

정지된 2차원 액체 필름 끝단의 비점성 수축특성에 관한 수치연구

안자일¹ · 송무석^{2,†}

¹수퍼센츄리, ²홍익대학교 조선해양공학과

Numerical Investigation on Two-Dimensional Inviscid Edge Receding of a Stationary Fluid Sheet

Jail Ahn¹ and Museok Song^{2,†}

¹Super Centurt Co., Ltd. 220 Koong-Dong, Yuseong-Gu 305-764, Korea

²Department of Naval Architecture and Ocean Engineering, Hongik University, Jochiwon, Chung-Nam 339-701 Korea

요 약

경계를 가지는 비점성 2유체 유동을 해석할 수 있는 수치해법을 개발하고 이를 이용하여 초기에 정지되어 있는 액체판의 끝단에서 일어나는 수축현상을 분석하였다. 경계면은 보오텍스 쉬트로 모델하였고 유동장은 와도격자법과 경계면추적법을 적용하여 계산하였다. 액체판의 끝단은 표면장력에 의해 수축되고 몽푁한 형상을 취하게 되고, 이러한 끝단은 잘록한 형상의 통로에 의하여 액체판에 연결되어 안쪽으로 끌려들게 된다. 이러한 현상을 비점성 조건에서 운동에너지 변화를 포함한 무차원 수의 함수로 분석하였다. 끝단의 수축속도는 로 파악되었고 표면장력파의 전파특성이 엄밀하게 조사되어야 함을 밝혔다.

Abstract – A two-dimensional numerical method for inviscid two-fluid flows with evolution of density interface is developed, and an initially stationary two-dimensional fluid sheet surrounded by another fluid is studied. The interface between two fluids is modeled as a vortex sheet, and the flow field with the evolution of interface is solved by using vortex-in-cell/front-tracking method. The edge of the sheet is pulled back into the sheet due to surface tension and a blob is formed at the edge. This blob and fluid sheet are connected by a thin neck. In the inviscid limit, such process of the blob and neck formation is examined in detail and their kinematic characteristics are summarized with dimensionless parameters. The edge recedes at and the capillary wave propagating into the fluid sheet must be considered for better understanding of the edge receding.

Keywords: Fluid Sheet(액체판), Free Edge Receding(자유끝단끌림), Vortex-In-Cell(보오텍스격자법), Front-Tracking(경계면추적법), Blob, Capillary Wave

1. 서 론

물적 특성이 서로 다른 두 유체가 접하고 있는 경우 두 유체사이에는 밀도 경계면(density interface)이 존재하게 되며 이러한 밀도 경계면은 일상적인 공학적 문제에서 다양한 형태로 존재한다. 작게는 잉크젯 프린터나 내연기관의 연료분사, 미소중력(micro-gravity) 상태에서의 열전달 문제, 수용액이나 섬유물질의 생산 문제에서 대규모 스케일로는 해양의 기름유출 추적문제, 빗방울의 해수면 충돌, 선체 표면에 걸리는 마찰저항저감 문제, 기체를 포함한

기름의 파이프내 이동 등 이루 헤아릴 수 없는 영역에서의 공학적인 문제가 밀도 경계면을 포함하는 2상(two-fluid) 이상의 유체간의 상호작용을 동반한다. 이러한 밀도 경계면은 두 유체의 물적특성이 매우 짧은 공간상에서 급격히 변화하는 특성을 가지고 있어 일반적인 수치해석을 어렵게 하는 경우가 많다.

본 연구에서는 유체간의 밀도 경계면을 엄밀히 추적하면서 경계에서의 물리적 현상을 충실하게 설명할 수 있는 2차원 비점성 수치해법을 보오텍스 격자법(vortex-in-cell method) 과 경계면 추적법(front-tracking method)을 도입하여 개발하였으며 Fig. 1과 같은 초기 형상을 가지는 문제에 적용하여 수치해석을 수행하였다. Fig. 1

[†]Corresponding author: msong@hongik.ac.kr

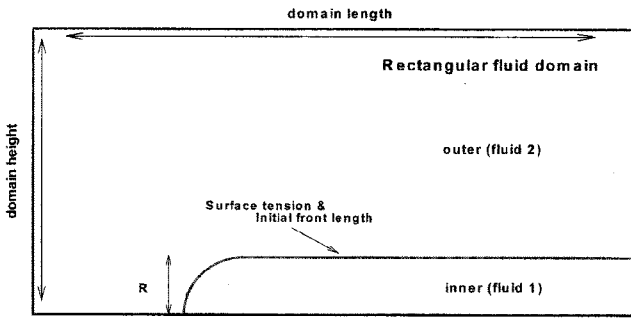


Fig. 1. Definition sketch of the problem.

과 같은 액체판은 (fluid sheet) 다양한 액체 분사장치에서 초기에 형성된다. 일반적으로 매우 얇은 액체판의 끝단은 표면장력으로 인하여 중앙쪽으로 끌려들게 되는데, 이때에 몽푁한 원형의 액체질량이(blob) 형성되고 원래 액체판과 볼륨은 매우 가는 넥으로(neck) 연결된다. 이러한 액체덩어리와 넥의 생성, 그리고 넥에 앞서서 중앙으로 전파되어 나가는 수면파의 특성은 (Fig. 2참조) 이후에 발생하는 액체실린더의 (liquid ligament) 유적화 과정에 (atomization 혹은 droplet formation) 매우 중요한 기초정보로 요구된다. 이러한 현상에 대한 실험적 연구는 Mansour *et al.* [1990], Rizk *et al.* [1980], Mansour *et al.* [1991] 등에 의하여 폭넓게 이루어진 바 있고 Song *et al.* [1999]는 경계면추적법을 이용하여 Navier-Stokes 방정식을 해석함으로써 Ohnsorge 수에 의해서 edge receding 속도가 지배 받는다는 사실을 확인한 바가 있다.

본 연구에서는 볼륨의 중앙으로의 진행과 넥의 생성 패턴을 비점성극한에서 유체 운동학적인 관점으로 설명하고자 하였고, 이들의 특성을 무차원 파라미터를 중심으로 정리하였다. 또한 볼륨의 진행 속도를 넥에 앞서서 전파되는 파의 에너지 분산을 포함함으로써 단순한 에너지균형만을(energy balance between surface tension and kinetic energies) 고려할 경우 나타나는 오차를 설명하였다.

2. 문제의 정식화 및 수치해법

본 연구에 사용한 수치해법은 경계면에 존재하는 vorticity가 층분히 경계면에만 존재할 수 있다는 비점성 가정을 도입하여 효과적으로 2상 유체유동을 표현할 수 있는 vortex-in-cell 방법이고, vorticity를 동반하는 경계면은 경계면추적법(front-tracking method)을 응용하여 살펴보았다.

위의 Fig. 2와 같이 두 유체의 경계를 vortex sheet으로 모델링하고, 경계면에서의 유속 차이를 vortex sheet strength로 놓은 후, 그 vortex sheet을 여러 개의 요소로 분할하여(front element) 각 요소의 circulation을 vortex sheet strength를 적분하여 구하고 G로 한다. 이 circulation은 아래의 식 (1)에 따라서 변화하는데, 결국 밀도경계면의 순환값에 대한 미분방정식을 유동장내의 대표길이(initial front thickness)와 경계면에서 속도차이를 이용하여 무차원화 시킨 것이다. 상세한 사항은 Tryggvason[1988]을 참조하면 된다.

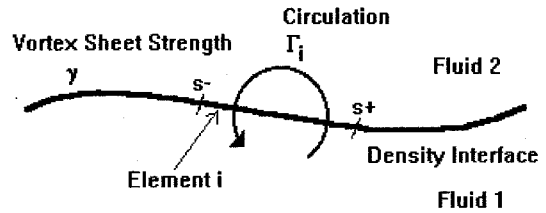


Fig. 2. Definition sketch of the interfacial parameters.

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 2A \int_{s^-}^{s^+} \frac{d\vec{U}}{dt} \cdot \vec{s} ds + \frac{A}{4} (\gamma^{+2} - \gamma^{-2}) + \frac{2A}{Fr} (\gamma^+ - \gamma^-) + \frac{2}{We} (k^+ - k^-) \tag{1}$$

여기서 무차원 파라미터는 각각, Atwood number($A = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2}$), Froude number($Fr = \frac{U^2}{gL}$), Weber number($We = \frac{(\rho_2 - \rho_1)LU^2}{\sigma}$) 이고, γ 는 경계면에서의 중력과 반대방향의 위치차표를 나타내고, 위점자 +와 -는 각각 분할된 미소 경계면 요소의 우측 및 좌측 경계를 나타낸다.

식 (1)을 사용하여 유동장의 속도정보와 경계면의 기하학적 형상 및 보오텍스 쉬트의 세기를 알고 있을 때 경계면 요소 순환의 시간변화율을 결정할수 있으며 유동장은 또한 보오텍스 쉬트의 특성에 영향을 받으므로 유동장의 계산과 유동장에 따른 경계면의 이동 그리고 경계면의 순환을 반복적으로 계산하여 모든 정보를 파악할 수 있다.

3. 수치계산결과 및 토론

아래의 Fig. 3은 본 연구에서 얻어지는 유동현상의 전형적인 패턴을 보여주고 있다. 경계면의 형상과 함께 위쪽 반은 유량함수를, 그리고 아래쪽 반은 속도분포를 보였다. 초기에 같은 두께로 계산 영역의 거의 좌측까지 뻗어있던 fluid sheet는 끝단이 몽푁하게 변하면서 우측으로 끌려들고 이때에 blob과 연결되는 부분에는 매우 가는 neck이 형성되고, 이에 앞서서 fluid sheet의 우측으로 전파되는 수면파가 발생한다. Neck 주기를 따라서 연속적으로 유속의 방향이 주기적으로 바뀌어 확인할 수 있고, 유속의 방향을 관찰함으로써 vorticity의 발생을 확인할 수 있다. 이러한 유동에서 핵심적으로 고려되어야할 정보는, edge의 receding speed와 neck의 크기이다.

Edge의 receding speed, u_n 는 (본 문제의 대표길이를 sheet의 두께

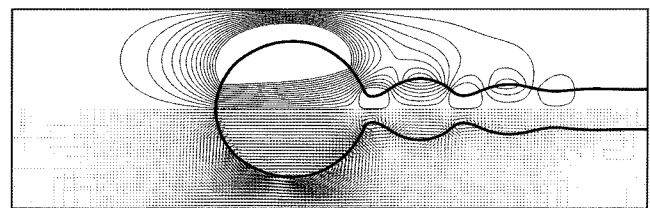


Fig. 3. A typical flow pattern of the problem.

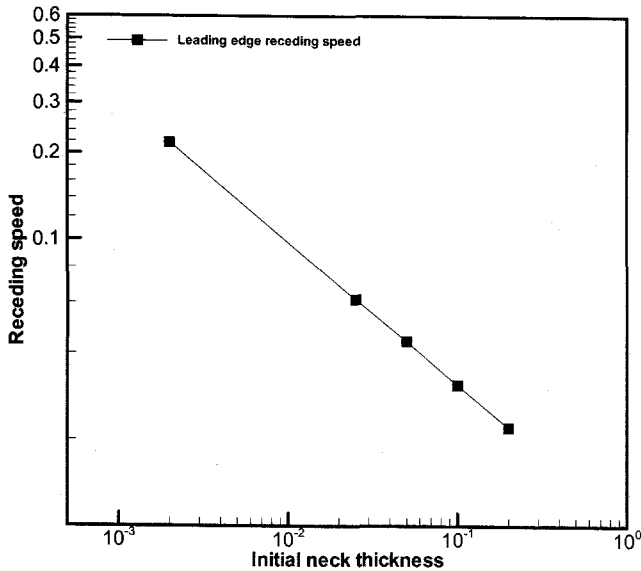


Fig. 4. Edge receding speed vs initial fluid sheet thickness.

h로 하면 표면장력(σ), 밀도차(ρ), 그리고 neck의 크기(h)의 함수가 되며 차원해석을 통하여 다음과 같은 관계를 가짐을 알 수 있다.

$$u = \text{func}(\sigma, h, \rho), u \propto \sqrt{\frac{\sigma}{\rho h}} \quad (2)$$

표면장력과 밀도차가 일정할 때 경계면의 edge가 당겨지는 속도는 초기두께의 0.5승의 역수에 비례함을 예측할 수 있는데, 이는 표면장력과 밀도를 고정시키고 액체필름의 초기두께를 변화시킨 경우 구해지는 끌림속도를 보인 Fig. 4에서 확인된다. 여기서 식 (2)를 만족하는 receding speed의 비례상수는 문제의 모든 길이차원을 초기 쉬트의 크기로 무차원화하고 수치해석을 수행한 결과를 이용하여 구할 수 있으며, 이를 최종적으로 정리하면, edge receding speed, V 는 아래의 식과 같다.

$$V = 1.06(\sigma/\rho h)^{0.5} \quad (3)$$

식 (3)에 포함된 비례상수 1.06은 Song[1999]의 점성해석에서 얻은 1.02보다는 큰 값이지만 간단한 에너지균형을 (표면장력에너지와 blob의 운동에너지 간의 균형) 고려한 Taylor[1959]의 결과($\sqrt{2}$)보다는 확실히 작은 값이다. 여기에 대한 설명이 필요한데, 이를 위하여 Fig. 5에 보인 fluid sheet의 전반적인 거동을 살펴보고자 한다. 그림에서 볼 수 있듯이 blob의 edge는 상당한 선형성을 가지는 직선을 경계로 우측으로 이동하고 있고 neck 또한 비슷한 기울기의 직선을 따라 우측으로 이동한다. Blob의 크기가 $t^{0.5}$ 의 스케일로 커지고 있기 때문에 neck 라인의 기울기는 어느 정도 수정이 필요함을 인정하면 edge와 neck은 거의 같은 속도로 이동함을 알 수 있다.

한편, neck에 앞서서 액체필름의 내부로(우측으로) 이동하는 수면파는 그 수면과 집단의(오른쪽으로 가장 앞서서 진행한) leading

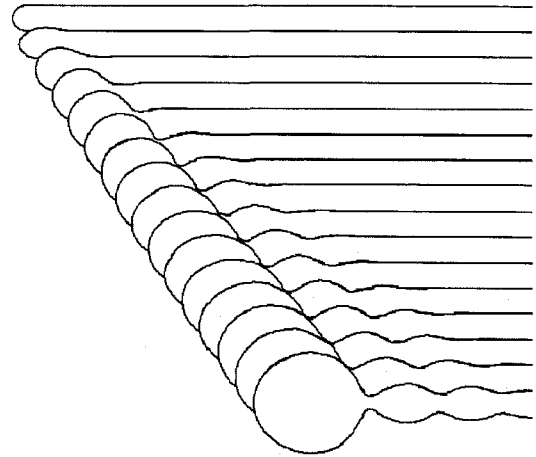


Fig. 5. Perspective view of the sheet evolution in time.

edge가 좌측 끝에 매달린 blob이나 neck의 위치로 만들어지는 직선과는 확연히 다른 기울기를 가지는 직선에 따름을 확인할 수 있다. 파집단의 우측끝을 어디로 잡느냐하는 다소의 애매한 부분이 없지 않지만, 큰 오차 없이 그을수 있는 직선을 상정하여 이 직선의 기울기를 blob이나 neck의 직선과 비교하면 약 1.7배의 차이가 나타난다.

중력의 영향을 무시할 수 있는 경우 capillary wave의 무차원화된($\sqrt{\sigma/\rho d}$ 로) phase velocity, c 와 group velocity, U 는 아래와 같은데(Milne-Thomson[1968]),

$$c = \sqrt{\frac{kh}{1/\rho + \coth(kh/2)}} \quad (4)$$

$$U = \frac{c}{2} \left(3 + \frac{(kh/2) \operatorname{csch}^2(kh/2)}{1/\rho + \coth(kh/2)} \right)$$

Group velocity의 괄호안 유한수심 수정량을 일단 무시하면 표면장력 수면파의 경우 파에너지의 전파가 phase velocity와 비교하여 1.5배 빠르고, 이는 Fig. 5에서 구한 1.7이라는 값과 비교되는 의미가 있다고 볼 수 있다. 결론적으로 edge speed는 edge에 붙어서 진행되는 첫 번째 파의 phase velocity와 크게 다를수가 없지만 무시할 수 없는 에너지가 phase velocity보다 빠른 속도로 fluid sheet의 우측으로 전파가 된다는 점을 지적하고자 한다.

이러한 사실에 근거하여 고찰한다면, edge speed의 결정시 blob의 운동에너지만 고려하는 것은 edge speed의 과대평가를 유발할 수 있고, 따라서 Taylor의 비례계수 $\sqrt{2}$ 는 실제상황에서 구해질 수 없는 한계 값임이 명백하다.

Fig. 6-8은 전반적인 에너지 분포를 파악하기 위하여 시간에 대해 각각의 에너지 변화를 보인 것이다. 우선 Fig. 6에서 전 에너지가 30이라는 상당한 규모의 blob과 neck 그리고 wave가 관찰되는 시간까지 보존된다는 점을 확인할 수 있으며, 이후 다소의 에너지 손실이 수치해법상의 문제로 관찰된다. Fig. 6은 potential 에너지인

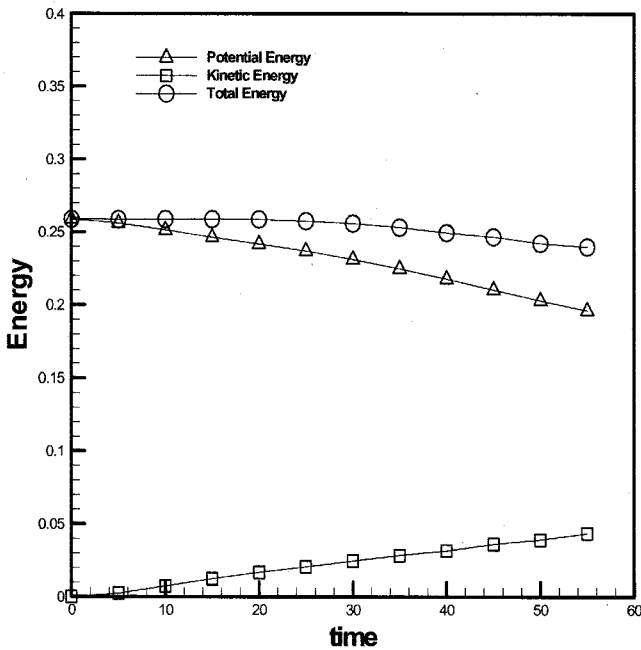


Fig. 6. Total energy vs time.

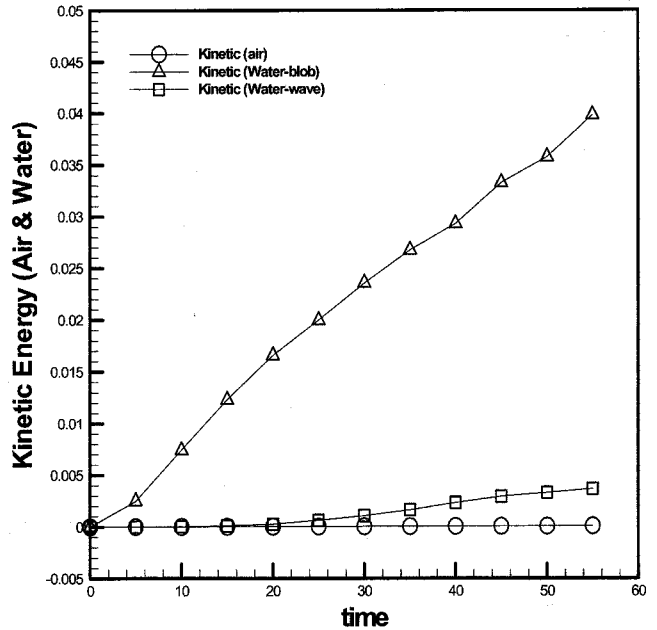


Fig. 8. Divided kinetic energy.

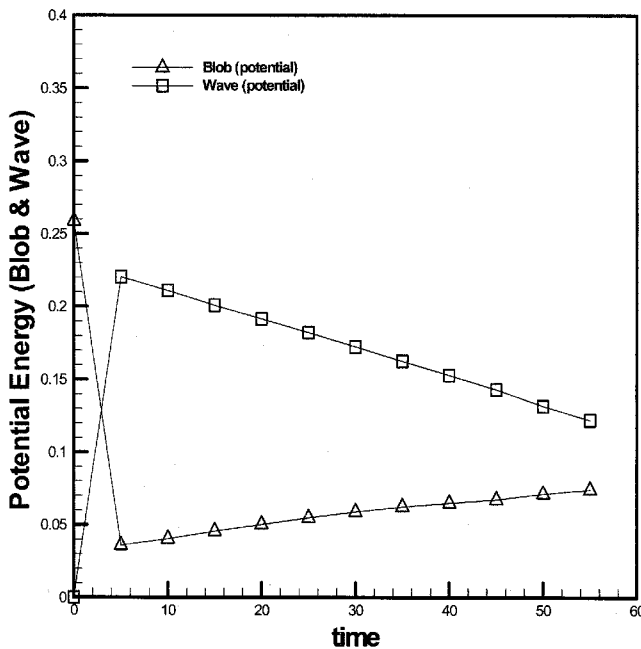


Fig. 7. Divided potential energy.

표면장력 에너지와 유동속도에 기인한 운동에너지를 시간변화에 따라 나타내고 있는데 시간의 증가에 따라 fluid sheet의 면적이 줄어들므로써 표면장력 에너지가 감소하고 유속을 가지는 유체 질량이 증가함으로써 운동 에너지가 증가함을 확인할 수 있다. Fig. 7 및 Fig. 8은 blob 부분과 neck의 우측을 분리하여 에너지를 계산한 것인데, 약 10%정도의 wave쪽 운동에너지가 존재함을 확인할 수 있다.

4. 결 론

초기에 정지되어있는 2차원 fluid sheet의 거동을 파악하기 위하여, 비점성 Vortex-in-Cell/ Front-Tracking 프로그램을 개발하고 이를 이용하여 아래와 같은 결론을 도출하였다.

(1) 밀도 경계면에서 유체 쉬트의 거동은 비점성 문제의 경우 기본적으로 작용하는 두 유체간의 밀도차와 표면장력, 그리고 경계면의 초기 형상에 좌우된다.

(2) 초기 fluid sheet의 두께, h와 밀도차(ρ) 그리고 표면장력으로 (σ) 문제를 무차원화 할 경우 blob의 receding speed는 아래의 척도법칙에 따르면 비례계수는 1.06으로 구해졌다.

$$V = 1.06(\sigma/\rho h)^{0.5}$$

(3) Blob의 크기는 $R \propto h^{\frac{1}{4}} \sqrt{t}$ 의 관계에 따른다.

(4) Edge receding speed는 표면장력 에너지와 전환되는 운동 에너지와의 균형에서 결정되는데, 이때 neck의 전방에서 전파되어 가는 수면파 에너지가 고려되어야 한다.

(5) 본 연구 결과를 이용하면 비점성 극한의 경우에, 물적특성과 fluid sheet의 초기 두께만 알면 edge receding 및 blob의 특성을 정량적으로 파악할 수 있고, 발생하는 수면파의 특성도 역으로 분석이 가능하다.

(6) 위의 연구 결과를 통하여 본 연구에서 개발된 2차원 비점성 수치해법은 복잡한 경계면 형상을 수반하는 2상유체 유동에 효과적으로 적용될 수 있음을 확인하였다.

후 기

본 연구는 해양수산부지원의 “CO₂ 해양처리기술개발연구” 사업

의 결과이며, 일부 2006학년도 홍익대학교 학술연구진흥비 지원으로 이루어졌음.

참고문헌

- [1] Mansour, A. and Chigier, N., 1990. "Disintegration of liquid sheets", *Phys. Fluids A* Vol.2, No.5, 706.
- [2] Mansour, A. and Chigier, N., 1991. "Dynamic behavior of liquid sheets", *Phys. Fluids A* Vol.3, No.12, 2971.
- [3] Milne-Thomson, L.M., 1968. *Theoretical Hydrodynamics*, Mac-Millan, London, 442-449.
- [4] Rizk, N.K. and Lefebvre, A.H., 1980. "Influence of liquid film thickness on airblast atomization", *Trans. ASME J. Eng. Power*, Vol.102, 706.
- [5] Song, Museok and Tryggvason, G., 1999. "The formation of thick borders on an initially stationary fluid sheet", *Phys. of Fluids*, Vol.11, No.9, 2487.
- [6] Taylor, G.I., 1959. "The dynamics of thin sheets of fluid. III. Desintegration of fluid sheets", *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, Vol.253, 313.
- [7] Tryggvason, G., 1988. "Numerical simulations of the Rayleigh-Taylor instability", *J. Comput. Phys.*, Vol. 75, No. 2, 253-282.

2006년 12월 12일 원고접수

2007년 4월 18일 수정본 채택