Journal of Korean
Data & Information Science Society
2007, Vol. 18, No. 3, pp. 637 ~ 644

Estimation for Block and Basu Model under System Level Life Testing

In Sob Hwang[1] · Kil Ho Cho[2] · Jang Sik Cho[3]

Abstract

We consider a life testing experiment in which several two component shared parallel system are put on test, and the test is terminated at a pre-designed experiment. The bivariate data obtained from such a system level life testing can be classified into three cases: ① the case of failed two components with known failure times, ② the case of one censored component and the other failed component of which the failure time might be known or unknown, ③ the case of censored two components. In this paper, the maximum likelihood estimators of parameters for Block and Basu bivariate exponential model under above censoring scheme are obtained and the results of comparative studies are presented.

Keywords : 부분분배부하시스템, 블록-바수 모형, 최우추정량

1. 서론

두 개의 부품이 병렬구조로 구성되어있는 시스템에서는 한 부품이 고장나더라도 시스템은 정상적으로 가동이 된다. 이때 두 부품의 수명시간을 X와 Y로 둔다면, X와 Y는 일반적으로 서로 종속적인 확률변수로 가정하는 것이 현실적인 경우가 많다. 이는 두 개의 부품을 가지는 병렬 시스템에서 한 부품이 고장나면 이 부품이 분담하던 부하가 정상부품에 전가되어 정상부품의 고장률에 영향을 받게 되는데, 이를 부분분배부하시스템(Shared Parallel System)이라고 한다. 예를 들면, 두 개의 엔진을 가진 비행기의 엔진 고장을 시험하거나 사람의 눈, 귀, 신장 등 두 개씩 짝지어진 기관의 성능과 수명시간을 시험할 때 적용되는데 이러한 부분분배시스템의 구성요소(부품)의 수명은 상호 의존적이라고 할 수 있다.

이렇게 두 개의 부품으로 구성된 부분분배부하시스템의 수명은 이변량 지수분포를

1) 대구광역시 북구 산격동 1370번지 경북대학교 통계학과 석사과정
2) 교신저자 : 대구광역시 북구 산격동 1370번지 경북대학교 통계학과 교수
E-mail : khcho@knu.ac.kr
3) 부산광역시 남구 대연동 110-1 경성대학교 정보통계학과 부교수

따르게 되는데, 이러한 이변량 지수분포는 Freund(1961)가 무기억성과 두 개의 주변분포가 지수분포를 가지지 않는 분포를 발견했으며, Marshall과 Olkin(1967)은 무기억성을 가지면서 주변분포가 지수분포인 이변량분포를 유도하였는데 두 부품이 동시에 고장날 가능성을 포함하고 있다. Block과 Basu(1974)는 마샬-올킨(Marshall-Olkin) 모형에서 주변분포가 지수분포를 가지지 않고, 절대연속이며 무기억성을 가지는 이변량 지수분포를 제안하였다. Weier(1981)는 동일한 두 개의 부품으로 구성된 부분분배시스템을 이변량지수분포로 모형화하고 모수를 베이즈 추정하였다. Sarkar(1987)는 블록-바수(Block-Basu) 모형의 특징을 이용하여, 두 체계의 관측시간이 서로 다른 경우에 대한 모형을 세우고, 그 모형의 여러 가지 성질을 조사하였다.

본 연구에서는 블록-바수 모형에서 중도절단 자료를 이용하여 모수를 추정하고자 하며, 모형은 아래와 같다.

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\lambda_1\lambda(\lambda_2+\lambda_{12})}{\lambda_1+\lambda_2}e^{-\lambda_1 x-(\lambda_2+\lambda_{12})y} & \text{if } x<y \\ \dfrac{\lambda_2\lambda(\lambda_1+\lambda_{12})}{\lambda_1+\lambda_2}e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})x-\lambda_2 y} & \text{if } x>y \end{cases} \tag{1}$$

여기서 $\lambda=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_{12}$이다.

체계수명시험에서 정상수명시험을 실시하는 경우에는 예정된 시험시간 내에 모든 부품이 고장 나지 않으면 시스템은 가동 중이므로 자료에서 제외되어 자료의 수가 적어지는 문제가 발생하게 되고, 모든 시스템이 고장 나는 시점까지 시험시간을 연장하면 검사비용이 증가하게 된다. 이러한 문제점을 극복하기 위하여 실험현장에서는 중도에 시험을 중단하는 방법을 많이 사용한다.

중도에 시험을 중단하는 방법에는 여러 가지가 있는데, 본 연구에서는 블록-바수 모형의 이변량 지수분포를 따르는 n개의 부분부하시스템을 미리 정해놓은 시간(t)동안 수명시험하는 제 1종 관측중단을 실시하며, 이렇게 얻어진 부품의 수명자료를 이용하여 모형의 모수에 대한 최우추정량을 구한다. 여기서 강조할 사항은 시험단위가 시스템이지만 얻어지는 수명자료는 부품의 것이라는 점이다. 시스템이 고장나면 각 부품의 수명은 관측가능하며, 한 부품만 고장이면서 관측 중단된 시스템의 경우와 불가능한 경우로 나누어 생각한다.

조장식과 신임희(1999)는 마샬-올킨 모형에서 임의중단된 자료로 관측되는 경우에 모수에 대한 추론을 하였다. 프론드(Freund) 모형의 경우 홍연웅(1998)은 제 2종 관측중단된 경우의 모수를 추정하였고, 조장식(2002)은 무정보적 사전분포를 이용하여 베이지안 추정을 연구하였으며, 조길호와 김영일(2003)은 제 1종 관측중단된 경우에 모수를 추정하였다. 본 연구에서는 블록-바수 모형을 따르는 두 부품의 수명이 이변량 제 1종 관측중단된 자료로 관찰되는 경우, 모수들에 대한 최우추정량을 구하고 그 추정량들의 성질을 조사하고자 한다.

2. 관측중단된 자료의 최우추정량

2.1 관측중단된 자료의 유형

시스템의 수명은 두 개의 부품이 모두 고장 나는 시점인 $\max(X,Y)$이다. 적어도 하나의 부품이 시험 종결시점까지 작동하면 시스템은 정상이므로 외형적으로 두 부품

모두 정상인 시스템과 한 부품만 고장인 시스템은 구분되지 않는다. 고장 난 부품을 교체하지 않는다는 가정 하에서 시스템의 수명을 기준으로 고장상태와 비 고장 상태를 구분하면 두 부품 모두 고장 난 경우와 적어도 한 부품이 작동하는 경우의 두 가지로 구분되어 관찰이 단순화 될 수 있지만 데이터의 해석은 용이하지 않다. 그렇다고 조립되기전의 부품단위에서 수명시험을 실시할 경우, 얻어진 데이터에는 부품수명사이의 상호종속성이 반영되어있지 않으므로 부하의 전가가 모수에 미치는 영향을 설명할 수 없다. 결국 시스템 단위의 실험을 실시하되 구성부품의 수명시간도 관측되어지는 것이 바람직하다고 사료된다.

(X_1, Y_1), $(X_2, Y_2), \cdots, (X_n, Y_n)$을 식 (1)의 이변량 지수분포를 따르는 확률벡터라 하고 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots,$ (x_n, y_n)을 그들의 관측치라 하자. 부품들의 관측중단된 시간을 t라 하면, 관찰된 i번째 부품들의 수명시간 (x_i, y_i)는 다음과 같이 나누어볼 수 있다.

$$(x_i, y_i) = \begin{cases} (x_i, y_i), & \max(x_i, y_i) < t \\ (x_i, t), & x_i < t < y_i \\ (t, y_i), & y_i < t < x_i \\ (t, t), & t < \min(x_i, y_i) \end{cases}$$

그리고 $I(\cdot)$를 지시함수라 하고, $n_j (j = 1, \cdots, 5)$를 다음과 같이 정의한다.

$$n_1 = \sum_{i=1}^{n} I(x_i < y_i < t), \quad n_2 = \sum_{i=1}^{n} I(y_i < x_i < t), \quad n_3 = \sum_{i=1}^{n} I(x_i < t < y_i)$$

$$n_4 = \sum_{i=1}^{n} I(y_i < t < x_i), \quad n_5 = \sum_{i=1}^{n} I(\min(x_i, y_i) > t)$$

또한 D_j를 $n_j (j = 1, \cdots, 5)$의 조건을 만족하는 시스템의 집합이라 하자.

2.2 최우추정량

수명시험이 종료된 n개의 시스템에서는 하나의 부품만 고장인 시스템이 포함될 수 있으며, 이러한 시스템은 기능적으로 정상이지만 시스템의 구조에 따라서는 i) 고장 난 부품의 수명측정이 가능한 경우, ii) 고장 사실은 알 수 있지만 수명측정이 불가능한 경우, iii) 부품의 고장사실 조차 알 수 없는 경우의 세 가지로 구분할 수 있다. 하지만 본 연구에서는 i)과 ii)만 다룬다.

2.2.1 한 부품만 고장난 시스템의 부품수명을 알 수 있는 경우

수명시험의 종결시점 t와 시스템을 구성하는 부품의 수명을 비교하면 두 부품이 모두 고장인 시스템부터 한 부품도 고장이 발생하지 않은 시스템까지 다음의 다섯 유형의 데이터가 얻어질 수 있으며, 각 경우에 대하여 우도함수를 구하면 다음과 같다.

(a) $0 < x_i < y_i < t$ 일 경우

부품 1이 먼저 고장난 후 부품 2가 관측중단시간(t) 이전에 고장나게 됨으로서, 두 부품 모두가 관측 가능한 경우이다. 이러한 경우에 확률밀도함수는

$$\frac{\lambda_1\lambda(\lambda_2+\lambda_{12})}{\lambda_1+\lambda_2}e^{-\lambda_1 x-(\lambda_2+\lambda_{12})y}$$

이고, 고장난 n_1개의 시스템에서 관측된 부품의 고장데이터에 대한 우도함수는 다음과 같다.

$$L_a=\left(\frac{\lambda_1\lambda(\lambda_2+\lambda_{12})}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n_1}e^{-\lambda_1\sum_{i\in D_1}x_i-(\lambda_2+\lambda_{12})\sum_{i\in D_1}y_i} \tag{2}$$

(b) $0<y_i<x_i<t$ 일 경우

경우 (a)와는 달리 부품 2가 먼저 고장난 후 부품 1이 관측중단시간(t) 이전에 고장나는 경우로 n_2개의 시스템의 고장데이터에 대한 우도함수는 다음과 같다.

$$L_b=\left(\frac{\lambda_2\lambda(\lambda_1+\lambda_{12})}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n_2}e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})\sum_{i\in D_2}x_i-\lambda_2\sum_{i\in D_2}y_i} \tag{3}$$

(c) $0<x_i<t<y_i$ 일 경우

부품 1이 관측중단시간 이전에 고장이 나면서 고장시간은 관측되고, 부품 2는 관측중단시간까지 고장나지 않아 관측중단시간인 t로 대체되어진 하나의 시스템에 대한 확률밀도함수는

$$\frac{\lambda_1\lambda}{\lambda_1+\lambda_2}e^{-\lambda_1 x-(\lambda_2+\lambda_{12})t}$$

와 같으며, n_3개의 시스템에서 얻어진 데이터에 대한 우도함수는 다음과 같다.

$$L_c=\left(\frac{\lambda_1\lambda}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n_3}e^{-\lambda_1\sum_{i\in D_3}x_i-(\lambda_2+\lambda_{12})n_3 t} \tag{4}$$

(d) $0<y_i<t<x_i$ 일 경우

경우 (c)와 같은 방법으로 n_4개의 시스템에서 얻어진 데이터에 대한 우도함수는 다음과 같다.

$$L_d=\left(\frac{\lambda_2\lambda}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n_4}e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})n_4 t-\lambda_2\sum_{i\in D_4}y_i} \tag{5}$$

(e) $0<t<\min(x_i,y_i)$ 일 경우

두 부품 모두 관측중단시간까지 고장나지 않아 관측중단시간인 t로 대체되어진 n_5개의 시스템에서 얻어진 데이터에 대한 우도함수는 다음과 같다.

$$L_e=e^{-\lambda n_5 t} \tag{6}$$

n개의 시스템을 수명시험하여 얻어진 제 1종 관측중단된 데이터에 대한 대수우도 함수는 식 (2)부터 식 (6)까지 대수변환하고 합하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \ln L(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_{12}) = & \ (n-n_5)\ln(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_{12})+(n_1+n_3)\ln\lambda_1 \\ + & \ (n_2+n_4)\ln\lambda_2-(n-n_5)\ln(\lambda_1+\lambda_2) \\ + & \ n_1\ln(\lambda_2+\lambda_{12})+n_2\ln(\lambda_1+\lambda_{12}) \\ - & \ \lambda_1\Big(\sum_{i\in D_1}x_i+\sum_{i\in D_2}x_i+\sum_{i\in D_3}x_i+n_4t+n_5t\Big) \\ - & \ \lambda_2\Big(\sum_{i\in D_1}y_i+\sum_{i\in D_2}y_i+\sum_{i\in D_4}y_i+n_3t+n_5t\Big) \\ - & \ \lambda_{12}\Big(\sum_{i\in D_1}y_i+\sum_{i\in D_2}x_i+n_3t+n_4t+n_5t\Big) \end{aligned} \tag{7}$$

식 (7)로부터 모수의 최우추정량을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{\lambda} &= \frac{n-n_5}{\sum_{i\in D_1}x_i+\sum_{i\in D_2}y_i+\sum_{i\in D_3}x_i+\sum_{i\in D_4}y_i+n_5t} \\ \widehat{\lambda_1} &= \hat{\lambda}-\frac{n_1}{\sum_{i\in D_1}y_i-\sum_{i\in D_1}x_i+n_3t-\sum_{i\in D_3}x_i} \\ \widehat{\lambda_2} &= \hat{\lambda}-\frac{n_2}{\sum_{i\in D_2}x_i-\sum_{i\in D_2}y_i+n_4t-\sum_{i\in D_4}y_i} \\ \widehat{\lambda_{12}} &= \hat{\lambda}-\widehat{\lambda_1}-\widehat{\lambda_2} \end{aligned} \tag{8}$$

2.2.2 한 부품만 고장난 시스템의 부품수명을 알 수 없는 경우

시험의 종결시점까지 하나의 부품에서 고장이 발생한 사실은 알 수 있으나 기술적, 물리적 또는 경제적인 이유로 고장시간 측정이 불가능하거나 비합리적인 경우, 고장난 부품의 수명을 처리하는 방법에 따라 추정결과가 다르게 나타날 수 있다. 본 연구에서는 부품 1이 고장 났어도 수명을 알 수 없을 때, 부품 1의 수명을 p_1t이라 하고 식(4)에서 x_i를 p_1t로 대치하여 다음의 식 (9)를 얻는다. 마찬가지로 부품 2가 고장이면 식 (5)에서 y_i대신 p_2t를 대입하여 식 (10)을 얻는다. 여기서 p_1과 p_2는 0과 1 사이의 확률 값을 의미한다.

$$L_{c'} = \left(\frac{\lambda_1\lambda}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n_3} e^{-\lambda_1p_1n_3t-(\lambda_2+\lambda_{12})n_3t} \tag{9}$$

$$L_{d'} = \left(\frac{\lambda_2\lambda}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n_4} e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})n_4t-\lambda_2p_2n_3t} \tag{10}$$

그러므로 대수 우도함수는 식 (2), (3), (6)과 (9), (10)으로부터 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}\ln L(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_{12}) =\ & (n-n_5)\ln(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_{12})+(n_1+n_3)\ln\lambda_1 \\ +\ & (n_2+n_4)\ln\lambda_2-(n-n_5)\ln(\lambda_1+\lambda_2) \\ +\ & n_1\ln(\lambda_2+\lambda_{12})+n_2\ln(\lambda_1+\lambda_{12}) \\ -\ & \lambda_1\Big(\sum_{i\in D_1}x_i+\sum_{i\in D_2}x_i+p_1n_3t+n_4t+n_5t\Big) \\ -\ & \lambda_2\Big(\sum_{i\in D_1}y_i+\sum_{i\in D_2}y_i+p_2n_4t+n_3t+n_5t\Big) \\ -\ & \lambda_{12}\Big(\sum_{i\in D_1}y_i+\sum_{i\in D_3}x_i+n_3t+n_4t+n_5t\Big)\end{aligned} \tag{11}$$

식 (11)로부터 모수의 최우추정량을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\hat{\lambda} &= \frac{n-n_5}{\sum_{i\in D_1}x_i+\sum_{i\in D_2}y_i+p_1n_3t+p_2n_4t+n_5t} \\ \widehat{\lambda_1} &= \lambda-\frac{n_1}{\sum_{i\in D_1}y_i-\sum_{i\in D_1}x_i+\ n_3t-p_1n_3t} \\ \widehat{\lambda_2} &= \lambda-\frac{n_2}{\sum_{i\in D_2}x_i-\sum_{i\in D_2}y_i+\ n_4t-p_2n_4t} \\ \widehat{\lambda_{12}} &= \lambda-\ \lambda_1-\ \lambda_2\end{aligned} \tag{12}$$

3. 추정량들의 비교와 결론

블록-바수 모형의 이변량 지수분포를 따르는 자료를 생성시키기 위해 Friday와 Patil(1977)이 제안한 방법을 사용한다. $\lambda_1=2.5$, $\lambda_2=2.5$, $\lambda_{12}=4.3$에 대하여 식 (1)을 따르는 표본크기 20의 이변량 자료를 Friday와 Patil의 방법을 사용하여 생성하면 (.1237, .0959), (.5987*, .6173*), (.0187, .1142), (.4165*, .1771), (.1959, .0953), (.6531*, .4767*), (.3274, .1435), (.1908, .0082), (.2923, .3700), (.2207, .3528), (.1825, .1000), (.0598, .0775), (.0657, .0155), (.0145, .3656), (.1796, .0098), (.0025, .1726), (.1045, .7255*), (.2448, .2805), (.0941, .0058), (.4853*, .0535)이다. $t=0.4$라 하면 *로 표시된 값은 관측중단된 자료가 되어 계산과정에서 0.4로 대치되며, 밑줄친 값은 고장난 시간을 모를 경우에 $p(0\leq p\leq .5)$로 대치된다. $p=p_1=p_2=0.0, 0.1, \cdots, 0.5$에 대하여 위의 데이터를 이용하여 모수의 최우추정치의 편의와 평균제곱오차를 구하면 <표 1>과 <표 2>와 같다. 표에서 절대편의의 합과 평균제곱오차의 합은 p값이 0.2부근일수록 p값을 아는 경우의 총 절대편의와 총 평균제곱오차보다 작다는 것을 알 수 있다.

<표 1> 최우추정량의 편의

p	최우추정량의 편의 및 총 절대편의			
	λ_1	λ_2	λ_{12}	절대총합
※	-1.146	-.688	-.157	1.991
0.05	.173	.868	-2.112	3.153
0.10	-.136	.528	-1.682	2.346
0.15	-.437	.192	-1.254	1.883
0.20	-.730	-.140	-.826	1.696
0.25	-1.017	-.469	-.398	1.884
0.30	-1.298	-.797	.032	2.217
0.35	-1.575	-1.125	.466	3.166
0.40	-1.847	-1.454	.904	4.205

※는 고장난 부품의 수명을 아는 경우를 나타냄.

<표 2> 최우추정량의 평균제곱오차

p	최우추정량의 평균제곱오차 및 총합			
	λ_1	λ_2	λ_{12}	총합
※	1.312	.473	.025	1.810
0.05	.030	.754	4.462	5.246
0.10	.019	.278	2.829	3.126
0.15	.191	.037	1.572	1.800
0.20	.533	.020	.683	1.236
0.25	1.035	.220	.159	1.414
0.30	1.686	.635	.001	2.322
0.35	2.479	1.265	.217	3.961
0.40	3.411	2.114	.818	6.343

※는 고장난 부품의 수명을 아는 경우를 나타냄.

또한 모의실험을 통해 표본크기와 관측중단시간의 변화에 따른 모수의 최우추정량의 총절대편의와 총평균제곱오차를 $p_1 = p_2 = p_3 = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, \cdots, 0.5$일 때 1,000회 반복하여 계산한 결과, $p = 0.35$이면 표본크기와 관측중단시간에 무관하게 총절대편의와 총평균제곱오차 모두 고장난 부품의 수명과 비슷한 결과가 나온다는 것을 알 수 있었다. 그러므로 두 부품 중 한 부품만 고장일 경우, 그 부품의 수명을 알 수 있는 경우가 가장 좋지만, 그 부품의 수명을 알 수 없을 경우는 관측중단시간

의 1/3 가량의 시간을 고장시간으로 두고 수명을 추정하는 것이 가장 바람직한 추정량을 구할 수 있는 방법이라는 것을 알 수 있다.

참고문헌

1. 조길호, 김영일(2003), Estimation of Bivariate Exponential Model under Censored Data, 한국데이터정보과학회지, 14권, 4호, 751-758.
2. 조장식, 백승욱, 김희재(2002), Noninformative Priors in Freund's Bivariate Exponential Distribution : Symmetry Case, 한국데이터정보과학회지, 13권, 2호, 235-242.
3. 조장식, 신임희(1999), 이변량 임의 중단된 이변량지수 모형에 대한 추론, 한국데이터정보과학회지, 10권, 1호, 37-45.
4. 홍연웅(1998), 체계수명시험에서 얻어진 부품의 수명자료를 이용한 Freund 모형의 추정, 대한품질경영학회지, 26권 제 2호, 27-38.
5. Block, H. W. and Basu, A. P.(1974). A Continuous Bivariate Exponential Extension, *Journal of the American Statistical Association*, 69, 1031-1037.
6. Freund, John E.(1961). A Bivariate Extension of the Exponential Distribution, *Journal of the American Statistical Association*, 56, 971-977.
7. Friday, D. S. and Patil, G. P.(1977). A Bivariate Exponential Model with Applications to reliability and Computer generation of Random Variables, *The Theory and Application of Reliability*, 1, 527-549.
8. Hanagal, David D. and Kale. B. K.(1991). Large Sample Tests of Independence for Absolutely Continuous Bivariate Exponential Distribution, *Communication in Statistic-Theory and Method*, 20, 1301-1313.
9. Marshall, A. W. and Olkin, I.(1967), A Multivariate Exponential Distribution, *Journal of the American Statistical Association*, 62, 30-44.
10. Sarkar, Sanat K.(1987). A Continuous Bivariate Exponential Distribution, *Journal of the American Statistical Association*, 82, 667-675.
11. Weier, D. R.(1981). Bayes Estimation for a Bivariate Survaval Model Based on Exponential Distribution, *Communication in Statistics-Theory and Method*, 10, 1415-1427.

[2007년 6월 접수, 2007년 7월 채택]