Extended Boussinesq Equations, Galerkin Finite Element Method, Auxiliary Variables, Adams-Bashforth-Moulton Predictor Corrector Scheme, Solitary Wave Propagation

서 론

Boussinesq 형의 방정식은 장파와 단파의 거동을 동시에 해석할 수 있고 흐름-파랑 상호간의 간섭으로 인한 비선형성을 고려할 수 있으며 또한 불규칙파의 거동에 적용할 수 있는 등 다양한 장점이 있기 때문에 지난 10여 년간 활발한 연구가 수행되었다. 이 식의 근간은 선형 비분산형 파랑의 전파를 기술하는 천수 방정식이며, 여기에 더하여 비선형성과 주파수 분산성을 나타내는 항들이 추가 되어 Boussinesq 방정식이 이루어진다.

비선형성과 분산성이 모두 약하고 이 두 개의 물리적 성질의 크기가 대략 비슷하다는 가정 하에, Peregrine(1967)은 수심 적분된 유속을 변수로 하여 가변 수심에서 적용 가능한 이른바 표준형 Boussinesq 방정식을 유도하였다. Peregrine의 Boussinesq 방정식은 해저면에서의 유속 혹은 자유 수면에서의 유속을 변수로 하여 다시 표현될 수 있다. 이러한 식들은 그 변수를 어떤 것으로 선택하느냐에 따라 분산 관계식이 약간씩 달라지게 되는데, 수학적 관점

에서 봤을 때 이 식들의 정확성은 모두 동일한 정도를 갖는다고 할 수 있다. 표준형 Boussinesq 방정식, 혹은 이와 유사한 방정식에 근거를 둔 수치모형의 계산 결과의 검증은 실제 관측 자료와의 비교 (Elgar and Guza, 1985), 그리고 수리실험 자료와의 비교(Goring, 1979) 등을 통해서 수행된 바 있고 그 결과의 신뢰성이 입증되었다.

그러나 표준형 Boussinesq 방정식은 약한 분산성에 가정을 두고 있으므로 수심이 파장에 비해 상대적으로 작은, 비교적 긴 장파의 거동에만 적용 가능하다는 한계가 있다. 수심 적분된 유속을 변수로 하는 표준형 Boussinesq 방정식은 수심이 파장의 1/5 이상이 되면 수학적으로 해가 발산한다. 항만 부진동을 포함한 대다수의 공학적 문제에 있어서는 대상 영역으로 침입하는 파랑의 에너지 스펙트럼이 많은 주파수 성분으로 구성되어 있으므로 방정식에서 수심에 대한 제약이 적을수록 바람직하다.

이러한 단점을 극복하여 단주기 파랑에도 적용이 가능하고 수치적 불안정성을 감소시킨, 이른바 확장형 Boussinesq 방정식을 개발하고자 많은 연구자들이 노력해 왔다(예, Madsen *et al.*, 1991; Nwogu, 1993; Beji and Nodaoka, 1996; Chen and Liu, 1995). 이러한 노력의 결실로써 다양한 형태의 확장형 Boussinesq 방정식이 개발되었

*Corresponding author: sbwoo@inha.ac.kr

는데, 비록 그 유도과정은 다소 상이하나 선형 분산 관계식의 개선된 정도는 서로 유사하다. Witting(1984)은 이 개선된 선형 분산 관계식을 선형 파랑이 전파할 때의 완전 분산 관계식에 대한 [2/2] Padé 근사로 표현 될 수 있음을 증명하였다. 이렇게 개발된 확장형 Boussinesq 방정식은 파랑과 흐름의 상호작용을 포함한 심해에서 천해로의 파랑의 전파 및 변형에 사용될 수 있음이 입증되었다(Chen *et al.*, 1998).

분산 관계의 괄목할만한 개선에도 불구하고 확장형 Boussinesq 방정식은 여전히 비선형성이 약한 경우에만 적용이 가능하다. 파랑이 해안가에 접근해 옴에 따라, 천수작용에 의해 파고가 증가하여 대다수의 완만한 경사의 해안에서 쇄파된다. 이 쇄파대에서의 수십 대 파고의 비는 매우 커지므로(즉 비선형성은 매우 강해지므로), 확장형 Boussinesq 방정식을 적용하는 데는 많은 무리가 따른다. 이러한 단점은 확장형 Boussinesq 방정식의 유도과정에서 order of magnitude가 1인 강비선형항을 생략하는 과정을 수행하지 않고 모든 비선형항을 지배방정식에 포함시켜, 이른바 완전비선형, 확장형 Boussinesq 방정식을 유도함으로써 극복되었다(Liu, 1994; Wei *et al.*, 1995). 학자에 따라서 이러한 완전 비선형, 확장형 Boussinesq 방정식은 비선형성과 분산성의 크기가 서로 대략적으로 비슷하다는 표준형 Boussinesq 방정식의 기본 가정과 다르므로 더 이상 Boussinesq 방정식이라고 칭하기 어렵다고 보는 견해도 있다.

식의 난해성으로 인해 수학적인 엄밀해를 구하는 것은 매우 제한적이므로 수치모형의 개발은 필수적이다. 지금까지 제시된 가장 일반적인 수치모형은 유한차분모형이며(Wei *et al.*, 1995) 유한차분모형은 널리 알려진 대로 수치모형 제작의 용이성과 저렴한 계산 비용 등에는 장점이 있으나 해안선 같이 복잡한 임의의 형상의 경계를 제대로 재현하기 힘들다는 단점이 있다. 항만구조물의 복잡한 경계를 재현하기에 적합한 수치모형은 유한요소모형(FEM)이며 근래에 들어 확장형 Boussinesq 방정식에 FEM을 수립하려는 시도가 이루어지고 있다.

본 연구에서는 Nwogu(1993)의 확장형 Boussinesq 방정식에 대한 유한요소모형을 수립하고 그 정확성을 검증하였다. 추가변수를 도입하여 3차 공간미분항의 차수를 줄임으로써 Galerkin 방법의 사용을 가능하게 하였는데, 추가변수의 선택은 완전반사경계조건의 유도와 밀접한 관계가 있는 것으로 모형의 정확성과 계산의 효율성에 매우 큰 영향을 미친다. 또한 추가변수를 적절히 선택해야만 향후 본 연구에서 수립된 수치방법을 완전비선형, 확장형 Boussinesq 방정식에 직접적으로 사용할 수 있으므로 추가변수의 선택은 매우 중요하다.

유한요소모형의 수립

일반적인 FEM에서 사용되고 있는 편미분방정식은 주로 최고차항이 짝수차이며 유한요소모형 수립 후 대칭형의 행렬이 만들어지게 된다. 반면에 홀수차 편미분 방정식에 FEM을 수립할 경우 대칭형의 행렬은 수립할 수 없게 되어 일반적인 유한요소해석기법을 적용하기 어렵다. 특히 3차의 공간미분항을 포함하는 확장형 Boussinesq 형식의 편미분방정식에 대한 FEM의 연구는 거의 없는 실정이다.

2차원 문제에 있어서 가장 일반적으로 사용되는 선형의 유한요

소를 이용하기 위해서는 추가변수를 도입하여 방정식에 존재하는 최고차 미분항의 차수를 낮추는 것이 필수적이다. Li *et al.*(1999)은 자유수면에 대한 1차의 공간미분항을 추가변수로 치환하여 Beji와 Nadaoka(1996)의 2차원 확장형 Boussinesq 방정식에 대한 유한요소모형을 수립하였다. Nwogu(1993)의 확장형 Boussinesq 방정식에 대한 유한요소모형은 Walkley(1999)에 의해 개발되었는데 그는 질량보존방정식에 있는 주파수 분산항을 이용하여 2개의 추가변수를 도입하였다. 또한 계산시간의 효율을 높이기 위하여 Walkley(1999)는 추가변수를 계산하는 행렬식에는 질량집중행렬을 사용하였고 시간적분은 SPRINT라는 software package를 사용하였다. 그의 수치실험결과는 2 격자크기의 수치진동을 감소시키기 위해서는 계산 영역에서 비구조 격자들의 크기가 매우 완만히 변해야 함을 보이고 있다. 이 수치모델이 간단한 형상의 항만 부진동에 적용되었는데 계산영역의 경계부분에서 입사파 경계조건의 부정확한 적용으로 인해서 계산결과는 준정상 상태에 도달하지 못하고 발산하였다.

이 결과에서 알 수 있듯이 항만 부진동 문제에 있어서, 특히 시간적분형 모형의 경우, 입사파와 반사파 및 방사파의 처리가 정확해야만 신뢰할 수 있는 결과를 얻을 수 있다. Walkley(1999) 방법에서의 단점은 선택된 추가변수의 형태가 너무 복잡하여 완전 비선형 Boussinesq 방정식에의 적용이 불가능하다는 점과, 항만 부진동 문제에의 적용이 검증되지 못했다는 것이다. 본 논문에서는 수치모형 수립 시에 도입된 추가 변수와 유한요소모형 수립과정, 시간적분방법 등을 기술한다.

지배방정식

파랑의 전파는 파고(a), 수심(h), 파수(k) 등의 인자로 특성화시킬 수 있다. 무차원 계수인 $\epsilon = a/h$ 와 $\mu^2 = (kh)^2$ 는 각각 파랑 전파시의 비선형성과 분산성을 나타내는 값이 된다. Boussinesq 이론은 약비선형 약분산성 파랑 전파의 해석을 위해 $O(\epsilon) \approx O(\mu^2) \ll 1$ 의 가정을 필요로 하며 Nwogu(1993)의 확장형 Boussinesq 방정식은 다음과 같이 제시된다.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot [(h + \epsilon \eta) \mathbf{u}_a] + \mu^2 \nabla \cdot [C_1 h^3 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_a) + C_2 h^2 \nabla (\nabla \cdot (h \mathbf{u}_a))] = O(\epsilon^2, \epsilon \mu^2, \mu^4) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_a}{\partial t} + \nabla \eta + \frac{\epsilon}{2} \nabla (\mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}_a) + \mu^2 \left[C_2 h^2 \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_a}{\partial t} \right) + \beta h \nabla \left(\nabla \cdot \left(h \frac{\partial \mathbf{u}_a}{\partial t} \right) \right) \right] = O(\epsilon^2, \epsilon \mu^2, \mu^4) \quad (2)$$

여기서

$$C_1 = \frac{1}{2} \left(\beta^2 - \frac{1}{3} \right), C_2 = \frac{\beta}{2}, C_3 = \beta + \frac{1}{2}, \beta = \frac{z_a}{h} \quad (3)$$

이며, η 는 자유수면변위, ∇ 는 $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$, \mathbf{u}_a 는 $z = z_a$ 에서의 수평방향 유속벡터로써 $\mathbf{u}_a = (u_a, v_a)$ 으로 정의되고, z_a 는 임의의 수심을 나타내는 변수로써 $z_a = -0.53h$ 에 해당한다. 식 (1), (2)의 우변의 값은 이 식이 포함하고 있는 오차의 한계를 나타낸다. 이 오차 한계

를 설정하는 기준에 따라 다양한 형태의 확장형 Boussinesq 방정식이 존재하며 주목할 점은 확장형 Boussinesq 방정식에서의 질량보존방정식은 우변의 값이 0이 아닌 것에서 알 수 있듯이 완벽한 질량보존을 의미하는 것은 아니라는 점이다. 또한 3차의 공간미분항이 질량보존방정식에 존재하고 운동량방정식의 최고차 공간미분항은 2차인 점에 유의한다.

선형 요소를 사용하는 Galerkin 방법을 적용하기 위하여 3차의 공간미분항의 차수를 줄이는 것이 필요하며 이를 위해 다음과 같은 추가 변수를 도입한다.

$$E = (E_1, E_2) := \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) \quad (4)$$

$$R_1 = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, R_2 = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}, R_3 = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \quad (5)$$

여기서 :=는 정의함을 뜻하며, 식 (4)와 같이 추가변수를 도입할 경우 벽면 근처에서 $O(\nabla h) \approx O(\mu^2)$ 라는 가정 하에 $\bar{\mathbf{u}}$ 와 \mathbf{u}_α 의 관계는 식 (6)과 같이 기술될 수 있다.

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_\alpha + \mu^2 h^2 C_6 E \quad (6)$$

여기서 $\bar{\mathbf{u}}$ 는 수심적분된 수평방향 유속을 의미한다. 불투과 직벽에서 유체는 물리적으로 벽면을 통과하지 못하므로 수심적분된 유속이 경계의 직각방향으로 0 이어야만 한다. 또한 정의에 의해 $\mathbf{u}_\alpha := \mathbf{u}|_{z=z_\alpha}$ 이므로 식 (7)이 성립된다.

$$\mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (7)$$

이러한 성질을 이용하면 추가변수의 no-flux 경계조건도 유속성분의 조건과 형태가 동일하며, 운동량방정식을 풀 때 사용한 경계기법의 처리방법을 그대로 경계에서의 추가변수의 처리에 적용할 수 있다.

이러한 추가변수를 이용하여 지배방정식을 다시 기술하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \eta + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \varepsilon \eta) u_\alpha] \frac{\partial}{\partial y} [(h + \varepsilon \eta) v_\alpha] \\ & + \mu^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[C_1 h^3 E_1 + C_3 h^2 \left(2 \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + u_\alpha R_1 + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + v_\alpha R_3 + \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} + h E_1 \right) \right] \\ & + \mu^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[C_1 h^3 E_2 + C_3 h^2 \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} + u_\alpha R_3 + 2 \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + v_\alpha R_2 + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + h E_2 \right) \right] \\ & = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \dot{u}_\alpha + \mu^2 \left[C_2 h^2 \frac{\partial^2 \dot{u}_\alpha}{\partial x^2} + \beta h \frac{\partial^2 (\dot{u}_\alpha)}{\partial x^2} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_\alpha^2 + v_\alpha^2) \right] + \mu^2 \left[C_2 h^2 \frac{\partial^2 \dot{u}_\alpha}{\partial x \partial y} + \beta h \frac{\partial^2 (h \dot{v}_\alpha)}{\partial x \partial y} \right] = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \dot{v}_\alpha + \mu^2 \left[C_2 h^2 \frac{\partial^2 \dot{v}_\alpha}{\partial y^2} + \beta h \frac{\partial^2 (h \dot{v}_\alpha)}{\partial y^2} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_\alpha^2 + v_\alpha^2) \right] + \mu^2 \left[C_2 h^2 \frac{\partial^2 \dot{u}_\alpha}{\partial x \partial y} + \beta h \frac{\partial^2 (h \dot{u}_\alpha)}{\partial x \partial y} \right] = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$E_1 - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} \right] = 0 \quad (11)$$

$$E_2 - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u_\alpha}{\partial y} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} \right] = 0 \quad (12)$$

위의 식에서 상첨자 α 는 시간에 대한 미분을 나타낸다. 추가변수의 도입으로 인해서 상기의 지배방정식은 최고차가 2차가 되었음에 주목한다. R_1, R_2, R_3 는 해저면 경사에 관한 항들로 시간적분은 시작되기 전에 1회에 한하여 계산된다. \dot{u}_α 와 \dot{v}_α 에 대한 처리는 시간적분을 기술하는 절에서 설명한다.

Galerkin 유한요소방법

Galerkin 유한요소방법을 적용시키기 위해서는 지배방정식의 가중잔차가 0이 되어야 한다. 즉 식 (8)~(12)까지의 식들에 가중함수 $W(x, y)$ 가 곱해지고 공간영역 Ω 의 영역에 걸쳐 적분된다. 가중잔차법을 사용하기 위한 지배방정식의 weak form은 부분적분의 원리와 Divergence 이론을 이용하여 유도되는 Γ (경계)에서의 경계적분으로 표현하면 다음과 같이 기술된다.

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} W \dot{\eta} dx dy \\ & = \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial W}{\partial x} [(h + \varepsilon \eta) u_\alpha + \mu^2 (C_6 h^3 E_1 + C_3 h^2 \left(2 \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + u_\alpha R_1 + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + v_\alpha R_3 + \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \right))] \right. \\ & \quad + \frac{\partial W}{\partial y} [(h + \varepsilon \eta) v_\alpha + \mu^2 (C_6 h^3 E_2 + C_3 h^2 \left(2 \frac{\partial u_\alpha}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} + u_\alpha R_3 + 2 \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + v_\alpha R_2 + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} \right))] \left. \right\} dx dy \\ & - \int_{\Gamma} \left\{ n_x W [(h + \varepsilon \eta) u_\alpha + \mu^2 (C_6 h^3 E_1 + C_3 h^2 \left(2 \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + u_\alpha R_1 + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + v_\alpha R_3 + \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \right))] \right. \\ & \quad \left. + n_y W [(h + \varepsilon \eta) v_\alpha + \mu^2 (C_6 h^3 E_2 + C_3 h^2 \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} + u_\alpha R_3 + 2 \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + v_\alpha R_2 + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} \right))] \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left\{ W - \mu^2 \left[W \left(C_4 \frac{\partial h^2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \beta \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{\partial W}{\partial x} \left(C_5 h^2 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\beta \partial h^2}{2 \partial x} \right) \right] \dot{u}_\alpha dx dy \right\} \\ & = \iint_{\Omega} \left\{ \mu^2 W \left[C_2 \frac{\partial h^2}{\partial x} \frac{\partial v^2}{\partial y} + \beta \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial (h v^2)}{\partial y} \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial W}{\partial x} \left[\eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_\alpha^2 + v_\alpha^2) + \mu^2 \left(C_2 h^2 \frac{\partial^2 \dot{v}_\alpha}{\partial y} + \beta h \frac{\partial (h \dot{v}_\alpha)}{\partial y} \right) \right] \right\} dx dy \\ & - \int_{\Gamma} n_x W \left\{ \eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_\alpha^2 + v_\alpha^2) \right. \\ & \quad \left. + \mu^2 \left[C_2 h^2 \left(\frac{\partial \dot{u}_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}_\alpha}{\partial y} \right) + \beta h \left(\frac{\partial h \dot{v}_\alpha}{\partial x} + \beta h \frac{\partial (h \dot{v}_\alpha)}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Omega} \left\{ W - \mu^2 \left[W \left(C_4 \frac{\partial h^2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \beta \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{\partial W}{\partial y} \left(C_5 h^2 \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\beta \partial h^2}{2 \partial y} \right) \right] \dot{v}_\alpha dx dy \right\} \\
&= \iint_{\Omega} \left\{ \mu^2 W \left[C_2 \frac{\partial h^2}{\partial y} \frac{\partial \dot{u}^2}{\partial x} + \beta \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial (h \dot{u}^2)}{\partial x} \right] \right. \\
&+ \left. \frac{\partial W}{\partial y} \left[\eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_\alpha^2 + v_\alpha^2) + \mu^2 \left(C_2 h^2 \frac{\partial \dot{u}_\alpha}{\partial x} + \beta h \frac{\partial (h \dot{u}_\alpha)}{\partial x} \right) \right] \right\} dx dy \\
&- \int_{\Gamma} n_y W \left\{ \eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_\alpha^2 + v_\alpha^2) \right. \\
&+ \left. \mu^2 \left[C_2 h^2 \left(\frac{\partial \dot{u}_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}_\alpha}{\partial y} \right) + \beta h \left(\frac{\partial h \dot{u}_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial h \dot{v}_\alpha}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Gamma \quad (15)
\end{aligned}$$

$$\iint_{\Omega} WE_1 dx dy = - \iint_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial x} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} \right) dx dy - \int_{\Omega} n_x W \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} \right) d\Gamma \quad (16)$$

$$\iint_{\Omega} WE_2 dx dy = - \iint_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial x} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} \right) dx dy - \int_{\Omega} n_y W \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} \right) d\Gamma \quad (17)$$

여기서

$$C_4 = \frac{1}{2} \beta (\beta + 1), C_5 = \beta \left(\frac{1}{2} \beta + 1 \right), C_6 = \frac{\beta^2}{2} + \beta \frac{1}{3} \quad (18)$$

이며, n_x 와 n_y 는 각각 경계에서 연직 단위 벡터인 \mathbf{n} 의 x , y 성분이다. 각 변수들은 보간함수 $\psi_j(x, y)$ 와 각 변수의 노드 값과의 선형조합으로써 근사화 되며 다음과 같이 기술된다.

$$F(x, y, n\Delta t) = \sum_{j=1}^{ND} \psi_j(x, y) \{F_j^n\} \quad (19)$$

$$F(x, y, n\Delta t) = \sum_{j=1}^{ND} \psi_j(x, y) \{E_j^n\} \quad (20)$$

여기서 $F = \langle \eta, u_\alpha, v_\alpha \rangle$, $E = \langle E_1, E_2 \rangle$ 이며 'ND'는 영역에서의 총 노드의 개수, 그리고 $n=0, 1, 2, \dots$ 는 time level 을 나타낸다. 마찬가지로 수심과 수심의 경사도 각 노드의 수심값과 보간함수의 선형 조합으로써 근사화 된다. 본 수치해석 방법에서는 Galerkin 가중잔차 방법을 사용하므로 가중함수 $W(x, y)$ 는 보간함수 $\psi_j(x, y)$ 와 동일한 함수를 사용하게 된다. 식 (19)와 (20)을 식 (13)~(17)에 대입하고 정리하면 다음과 같은 행렬식을 얻게 된다.

$$\sum_{j=1}^{ND} [M^{\dot{\eta}}]_{ij} \{\dot{\eta}_j^n\} = \{f^n\}_i + \{q^n\}_i \quad (21)$$

$$\sum_{j=1}^{ND} [M^{\dot{u}}]_{ij} \{\dot{u}_j^n\} = \{f^n\}_i + \{q^n\}_i \quad (22)$$

$$\sum_{j=1}^{ND} [M^{\dot{v}}]_{ij} \{\dot{v}_j^n\} = \{f^n\}_i + \{q^n\}_i \quad (23)$$

$$\sum_{j=1}^{ND} [M^{E_1}]_{ij} \{E_1\}_j^n = \{f^{E_1}\}_i^n + \{q^{E_1}\}_i^n \quad (24)$$

$$\sum_{j=1}^{ND} [M^{E_2}]_{ij} \{E_2\}_j^n = \{f^{E_2}\}_i^n + \{q^{E_2}\}_i^n \quad (25)$$

여기서 $i=1, 2, \dots, ND$ 이고, $[M]_{ij}$ 는 보간함수와 가중함수의 곱

의 적분으로 이루어진 질량행렬을 의미한다. []은 행렬, { }은 벡터를 의미하며 행렬식의 자세한 구성은 부록에 기술하였다.

시간적분방법

시간적분기법의 정확도는 공간근사기법의 정확도만큼 확보되어야 수치오차에서 발생하는 물리적 근거가 없는 수치분산이나 수치소산 현상을 줄일 수 있다. 이번 절에서는 식 (21)~(25)를 Adams-Bashforth-Mouton Predictor-Corrector 방법을 이용하여 시간 적분하는 방법을 기술한다. 이 수치기법은 확장형 Boussinesq 수치모형에 비교적 널리 사용되는 방법으로써 그 기본적인 개념은 다음과 같다. 먼저 현 time step에서의 값을 기초로 다음 step에서의 값을 예측한다(Predictor 단계). 이렇게 예측된 값은 지배방정식의 우변에 대입되어 좀 더 개선된 (즉 "corrected") 값으로 변환된다(Corrector 단계). 이렇게 개선된 수치해는 다시 지배방정식의 우변에 대입되어 또 다시 개선된 값을 구하게 되며 이 값과 이전 단계에서 구했던 수정된 값과의 비교를 통해 그 비교 오차가 허용범위 안에 들어올 때까지 반복하게 된다(Lapidus and Seinfeld, 1971).

본 연구에서는 3차의 Adams-Bashforth 방법이 Predictor 단계에 사용되었다.

$$P[\eta]: [M^{\eta}]_{ij} \left(\frac{\{\eta\}_{i(0)}^{n+1} - \{\eta\}_i^n}{\Delta t} \right) = \frac{1}{12} [23 \{f^n\}_i^n - 16 \{f^n\}_i^{n-1} + 5 \{f^n\}_i^{n-2}] \quad (26)$$

$$P[u_\alpha]: [M^{u_\alpha}]_{ij} \left(\frac{\{u_\alpha\}_{i(0)}^{n+1} - \{u_\alpha\}_i^n}{\Delta t} \right) = \frac{1}{12} [23 \{f^n\}_i^n - 16 \{f^n\}_i^{n-1} + 5 \{f^n\}_i^{n-2}] \quad (27)$$

$$P[v_\alpha]: [M^{v_\alpha}]_{ij} \left(\frac{\{v_\alpha\}_{i(0)}^{n+1} - \{v_\alpha\}_i^n}{\Delta t} \right) = \frac{1}{12} [23 \{f^n\}_i^n - 16 \{f^n\}_i^{n-1} + 5 \{f^n\}_i^{n-2}] \quad (28)$$

여기서 우변의 벡터 값인 $\{f^n\}$, $\{f^n\}$, $\{f^n\}$ 는 식 (21), (22), (23)의 우변의 벡터 값들을 대변하며, Δt 는 계산되는 시간간격으로 CFL 조건에 만족되도록 설정되어야 한다. 또한 $\{f^n\}$, $\{f^n\}$ 는 각각 유속의 시간 미분항을 포함하며 $\{f^n\}$ 에 $\{\dot{v}\}$ 이 존재하고 $\{f^n\}$ 에 $\{\dot{u}\}$ 이 존재하고 있다는 점에 유의한다. Predictor 단계에서는 이 시간 미분항들이 다음과 같은 방법에 의해 근사화 된다.

$$\{\dot{r}\}_i^n = \frac{1}{2\Delta t} [3 \{r\}_i^n - 4 \{r\}_i^{n-1} + \{r\}_i^{n-2}] + O(\Delta t^2) \quad (29)$$

$$\{\dot{r}\}_i^{n-1} = \frac{1}{2\Delta t} [\{r\}_i^n - \{r\}_i^{n-2}] + O(\Delta t^2) \quad (30)$$

$$\{\dot{r}\}_i^{n-2} = -\frac{1}{2\Delta t} [3 \{r\}_i^{n-2} - 4 \{r\}_i^{n-1} + \{r\}_i^n] + O(\Delta t^2) \quad (31)$$

여기서 $\{r\}$ 은 $\{u\}$ 또는 $\{v\}$ 를 나타낸다.

식 (26), (27)과 (28)을 풀고 나면 j 노드의 $(n+1)$ time step에 대한 $\eta_{i(0)}^{n+1}$, $u_{i(0)}^{n+1}$, $v_{i(0)}^{n+1}$ 의 첫 번째 Predictor 값을 얻게 된다. 이 값들을 이용하여 $(n+1)$ time step에서의 추가 변수의 값들이 식 (24)와 (25)를 이용하여 구해진다. 즉,

$$\{E_1\}_{i(0)}^{n+1} = [M^{E_1}]_{ij}^{-1} \{f^{E_1}\}_{i(0)}^{n+1} \quad (32)$$

$$\{E_2\}_{i(0)}^{n+1} = [M^{E_2}]_{ij}^{-1} \{f^{E_2}\}_{i(0)}^{n+1} \quad (33)$$

여기서 우변의 벡터 값인 $\{f^{E_1}\}$, $\{f^{E_2}\}$ 는 식 (22), (23)의 우변의 벡터 값들을 대변한다.

Corrector 단계에서 우변 벡터를 갱신하기 위해서는 우변 벡터에 포함되어 있는 시간 미분항들을 다음과 같은 수치 기법을 이용하여 근사화 시키는 것이 필요하다.

$$\{\dot{r}\}_{\bar{a}(0)}^{n+1} = \frac{1}{6\Delta t} [11\{r\}_{\bar{a}(0)}^{n+1} - 18\{r\}_i^n + 9\{r\}_i^{n-1} - 2\{r\}_i^{n-2}] + O(\Delta t^3) \quad (34)$$

$$\{\dot{r}\}_{\bar{a}(0)}^n = \frac{1}{6\Delta t} [2\{r\}_{\bar{a}(0)}^{n+1} - 3\{r\}_i^n - 6\{r\}_i^{n-1} + \{r\}_i^{n-2}] + O(\Delta t^3) \quad (35)$$

$$\{\dot{r}\}_{\bar{a}(0)}^{n-1} = \frac{1}{6\Delta t} [-\{r\}_{\bar{a}(0)}^{n+1} + 6\{r\}_i^n - 3\{r\}_i^{n-1} - 2\{r\}_i^{n-2}] + O(\Delta t^3) \quad (36)$$

$$\{\dot{r}\}_{\bar{a}(0)}^{n-2} = \frac{1}{6\Delta t} [2\{r\}_{\bar{a}(0)}^{n+1} - 9\{r\}_i^n + 18\{r\}_i^{n-1} - 11\{r\}_i^{n-2}] + O(\Delta t^3) \quad (37)$$

(n+1) time step에서 우변의 벡터 즉, $f_{\bar{a}(0)}^{n+1}$, $f_{\bar{a}(0)}^{un+1}$, $f_{\bar{a}(0)}^{vn+1}$ 들이 갱신된 후에 corrected 된 해는 4차의 Adams-Moulton Corrector 기법(Lapidus and Seinfeld, 1971)을 이용하여 구할 수 있다. 반복적인 일련의 단계는 다음과 같이 설명된다. 먼저 s(s=1,2,...)가 반복단계의 횟수를 표시한다고 할 때 s 번째의 수정된 값 $\eta_{j(s)}^{n+1}$ 를 구하기 위해서 질량 보존 방정식은 다음과 같이 수치 적분된다.

$$C[\eta]: \eta_{j(s)}^{n+1} = \eta_j^n + \frac{\Delta t}{24} [M_{ij}^{-1}] (9\{f^m\}_{\bar{a}(s-1)}^{n+1} + 19\{f^m\}_i^n - 5\{f^m\}_i^{n-1} + \{f^m\}_i^{n-2}) \quad (38)$$

다음으로 $\eta_{j(s)}^{n+1}$, $u_{j(s-1)}^{n+1}$, $v_{j(s-1)}^{n+1}$ 를 이용하여 우변 벡터 $f_{j(s-1)}^{un+1}$ 를 갱신하고 u에 대한 운동량 방정식을 다음과 같이 수치 적분한다.

$$C[u_\alpha]: u_{j(s)}^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{24} [M_{ij}^{-1}] (9\{f^u\}_{\bar{a}(s-1)}^{n+1} + 19\{f^u\}_i^n - 5\{f^u\}_i^{n-1} + \{f^u\}_i^{n-2}) \quad (39)$$

마찬가지로 $\eta_{j(s)}^{n+1}$, $u_{j(s)}^{n+1}$, $v_{j(s)}^{n+1}$ 를 이용하여 우변 벡터 $f_{j(s-1)}^{vn+1}$ 를 갱

신하고 v에 대한 운동량 방정식을 다음과 같이 수치 적분한다.

$$C[v_\alpha]: v_{j(s)}^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{24} [M_{ij}^{-1}] (9\{f^v\}_{\bar{a}(s-1)}^{n+1} + 19\{f^v\}_i^n - 5\{f^v\}_i^{n-1} + \{f^v\}_i^{n-2}) \quad (40)$$

만약 다음 수정 단계가 필요하다면 각각 $u_{j(s)}^{n+1}$, $v_{j(s)}^{n+1}$ 를 이용하여 추가변수에 대한 우변 벡터 $f_{j(s)}^{E_{n+1}}$, $f_{j(s)}^{E_{2n+1}}$ 를 갱신하고 식 (24)와 (25)를 풀어과 $E_{1j(s)}^{n+1}$, $E_{2j(s)}^{n+1}$ 을 구하게 된다.

연이은 수정 단계에서의 η , u , v 에 대한 상대오차는 다음과 같이 각각 정의된다.

$$\Delta e_\eta = \max \left(\frac{\{\eta\}_{j(s)}^{n+1} - \{\eta\}_{j(s-1)}^{n+1}}{\{\eta\}_{j(s)}^{n+1}} \right) \quad (41)$$

$$\Delta e_u = \max \left(\frac{\{u\}_{j(s)}^{n+1} - \{u\}_{j(s-1)}^{n+1}}{\{u\}_{j(s)}^{n+1}} \right) \quad (42)$$

$$\Delta e_v = \max \left(\frac{\{v\}_{j(s)}^{n+1} - \{v\}_{j(s-1)}^{n+1}}{\{v\}_{j(s)}^{n+1}} \right) \quad (43)$$

이들 상대오차가 10^{-4} 보다 모두 작을 때 까지 Corrector 단계를 반복한다.

수치모형의 검증

수립된 수치모형은 기존의 수리모형 실험 결과, 해석해, 그리고 다른 수치모형의 해와 비교함으로써 그 정확성을 검증하였다. 각각의 수치실험은 특정한 물리 현상에 대한 수치모형의 결과를 나타낸다.

일정수심에서 고립파의 전파

먼저 본 모형의 비선형과 분산성과의 조화를 검토하기 위하여 일정수심에서 고립파의 전파에 대한 실험을 수행하였다. 경계조건으로 인한 복잡성을 피하기 위하여, 해석해로부터 구한 자유표면의

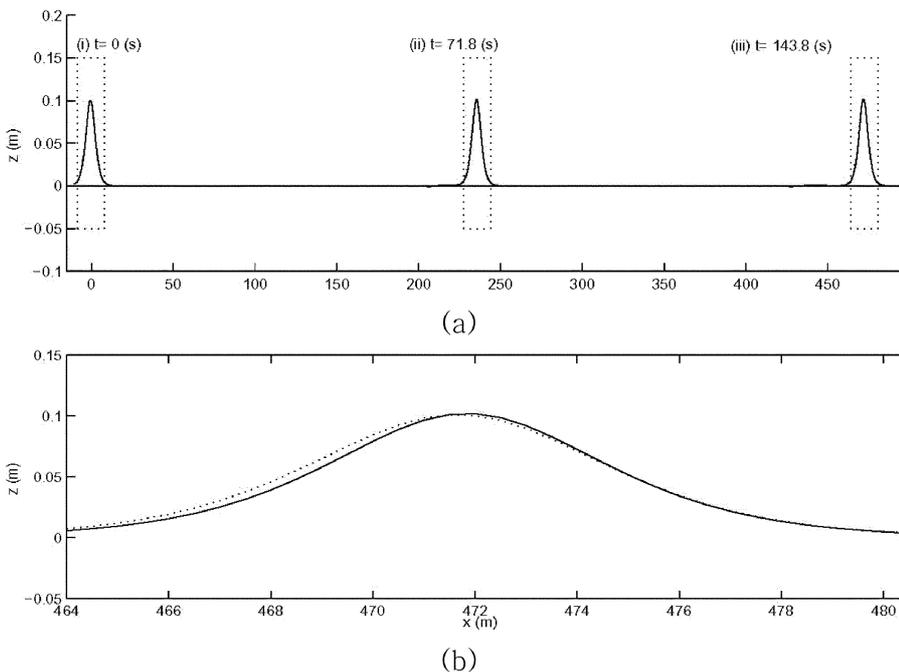


Fig. 1. Comparison of numerical and theoretical solutions of solitary wave propagating over constant depth (a/h = 0.1): (a) overview; (b) t=143.8 (sec).

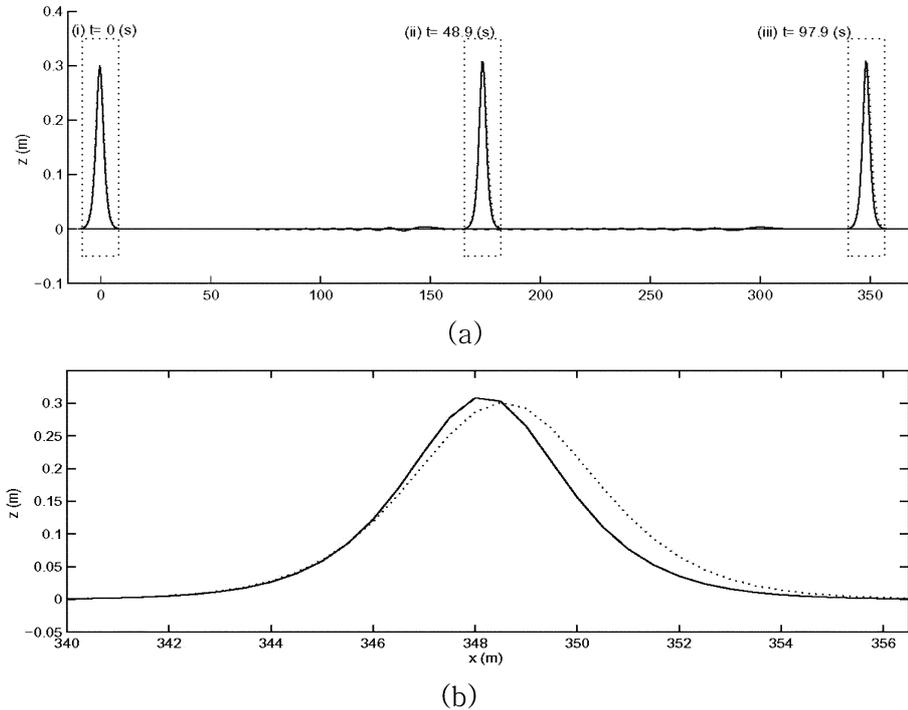


Fig. 2. Comparison of numerical and theoretical solutions of solitary wave propagating over constant depth ($a/h = 0.3$): (a) overview; (b) $t=97.9$ (sec).

형상과 이에 따른 유속의 분포를 계산영역 내부에 초기조건으로써 적용하였다. 해석에는 확장형 Boussinesq 방정식에 대한 고립파의 해석해(Wei and Kirby, 1995)를 이용하였다.

Fig. 1은 일정 수심 1 m에서 파고 0.1 m를 갖는 ($\epsilon = 0.1$) 고립파의 전파에 대한 모습을 나타내고 있다. 고립파의 파봉은 초기 조건에서 $x = 0$ 에 위치하였으며 따라서 Fig. 1(b)에서는 고립파가 약 수심의 500 배 정도를 전파한 후의 모습을 나타내고 있다. 파가 전파하는 x 방향으로서는 약 1000개의 요소가, y 방향으로서는 4개의 요소가 사용되었으며 평균 격자의 크기는 $\Delta x = \Delta y = 0.5$ m 이다. 고립파의 파장은 약 30.3 m에 해당하므로 한 파장 내에 대략 60개의 요소가 포함되어 있다. Fig. 1(b)에 나와 있는 바와 같이 수치결과는 해석해와 매우 유사하다.

파고를 증가시켜 0.3 m로 하였을 경우 ($\epsilon = 0.3$) 고립파의 전파는 해석해와 약간의 위상차를 나타낸다(Fig. 2). 300 파장 전파 후, 계산된 파속은 해석해에 비해 0.5% 작고 파고는 해석해에 비해 0.8% 큰데 이러한 경향의 수치해석 결과는 기존에 제시된 다른 확장형 Boussinesq 수치모형에서도 동일하게 나타나고 있으며 Wei와 Kirby는 파속의 경우 약 0.7%, 파고의 경우 약 1.2%의 오차를 보였다. (Wei and Kirby, 1995; Walkley and Berzins, 1999; Li *et al.*, 1999).

경사면에서 고립파의 천수현상

일정한 경사를 갖는 경사면에서 쇄파현상이 발생하지 않는 고립파의 천수현상에 대한 수치실험을 통하여 본 모형의 비선형성에 대한 정확도를 검토하였다. 수치실험결과는 Wei *et al.*(1995)이 수행한 수치실험과 비교하였다.

계산 영역은 $20 \leq x \leq 30$, $0 \leq y \leq 0.3$ (m)이고 y 축 방향으로의 수심변화는 없으며 $-20 \leq x \leq 0$ (m) 부분에서는 일정수심 $h_0 = 1$ m이고 $0 < x \leq 30$ (m)에서는 1:35의 일정경사의 수심을 갖는다. 고립파

는 위치에 고립파의 파봉이 $x = 0$ 위치하는 초기조건으로써 주어진다.

수심은 $x/h_0 = 10$ 에서 0.71 m이고 $x/h_0 = 28$ 에서 0.2 m이며 고립파의 파고는 0.2 m이다. 수치계산에서 크기 $\Delta x = \Delta y = 0.1$ m를 갖는 삼각형요소를 사용하였고 x 축으로의 요소의 총 개수는 500개, y 축으로는 3개이며 시간 간격은 $\Delta t = 0.02$ sec이다. Fig. 3에서 제시된 바와 같이 현 모형의 수치결과는 Nwogu(1993)의 유한차분모형의 결과와 파고의 크기와 자유수면의 형태면에서 양호한 일치를 보인다.

Fig. 3(c)와 (d)는 쇄파 발생 직전과 쇄파 발생 시작 시점의 모형 결과로써 완전비선형 방정식 모형과 약비선형 방정식 모형의 차이가 나타나고 있다. 완전 비선형 모형의 경우 쇄파 시에 발생하는 강비선형성을 제대로 모의하였으나, 약 비선형 모형의 경우 수치적으로 발산되어 실제값보다 수위가 과다 산정되는 결과를 모의하였다. 이는 약 비선형 방정식의 한계로써 추후에 강비선형 방정식으로 모형을 개발해야하는 필요성을 제시한다고 할 수 있다.

수중천퇴를 통과하는 파랑의 변형

굴절 및 회절 현상에 대한 검토를 하기 위하여 본 연구에서 수립된 모형을 Berkhoff 등(1982)의 수중 천퇴에서의 파랑 전파에 대한 실험에 적용하고 수치실험 결과와 비교하였다. 수심은 타원형 천퇴와 y 축과 20도의 각을 이루는 1:50의 일정 경사의 수심과의 조합으로 구성되어 있다.

계산 영역은 $-10 \leq x \leq 10$, $-15 \leq y \leq 23$ (m)이고 입사파 경계조건이 $y = -15$ m 위치하고 $x = -10$ m과 10 m에는 직벽경계조건 그리고 $17 \leq y \leq 23$ (m)에는 스폰지 층이 존재한다. 스폰지 층은 Wei와 Kirby(1995)가 제시한 방법을 채택하였으며 이는 임의의 수치감쇄항을 계산 영역 바깥 부분(스폰지 층)에 적용시켜 입사 파랑의 에너지를 감쇄시키는 방법이다.

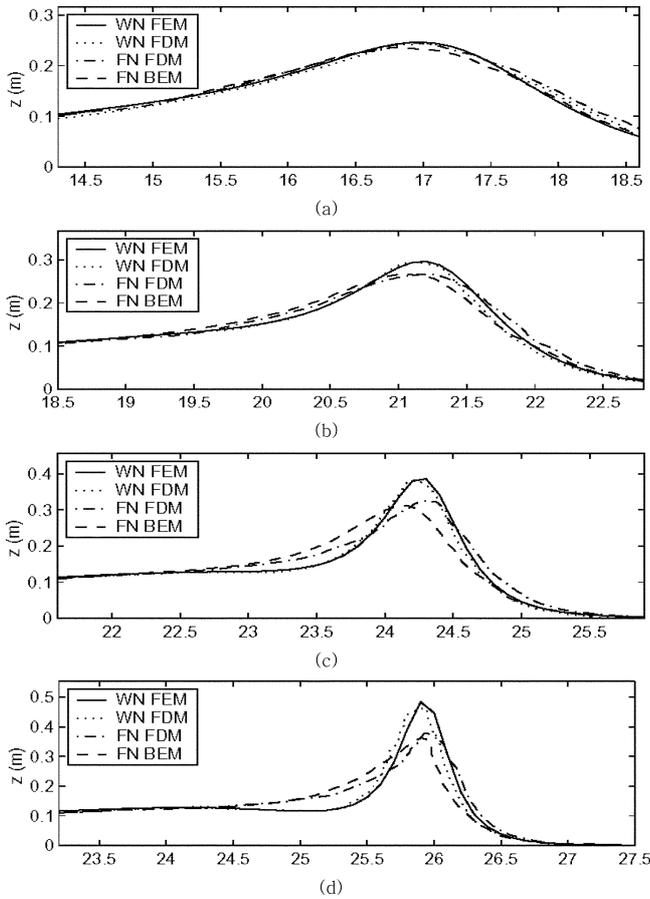


Fig. 3. Numerical simulation of solitary wave shoaling on slope of 1:35; (a) $t=5.18(\text{sec})$; (b) $t=6.59(\text{sec})$; (c) $t=7.68(\text{sec})$; (d) $t=8.28(\text{sec})$ (WN FEM: Present FEM; WN FDM: Weakly nonlinear FDM (Nwogu 1993); FN FDM: Fully nonlinear FDM (Wei *et al.* 1995); FN BEM: Fully nonlinear BEM (Grill *et al.* 1994)).

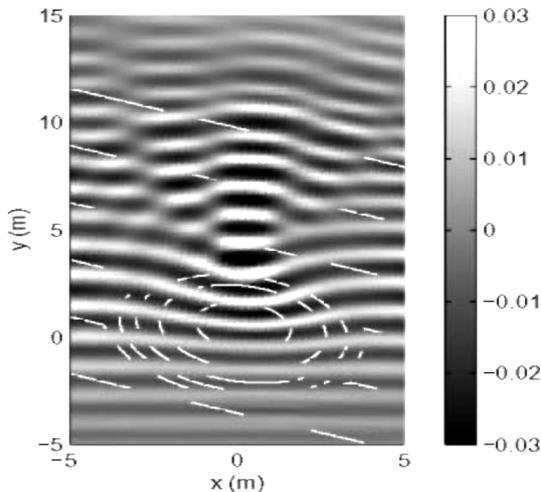


Fig. 4. Snapshot of free surface elevation at time $t = 19.8$ (sec).

주기 1 sec, 파고 2.32 cm의 정현파가 입사파 경계에서 생성되고 파장은 1.485 m이다. 계산 영역은 $\Delta x = \Delta y = 0.1$ m의 사변형 요소로 구성되었으며 한 파장에 약 15개의 요소가 포함된다. 수치실험

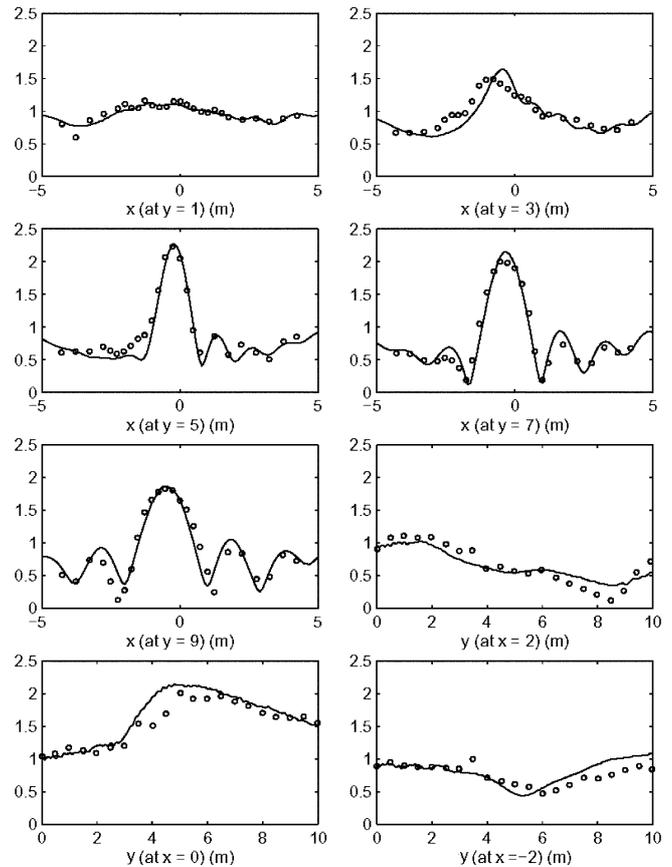


Fig. 5. Comparison of wave height between numerical result(---) and experimental data(o).

은 $0 \leq t \leq 50$ sec 동안 수행되었으며 Fig. 4에 $t = 19.8$ sec에서의 수면변위에 대한 snap shot을 제시하였으며 그림에서 수심의 등고선은 점선으로 표시하였다. 그림에서 보는 바와 같이 수립된 수치모형은 파랑의 굴절, 회절 및 천퇴 후면에서의 파랑 에너지의 집중현상을 잘 재현하고 있다. Berkhoff 등(1982)의 실험결과는 8개의 단면을 따라 비교하였으며 그 결과를 Fig. 5에 제시하였다. 계산 결과는 수치실험의 $48 \leq t \leq 50(\text{sec})$ 에 해당하는 두 주기의 파랑을 평균한 파고이며 준 정상상태는 약 $t = 30$ sec에서 도달하였다. 계산 결과는 실험결과와 매우 양호한 일치를 보이며 특히 단면 7에서 파랑의 비선형성으로 인해 굴절 효과가 감소한 현상을 잘 재현하고 있다.

결론

항만에서 파랑에 대한 모의를 좀 더 정확하게 하기 위해선 외해로부터 오는 파를 직접 모의할 수 있어야 한다. 확장형 Boussinesq 방정식은 파수(k)와 수심(h)의 곱인 kh 값이 π 보다 작은 해역부터 파가 쇠파되기 전까지 파의 변형과정을 모의할 수 있는 장점이 있기 때문에 많은 연구가 진행 중에 있다. 본 연구에서는 항만 등의 복잡한 형상을 구현할 수 있는 유한요소법을 이용하여 Nwogu(1993)의 확장형 Boussinesq 방정식에 대한 유한요소모형을 수립하였다.

기존에 다수의 연구자에 의하여 제시된 확장형 Boussinesq 수치모형의 최대 단점은 불투과 직벽 경계조건의 정확도가 방정식의 정

확도보다 $O(\mu^2)$ 만큼 떨어져, 결과적으로 완벽하게 질량보존을 만족시키지 못하는 데 있다. 본 연구에서는 이러한 한계를 극복하여 지배방정식과 동일한 정확도를 갖는 완전반사 경계조건을 유도하였고 이를 유한요소모형에 적용함으로써 질량보존과 완전반사의 두 가지 문제를 해결하였다. 이를 위해 완전 반사 경계조건을 적용할 수 있는 특정한 추가변수를 선택함으로써 3차 공간미분항의 차수를 줄임과 동시에 Galerkin 방법의 사용을 가능하게 하였다. 시간 적분 방법으로는 Adams-Bashforth-Moulton Predictor Corrector 기법을 적용하여 비물리적인 수치분산이나 수치소산 현상을 줄일 수 있도록 하였다.

수립된 모형의 정확성을 검증해 보기 위하여 고립파의 전파에 대한 수치실험을 전개하였고, 수치실험 결과 해석해나 기존의 유한차분모형과 양호한 일치성을 보였다. 본 확장형 Boussinesq 유한요소모형을 항만부진동 문제와 같은 좀 더 현실적인 문제에 적용할 경우 현존하는 선형 파랑 모델(예, 선형완경사 파랑방정식)에 비해 좀 더 정확할 것이라 판단된다. 또한 쇄파 현상에 대한 최근의 연구(Skotner and Apelt, 1999)등을 적용하여 연안류의 형성과 이에 따른 퇴적물 이동에도 적용할 수 있을 것이다. 특히, 흐름-파랑간의 상호작용에 대한 연구가 최근 많은 주목을 받고 있으며 확장형 Boussinesq 계열의 모형을 적용시키고자 하는 노력이 경주되고 있는바, 본 모형이 이러한 연구에 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

본 연구에서는 확장형 Boussinesq 방정식에 대하여 질량보존을 만족시키는 완전 반사 경계조건을 유도하고 모델에 적용시켰다. 그러나 유도된 반사조건은 직벽근처에서 $O(\nabla h) \approx O(\mu^2)$ 의 가정이 필요했으며 이는 수심이 급격히 변하는 지역에서는 본 연구에서 유도된 경계조건에 적용에 한계가 있다는 것을 의미한다. 따라서 이러한 가정이 없는 불투과 경계조건을 유도할 필요가 있으며 이는 최근 제시되고 있는 완전 비선형 확장형 Boussinesq 방정식에의 적용을 위해서도 필요할 것으로 판단된다.

기존에 제시된 확장형 Boussinesq 모형은 주로 유한차분모형으로써 행렬식을 풀지 않으므로 계산양에 대한 부담이 적었으나, 본 모형은 5개의 행렬식을 풀어야 하므로 상당한 양의 계산이 필요하다. 물론 유한차분모형에 비해 비구조격자를 사용하므로 훨씬 적은 양의 격자점으로 원하는 지역을 포괄 할 수 있으나, 5개의 행렬식을 풀어야 한다는 것은 많은 계산비용을 초래하므로 이를 개선시킬 필요가 있다.

감사의 글

이 논문은 2004년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었습니다(KRF-2004-003-D00417). 본 논문의 완성도를 높여주신 심사위원들께 진심으로 감사드립니다.

참고문헌

Beji, S. and K. Nadaoka, 1996. A formal derivation and numerical modeling of the improved Boussinesq equations for varying

- depth. *Ocean Engng.*, **23**(8): 691-704.
- Berkhoff, J.C.W., N. Booy and A.C. Radder, 1982. Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves. *Coastal Engng.*, **6**: 255-279.
- Chen, Q., P.A. Madsen, H.A. Schaffer and D.R. Basco, 1998. Wave-current interaction based on an enhanced Boussinesq approach. *Coastal Engng.*, **33**: 11-39.
- Chen, Y. and P.L.-F. Liu, 1995. Modified Boussinesq equations and associated parabolic models for water wave propagation. *J. Fluid Mech.*, **288**: 351-381.
- Elgar, S. and R.T. Guza, 1985. Shoaling gravity waves: comparisons between field observations, linear theory and a nonlinear model. *J. Fluid Mech.*, **158**: 47-70.
- Goring, D.G., 1979. Tsunamis - the propagation of long waves onto a shelf. Ph.D. dissertation, California Institute of Technology, Pasadena, CA.
- Lapidus, L. and J.H. Seinfeld, 1971. Numerical solution of ordinary differential equations. Academic Press.
- Li, Y.S., S.-X. Liu, Y.-X. Yu and G.-Z. Lai, 1999. Numerical modeling of Boussinesq equations by finite element method. *Coastal Engng.*, **37**: 97-122.
- Liu, P.L.-F., 1994. Model equations for wave propagations from deep to shallow water, in *Advances in Coastal and Ocean Engineering*, (ed. by P. L.-F. Liu), **1**: 125-157.
- Madsen, P.A., R. Murray and O.R. Sorensen, 1991. A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. *Coastal Engineering*, **15**: 371-388.
- Nwogu, O. 1993. An alternative form of the Boussinesq equations for nearshore wave propagation. *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engng.*, **119**(6): 618-638.
- Peregrine, D.H., 1967. Long waves on a beach. *J. Fluid Mech.*, **27**: 815-882.
- Skotner, C. and C.J. Apelt, 1999. Internal wave generation in an improved two-dimensional Boussinesq model. *Ocean Engng.*, **26**: 287-324.
- Walkley, M., 1999. A numerical method for extended Boussinesq Shallow-water wave equations. Ph.D Thesis, University of Leeds.
- Walkley, M. and M. Berzins, 1999. A Finite element method for the one-dimensional extended Boussinesq equations. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **29**: 143-157.
- Wei, G., J.T. Kirby, S.T. Grilli and R. Subramanya, 1995. A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part 1. Highly nonlinear unsteady waves. *J. Fluid Mech.*, **294**: 71-92.
- Wei, G. and J.T. Kirby, 1995. Time-dependent numerical code for extended Boussinesq equations. *ASCE J. Waterw., Port, Coast., Ocean Engrg.*, **121**: 251-261.
- Witting, J.M., 1984. A unified model for the evolution of nonlinear water waves. *J. Comp. Phys.*, **56**: 203-236.

2007년 5월 7일 원고접수

2007년 5월 16일 수정본 채택

담당편집위원: 이재학

부 록

$$\begin{aligned}
 [M'']_{ij} &= [M'_1]_{ij} + \mu^2 [M'_2]_{ij} \\
 [M']_{ij} &= [M'_1]_{ij} + \mu^2 [M'_2]_{ij} \\
 [M^n]_{ij} &= [M'_1]_{ij} = [M'_2]_{ij} = \langle \Psi_i \Psi_j \rangle \\
 [M'']_{ij} &= -C_4 \langle \Psi_i \Psi_{(1)k} \Psi_{(1)l} \Psi_{(1)j} \rangle (h_k)^2 - \beta \langle \Psi_i \Psi_{(1)k} \Psi_{(1)l} \Psi_j \rangle h_k h_l \\
 &\quad - C_5 \langle \Psi_{(2)k} \Psi_{(2)l} \Psi_{(2)j} \rangle (h_k)^2 - \frac{\beta}{2} \langle \Psi_{(1)k} \Psi_{(2)k} \Psi_{(2)j} \rangle (h_k)^2 \\
 f_i^{nn} &= f_{1i}^{nn} + \varepsilon f_{2i}^{nn} + \mu^2 f_{3i}^{nn} \\
 f_i^{un} &= f_{1i}^{un} + \varepsilon f_{2i}^{un} + \mu^2 f_{3i}^{un} \\
 f_i^{vn} &= f_{1i}^{vn} + \varepsilon f_{2i}^{vn} + \mu^2 f_{3i}^{vn} \\
 f_1^n &= \langle \Psi_{(1)k} \Psi_k \rangle h_k u_k^n + \langle \Psi_{(1)k} \Psi_k \rangle h_k v_k^n \\
 f_2^n &= \langle \Psi_{(1)k} \Psi_k \rangle \eta_k u_k^n + \langle \Psi_{(1)k} \Psi_k \rangle \eta_k v_k^n \\
 f_{3i}^{nn} &= C_6 \langle \Psi_{(1)k} \Psi_k \rangle (h_k)^3 E_{1k}^n + C_3 \left\{ \frac{2}{3} \langle \Psi_{(1)k} \Psi_{(1)l} \Psi_{(1)j} \rangle (h_k)^3 u_i^n \right. \\
 &\quad + \langle \Psi_{(1)k} \Psi_k \Psi_{(1)l} \rangle (h_k)^2 u_i^n R_{1l} + \frac{1}{3} \langle \Psi_{(1)k} \Psi_{(2)k} \Psi_{(1)l} \rangle (h_k)^3 v_1^n \\
 &\quad \left. + \langle \Psi_{(1)k} \Psi_k \Psi_{(1)l} \rangle (h_k)^2 v_1^n R_{31} + \frac{1}{3} \langle \Psi_{(1)k} \Psi_{(1)k} \Psi_{(2)l} \rangle (h_k)^3 v_1^n \right\} \\
 &\quad + C_6 \langle \Psi_{(2)k} \Psi_k \rangle (h_k)^3 E_{2k}^n + C_3 \left\{ \frac{1}{3} \langle \Psi_{(2)k} \Psi_{(1)k} \Psi_{(2)l} \rangle (h_k)^3 u_i^n \right. \\
 &\quad + \langle \Psi_{(2)k} \Psi_k \Psi_{(1)l} \rangle (h_k)^2 u_i^n R_{3l} + \frac{2}{3} \langle \Psi_{(1)k} \Psi_{(2)k} \Psi_{(2)l} \rangle (h_k)^3 v_1^n \\
 &\quad \left. + \langle \Psi_{(2)k} \Psi_k \Psi_{(1)l} \rangle (h_k)^2 v_1^n R_{21} \right\} + \frac{1}{3} \langle \Psi_{(2)k} \Psi_{(2)k} \Psi_{(1)l} \rangle (h_k)^3 u_i^n \\
 f_{1i}^{un} &= \langle \Psi_{(1)k} \Psi_k \rangle \eta_k
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{2i}^{un} &= \frac{1}{2} \langle \Psi_{(1)k} \Psi_k \rangle ((u_k^n)^2 + (v_k^n)^2) \\
 f_{3i}^{un} &= \langle \Psi_i \Psi_{(1)k} \Psi_{(2)l} \Psi_{(1)j} + \Psi_{(1)k} \Psi_{(1)l} \Psi_{(2)k} \Psi_{(2)l} \rangle (C_2 (h_k)^2 \dot{v}_1^n + \beta h_k h_l \dot{v}_1^n) \\
 f_{1i}^{vn} &= \langle \Psi_{(2)k} \Psi_k \rangle \eta_k^n \\
 f_{2i}^{vn} &= \frac{1}{2} \langle \Psi_{(2)k} \Psi_k \rangle ((u_k^n)^2 + (v_k^n)^2) \\
 f_{3i}^{vn} &= \langle \Psi_i \Psi_{(2)k} \Psi_{(1)l} + \Psi_{(2)k} \Psi_{(1)l} \Psi_{(2)k} \rangle (C_2 (h_k)^2 \dot{u}_1^n + \beta h_k h_l \dot{u}_1^n) \\
 f_i^{E_{in}} &= -\langle \Psi_{(1)k} \Psi_{(1)k} \rangle u_k^n - \langle \Psi_{(1)k} \Psi_{(2)k} \rangle v_k^n \\
 f_i^{E_{2n}} &= -\langle \Psi_{(2)k} \Psi_{(1)k} \rangle u_k^n - \langle \Psi_{(2)k} \Psi_{(2)k} \rangle v_k^n \\
 q_i^{nn} &= -\int_{\Gamma} n_x [(\Psi_i \Psi_k)(h_k + \eta_k) u_k^n + \mu^2 (C_1 (\Psi_i \Psi_k \Psi_{(1)l}))(h_k)^3 \\
 &\quad P^n C_3 \{ (\Psi_i \Psi_k \Psi_{(1)l}))(h_k)^2 h_l P_1^n + \frac{1}{3} (\Psi_i \Psi_{(1)k} \Psi_{(1)l}))(h_k)^3 u_1^n \\
 &\quad + (\Psi_i \Psi_k \Psi_{(1)l}))(h_k)^2 u_1^n R_{1l} + \frac{1}{3} (\Psi_i \Psi_{(2)k} \Psi_{(1)l}))(h_k)^3 v_1^n + (\Psi_i \Psi_k \Psi_{(1)l}))(h_k)^2 v_1^n R_{3l} \}] d\Gamma \\
 &\quad + h_y [(\Psi_i \Psi_k)(h_k + \eta_k) v_k^n + \mu^2 (C_1 (\Psi_i \Psi_k \Psi_{(2)l}))(h_k)^3 P_1^n \\
 &\quad C_3 \{ (\Psi_i \Psi_k \Psi_{(2)l}))(h_k)^2 h_l P_1^n + \frac{1}{3} (\Psi_i \Psi_{(1)k} \Psi_{(2)l}))(h_k)^2 u_1^n \\
 &\quad + (\Psi_i \Psi_k \Psi_{(1)l}))(h_k)^2 u_1^n R_{3l} \\
 &\quad + \frac{1}{3} (\Psi_i \Psi_{(2)k} \Psi_{(2)l}))(h_k)^3 v_1^n + (\Psi_i \Psi_k \Psi_{(1)l}))(h_k)^2 v_1^n R_{2l} \}] d\Gamma \\
 q_i^{un} &= -\int_{\Gamma} n_x [(\Psi_i \Psi_k) \eta_k^n + \varepsilon \frac{1}{2} (\Psi_i \Psi_k)((u_k^n)^2 + (v_k^n)^2) + \mu^2 (\Psi_i \Psi_k \Psi_{(1)l}) C_2 (h_k)^2 \dot{u}_1^n \\
 &\quad + \beta h_k h_l \dot{u}_1^n + \mu^2 (\Psi_i \Psi_k \Psi_{(2)l}) (C_2 (h_k)^2 \dot{v}_1^n + \beta h_k h_l \dot{v}_1^n)] d\Gamma \\
 q_i^{vn} &= -\int_{\Gamma} n_y [(\Psi_i \Psi_k) \eta_k^n + \varepsilon \frac{1}{2} (\Psi_i \Psi_k)((u_k^n)^2 + (v_k^n)^2) + \mu^2 (\Psi_i \Psi_k \Psi_{(1)l}) C_2 (h_k)^2 \dot{u}_1^n \\
 &\quad + \beta h_k h_l \dot{u}_1^n + \mu^2 (\Psi_i \Psi_k \Psi_{(2)l}) (C_2 (h_k)^2 \dot{v}_1^n + \beta h_k h_l \dot{v}_1^n)] d\Gamma
 \end{aligned}$$