

# 모델매칭 기법을 이용한 시스템 섭동을 갖는 비선형 크레인시스템 제어

조현철\* · 이진우\* · 이영진\*\* · † 이권순\*\*\*

\* 동아대학교 전기공학과 제어 및 시스템 연구실, 포닥 연구원

\*\* 한국폴리텍 항공대학 항공전기과 교수

\*\*\* 동아대학교 전기공학과 교수

## Control of Nonlinear Crane Systems with Perturbation using Model Matching Approach

Hyun-Cheol Cho\* · Jin-Woo Lee\* · Young-Jin Lee\*\* · † Kwon-Soon Lee\*\*\*

\* Post-Doc researcher, Control & System Lab, Dept. of Electrical Eng., Dong-A University, Pusan 604-714, Korea

\*\* Professor, Dept. of Avionics Electrical Eng., Korea Aviation Polytechnic, Sacheon, 664-708, Korea

\*\*\* Professor, Dept. of Electrical Eng., Dong-A University, Pusan, 604-714, Korea

**요 약 :** 크레인 시스템은 항만 터미널 등의 산업현장에서 무거운 물체를 이송하는데 사용되는 장비로서 그 정확성과 신속성을 동시에 만족시키기 위한 연구가 활발히 진행되고 있다. 본 논문은 적응제어기의 일종인 모델매칭 기법을 이용하여 복잡한 3 자유도 비선형 크레인의 제어 시스템에 대한 연구를 제안한다. 피드백 선형화(feedback linearization)를 통해 비선형 크레인 모델을 선형화한 후 PD 제어를 적용하여 선형 공칭 모델을 구한다. 이 모델은 시스템 섭동을 갖는 실시간 시스템 모델과 함께, 리아푸노브(Lyapunov) 이론을 적용하여 실시간 섭동에 의해 발생하는 제어오차를 감소하기 위한 보조 제어규칙의 산출에 이용된다. 또한 리아푸노브 안정성이론을 적용하여 구성된 크레인 제어시스템의 안정성 해석을 실시한다. 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 제안한 알고리즘의 타당성을 검증하며 기존의 제어방식과 비교분석하여 그 우수성을 입증한다.

**핵심용어 :** 모델매칭, 크레인시스템, 시스템 섭동, 피드백 선형화, 리아푸노브 이론

**Abstract :** Crane systems are very important in industrial fields to carry heavy objects such that many investigations about control of the systems are actively conducted for enhancing its control performance. This paper presents an adaptive control approach using the model matching for a complex 3-DOF nonlinear crane system. First, the system model is linearized through feedback linearization method and then PD control is applied in the approximated model. This linear model is considered as nominal to derive corrective control law for a perturbed crane model using Lyapunov theory. This corrective control is primitively aimed to compensate real-time control deviation due to partially known perturbation. We additionally study stability analysis of the crane control system using Lyapunov perturbation theory. Evaluation of our control approach is numerically carried out through computer simulation and its superiority is demonstrated comparing with the classical control.

**Key words :** Model matching, Crane systems, System perturbation, Feedback linearization, Lyapunov theory

## 1. 서 론

크레인 시스템은 항만 터미널과 같은 산업현장에서 무거운 물체를 이송하는데 사용되는 아주 중요한 산업장비이다. 일반적으로, 크레인 제어의 궁극적인 목적은 물체를 원하는 위치에 신속하게 운반하는 것이며, 산업현장의 사용목적에 맞는 다양하고 복잡한 크레인 시스템이 현재 개발되고 있다. 또한 이에 대해 크레인 시스템 모델링 및 제어시스템이 최근 활발

한 연구가 진행되면서 특히 정밀도가 높은 정교한 크레인이 개발되고 있으며 고급제어이론의 접목으로 크레인의 제어성능이 향상되고 있다.

Yu 등은 오버헤드 크레인 시스템을 선형화하여 시간 스케일 제어기법을 개발하여 크레인 제어를 구성하였으며(Yu et al., 1995), Yoshida 등은 포화(saturating) 제어기법으로 선형화 크레인 시스템 제어를 연구하였다(Yoshida and Kawabe, 1992). 또한 선형화 모델을 이용하여 정확한 시스템 정보를 확

\* 대표저자 : 조현철(정회원), hyunccho@gmail.com 051)200-6950

\* 정회원, jinwoo@donga.ac.kr 051)200-6954

\*\* 정회원, airlee011@hotmail.com 055)830-3482

† 교신저자 : 이권순(정회원), kslee@dau.ac.kr 051)200-7743

득한 후 적응제어기에 사용하는 제어기법을 개발하였다 (Martindale et al., 1995). Moustafa 등은 케환 선형화기법을 이용하여 복잡한 비선형 크레인을 상태공간 표현법으로 근사화하여 선형 제어를 설계하였으며 선형 시스템 이론을 이용하여 시스템 동특성을 해석하였다(Moustafa and Ebeid, 1988). Lee는 비선형 오버헤드 크레인에 대해 새로운 흔들림 방지 및 제어시스템을 구성하였다(Lee, 1998).

최근엔 보다 복잡한 비선형성을 갖는 크레인에 대한 고급 제어이론이 적용되고 있다. Fantoni 등은 에너지 기반 목적함수를 도입한 passivity 기반 적응제어기를 구성하여 비선형 크레인제어에 응용하였으며(Fantoni et al., 2000), Fang 등은 크레인의 트롤리(Trolley)와 부하의 결속력을 증가시키기 위한 에너지 기반 제어이론을 적용하여, 비선형성에 대한 보조 제어입력을 산출하였다(Fang et al., 2001). 또한 Cho 등은 신경 회로망 알고리즘(Guez et al., 1988) 을 적용하여 크레인의 불확실성 요소에 대한 적응제어기를 개발하여 제어성능을 향상시켰다(Cho et al., 2006). 이런 크레인 제어방법들은 과도응답 상태의 성능을 개선하는데 주목적이 있다.

이제까지의 대부분의 크레인 제어연구는 일반적으로 비선형모델을 선형화한 후 선형 모델에 대한 제어를 설계한 반면, 적응제어나 강인제어에 대한 적용이 그리 많지 않다[8]. 실시간 제어시 모델링 오차나 특히 불확실성 또는 시스템 섭동으로 인한 제어성능의 저하는 불가피한 경우가 많다. 이들 중 시스템 섭동에 대한 동특성은 일반적으로 어느 정도 이에 대한 정보를 알 수가 있으며, 이런 정보를 이용하여 크레인 시스템에 대한 강인제어를 구성할 수 있다.

본 논문에서는 시스템 섭동을 갖는 비선형 크레인 시스템 제어를 연구하였다. 우선 복잡한 비선형성을 갖는 시스템 모델에 대해 피드백 선형화를 이용하여 제어입력을 산출하며 시스템 섭동에 대해서는 선형 모델매칭을 적용하여 보조 입력제어규칙을 산출하였다. 이 때 리아푸노브(Lyapunov) 안정성이론을 도입하여 안정한 적응제어기를 구성하였다. 크레인은 3 자유도를 갖는 비선형 오버헤드 형태의 시스템으로서 크레인 부하에 대한 섭동을 갖는다. 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 성능평가를 실시하였으며 기존의 제어방식과 비교분석하여 우수성을 입증하였다.

## 2. 비선형 크레인 시스템 모델

본 논문에서 다루는 크레인 시스템은 3자유도를 갖는 오버헤드 형태의 모델이다 (Fig. 1 참조). 이 시스템은  $x$ 축과  $y$ 축의 방향에 대한 외부 제어입력을 가지며 루프에 대해 마찬가지로 두 개의 각도를 발생된다. 이 크레인 모델에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$M \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + V \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_p g L \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

여기서  $x, y, \theta, \phi$  는 시스템 상태를 각각 나타내고,  $x$ 와  $y$

는 크레인의 수평축과 수직축에 대한 변위, 그리고  $\theta$ 와  $\phi$ 는 상응하는 크레인 로프의 각도를 나타내며,  $g = 9.8[m/sec^2]$ 는 중력가속도를,  $L$ 은 로프의 길이를 각각 나타낸다. 또한  $f_x$ 와  $f_y$ 는 트롤리와 레일(rail)에 각각 적용되는 제어입력이다. 식 (1)에서  $M$ 과  $V$ 는 4행 4열의 정방행렬이며 다음과 같이 주어진다.

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \quad (2)$$

행렬의 각 요소는

$$\begin{aligned} m_{11} &= m_p + m_r + m_c, \\ m_{12} &= m_{21} = m_{34} = m_{43} = 0 \\ m_{13} &= m_p L \cos(\theta) \sin(\phi) \\ m_{14} &= m_p L \sin(\theta) \cos(\phi) \\ m_{22} &= m_p + m_c, \quad m_{23} = m_p L \cos(\theta) \cos(\phi) \\ m_{24} &= -m_p L \sin(\theta) \sin(\phi) \\ m_{31} &= m_p L \sin(\theta) \sin(\phi) \\ m_{32} &= m_p L \cos(\theta) \cos(\phi) \\ m_{33} &= m_p L^2 + I \\ m_{41} &= m_p \sin(\theta) \cos(\phi) \\ m_{42} &= -m_p L \sin(\theta) \sin(\phi) \\ m_{44} &= m_p L^2 \sin^2(\theta) + I \end{aligned}$$

여기서  $m_p, m_c, m_r$ 는 크레인의 부하, 트롤리, 그리고 레일의 무게를,  $I$ 는 마찰력을 각각 나타낸다. 또한,

$$V = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} \end{bmatrix} \quad (3)$$

각각의 요소들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} v_{11} &= v_{12} = v_{21} = v_{22} = v_{31} = v_{32} = v_{41} = v_{42} = 0 \\ v_{13} &= -m_p L \sin(\theta) \sin(\phi) \dot{\theta} + m_p L \cos(\theta) \cos(\phi) \dot{\phi} \\ v_{14} &= m_p L \cos(\theta) \cos(\phi) \dot{\theta} - m_p L \sin(\theta) \sin(\phi) \dot{\phi} \\ v_{23} &= -m_p L \sin(\theta) \cos(\phi) \dot{\theta} - m_p L \cos(\theta) \sin(\phi) \dot{\phi} \\ v_{24} &= -m_p L \cos(\theta) \sin(\phi) \dot{\theta} - m_p L \sin(\theta) \cos(\phi) \dot{\phi} \\ v_{34} &= -m_p L^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\phi} \\ v_{43} &= m_p L^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\phi} \end{aligned}$$

$$v_{44} = m_p L^2 \sin(\theta) \sin(\theta) \dot{\theta}$$

이 크레인 모델의 구조 및 동특성에 대한 몇 가지 가정은 다음과 같다. 첫째, 레일 위에서 움직이는 트롤리와 로프는 단단하게 연결되어 있으며, 연결체(connector)에 대한 무게는 무시할 정도로 작다고 가정한다. 둘째, 식 (1)에서 정의된 시스템 상태변수와 그 미분값은 관측기 또는 센서시스템을 통해 측정된다. 셋째, 트롤리의 무게와 로프의 길이는 정확하게 주어지며, 넷째, 트롤리와 로프사이의 연결체에서 마찰력은 무시할 정도로 작으며 두 연결체 사이에 회전운동은 발생치 않는다고 가정한다. 마지막으로, 식 (1)에서 각도  $\theta$ 의 범위는  $-\pi < \phi < \pi$ 이다.

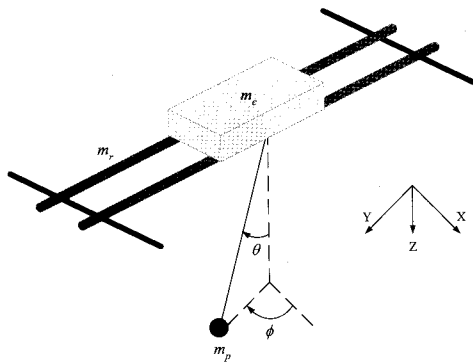


Fig. 1 A 3-DOF crane system model

### 3. 모델매칭 기반 제어기 설계

#### 3.1 피드백 선형화

식 (1)은 라그랑지안(Lagrangian) 방정식의 형태를 가지므로 피드백 선형화 기법을 적용할 수 있다(Hunt and Meyer, 1983). 우선, 식 (1)을 다음과 같이 표현하자.

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = f \quad (4)$$

여기서 시스템 상태벡터  $q$ 와 입력벡터  $f$ 는

$$q = [x \ y \ \theta \ \phi]^T, \quad f = [f_x \ f_y \ 0 \ 0]^T$$

피드백 선형화 기법을 이용하면  $f$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$f = M(q)u + V(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) \quad (5)$$

여기서 새로운 제어입력벡터  $u \in [u_x \ u_y \ u_\theta \ u_\phi]^T$ 는 PD 구조를 가지며 다음과 같다.

$$u = K_p e(t) + K_d \dot{e}(t) \quad (6)$$

여기서

$$K_p = \text{diag}\{k_{p_x}, k_{p_y}, k_{p_\theta}, k_{p_\phi}\},$$

$$K_d = \text{diag}\{k_{d_x}, k_{d_y}, k_{d_\theta}, k_{d_\phi}\}$$

$$e(t) = [e_x \ e_y \ e_\theta \ e_\phi]^T \\ = [r_x - x, \ r_y - y, \ -\theta, \ -\phi]^T$$

$$\dot{e}(t) = [\dot{e}_x \ \dot{e}_y \ \dot{e}_\theta \ \dot{e}_\phi]^T \\ = -[\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}]^T$$

식 (6)을 식 (5)에 대입하면 식 (4)의 시스템 동특성은 다음과 같이 선형화 방정식으로 표현된다.

$$\ddot{q} + K_d \dot{q} + K_p q - K_p r = 0 \quad (7)$$

여기서  $r = [r_x \ r_y \ 0 \ 0]^T$ . 따라서 선형시스템 이론을 적용하여 원하는 제어성능에 대해 적절한 제어기 파라미터  $K_p$ 와  $K_d$ 를 설정할 수 있다. 이 공칭(nominal) 모델의 동특성은 식 (4)의 시스템 모델이 정확하다는 가정하에 최적의 제어성능이 발휘된다. 하지만, 실제 수학적으로 주어지는 시스템 모델이 완벽하게 시스템 동특성을 표현하기 어려우며 또한 실시간 제어시 발견할 수 있는 모델링 오차나 시스템 파라미터의 변화 등이 발생할 수 있으며, 이런 경우 식 (7)에서 구한 방정식에 대한 모델링 오차가 발생한다. 이런 현상들은 시스템 섭동을 통해 시스템을 다시 모델링할 수 있으며, 이에 따른 제어식이 다시 구해져야 한다.

#### 3.2 시스템 섭동을 갖는 시스템 모델

시스템 섭동에 대한 크레인 시스템 모델은 식 (4)에 섭동함수  $\Delta(q, \dot{q})$ 를 추가하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + \Delta(q, \dot{q}) = f \quad (8)$$

따라서 식 (6)의 PD 제어입력  $u$ 는 이 섭동에 대한 보상입력을 함께 고려해야 한다. 다시 말해,  $u$ 는 식 (6)의 공칭입력과 섭동에 대한 보상입력의 합으로 다음과 같이 이루어진다.

$$u(t) = u^*(t) + \Delta u(t) \quad (9)$$

이 제어입력을 식 (5)에 적용하면 식 (8)에 대한 시스템 섭동모델은 다음과 같다.

$$\ddot{q} + K_d \dot{q} + K_p q - K_p r + M^{-1}(q)\Delta(q, \dot{q}) - \Delta u = 0 \quad (10)$$

여기서  $M^{-1}$ 은  $M$ 의 역행렬이다. 직관적으로, 보조입력벡터  $\Delta u = M^{-1}(q)\Delta(q, \dot{q})$ 이면 식 (10)의 시스템은 식 (7)의 동특성을 가진다. 일반적으로 시스템 섭동은 제어기 설계 단계에서 수학적으로 정의하기가 힘들며 특히 행렬  $M$  또한 그 값이 변화한다. 결국, 보조입력  $\Delta u$ 에 대해 보다 정밀한 제어규칙이 설정되어야 한다.

### 3.3 모델매칭 기법을 이용한 제어기설계

모델매칭을 이용한 제어기는 시스템 섭동이나 파라미터 변화를 갖는 실제 시스템의 동특성이, 정의한 시스템 모델에 추종하도록 설계하는 제어기법이다(Slotine and Li, 1991). 본 논문은 이 모델매칭 기법에 의해, 선형방정식으로 주어진 식 (7)을 기준모델로 정의하고 시스템 섭동을 갖는 식 (10)의 실제 시스템모델이 이 기준모델을 동적으로 추종하기 위한 제어입력  $\Delta u$ 를 설계한다. 식 (7)의 공칭모델로 주어진 미분방정식을 상태공간 방정식으로 표현하면

$$\dot{F}(t) = A_m F(t) + B_m r(t) \quad (11)$$

여기서

$$F \in R^8, A_m = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 4} & I_{4 \times 4} \\ -K_p & -K_d \end{bmatrix} \in R^{8 \times 8},$$

$$B_m = [0_{4 \times 4} \ K_p]^T \in R^{8 \times 4}$$

또한 식 (10)의 시스템 섭동에 대한 모델은 다음과 같이 표현되며

$$\dot{q}(t) = Aq(t) + Br(t) + \Theta \quad (12)$$

여기서

$$A = A_m, B = B_m, \Theta = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \Delta(q_1, q_2) - \Delta u \end{bmatrix}$$

보조 제어입력  $\Delta u$ 에 대한 제어규칙을 결정하기 위해 리아푸노브 안정성이론을 적용한다. 우선, 공칭모델과 시스템 섭동 모델에 대한 두 상태의 오차벡터

$$\zeta(t) = F(t) - q(t) \quad (13)$$

을 이용하여, 양(positive definite)의 값을 갖는 리아푸노브 함수를 정의하면

$$V(\zeta(t)) = \zeta^T(t) P \zeta(t) \quad (14)$$

이다. 여기서  $P = P^T > 0$ . 또한, 식 (13)의 미분식은 다음과 같다.

$$\dot{V}(\zeta(t)) = \dot{\zeta}^T(t) P \zeta(t) + \zeta^T(t) P \dot{\zeta}(t) \quad (15)$$

여기서 오차벡터에 대한 미분은

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(t) &= \dot{F}(t) - \dot{q}(t) \\ &= A_m F(t) + B_m r - Aq(t) - Br - \Theta \\ &= A_m \zeta(t) + (A_m - A)q(t) + (B_m - B)r - \Theta \end{aligned} \quad (16)$$

이며, 식 (15)에 대입하여 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V(\dot{\zeta}(t)) &= [\zeta^T A_m^T + q^T (A_m - A)^T + r^T (B_m - B)^T - \Theta^T] P \zeta \\ &\quad + \zeta^T P [A_m \zeta + (A_m - A)q + (B_m - B)r - \Theta] \\ &= \zeta^T (A_m^T P + P A_m) \zeta + 2\eta \end{aligned} \quad (17)$$

여기서

$$\begin{aligned} \eta &= [\zeta_1 \ \zeta_2] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \Delta(q_1, q_2) - \Delta u \end{bmatrix} \\ &= (\zeta_1 p_{12} + \zeta_2 p_{22}) (M^{-1} \Delta(q_1, q_2) - \Delta u) \end{aligned} \quad (18)$$

리아푸노브 안정성 이론에 의해, 식 (17)에서 안정한 동특성을 위한 조건은 다음과 같다.

- 조건 1 :  $A^T P + P A = -Q$ 가 음(negative definite)의 값이 되어야하며
- 조건 2 : 보조 제어입력  $\Delta u$ 를 결정해서  $\eta$ 가 양의 값을 갖지 않도록 해야 한다.

조건 1은, 상태행렬  $A$ 의 고유치(eigenvalue)가 음수이므로, 행렬  $P > 0$ 를 잘 선택하여 만족시킬 수가 있다. 조건 2는  $\gamma$ 의 값이 음수나 영(zero)을 갖도록 제어식을 구성하면 된다. 즉, 조건 2를 만족하는 보조 제어입력  $\Delta u$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Delta u = \max(M^{-1} \Delta(q_1, q_2)) \text{sign}(\zeta_1 p_{12} + \zeta_2 p_{22}) \quad (19)$$

시스템 섭동  $\Delta(q_1, q_2)$ 과 시스템 상태 행렬  $M$ 에 대한 역행렬에 대한 경계치에 대한 정보를 통해 보조 제어입력 규칙을 산출할 수 있다.

## 4. 시스템 안정성 해석

식 (10)의 시스템 섭동을 갖는 동특성에 대한 안정성 해석은 리아푸노브 안정성 이론을 통해 실시된다. 본 논문의 안정성해석에 필요한 몇 가지 수학적 이론을 우선 서술한다.

정리 1(converse theorem)  $x = 0$ 에서 평행점(equilibrium point)을 갖는 다음과 같은 비선형 시스템을 고려해보자.

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (20)$$

여기서 시스템 상태  $x \in R^n$ 의 궤적(trajjectory)은 어떤 양수  $\gamma$ 보다 작다고 가정한다. 즉,  $|x| < \gamma$ 이다. 이 시스템의 해(solution)의 궤적은  $k > 0$ 일 때 다음의 부등식을 만족한다면

$$\|x(t)\| \leq k\|x(t_0)\|e^{-\lambda(t-t_0)}, 0 \leq t_0 \leq t \quad (21)$$

어떤 리아푸노브 함수는 다음과 같은 관계식을 갖는다.

$$c_1\|x\|^2 \leq V(t,x) \leq c_2\|x\|^2 \quad (22)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}f(t,x) \leq -c_3\|x\|^2 \quad (23)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq c_4\|x\| \quad (24)$$

여기서  $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ .

시스템 섭동을 갖는 비선형 모델에 대한 리아푸노브 안정성은 정리 1을 이용하여 해석할 수 있다. 시스템 섭동을 갖는 모델을 다음과 같이 표현하자.

$$\dot{x} = f(t,x) + g(t,x) \quad (25)$$

여기서  $f(t,x)$ 는 공칭모델,  $g(t,x)$ 는 시스템 섭동에 대한 함수를 각각 나타낸다. 이 섭동함수의 궤적은 유한(bounded)하다고 간주하면 다음과 같이 표현된다.

$$\|g(t,x)\| \leq \gamma\|x(t)\| \quad (26)$$

여기서  $\gamma > 0$ . 식 (25)의 시스템에 대해 어떤 리아푸노브 함수에 대한 미분은 다음과 같이 전개된다.

$$\dot{V}(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}f(t,x) + \frac{\partial V}{\partial x}g(t,x) \quad (27)$$

여기서  $\partial V/\partial t$ 와  $(\partial V/\partial x)f(t,x)$ 는 공칭모델에 미분항으로서, 주어진 공칭모델에 대한 방정식으로부터 쉽게 구할 수 있다. 하지만, 시스템 섭동의 미분항인  $(\partial V/\partial x)g(t,x)$ 는 섭동에 대한 정보를 완벽하게 알지 못함으로 직접적으로 전개할 수가 없다. 한편, 식 (23)과 (26)의 관계로부터 식 (27)의 미분식은 다음과 같은 관계를 나타낸다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t,x) &\leq -c_3\|x\|^2 + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \|g(t,x)\| \\ &\leq -c_3\|x\|^2 + c_4\gamma\|x\|^2 \end{aligned} \quad (28)$$

만약  $\gamma$ 가 아주 작은 경우, 즉  $\gamma < c_3/c_4$ 일 때 식 (28)은 다음과 같다.

$$\dot{V}(t,x) \leq -(c_3 - \gamma c_4)\|x\|^2 \quad (29)$$

여기서  $(c_3 - \gamma c_4) > 0$ . 결론적으로, 위의 전개로부터 시스템 섭동에 대한 리아푸노브 안정성을 다음과 서술할 수 있다.

정리 2 식 (25)에서 공칭함수  $f(t,x)$ 가 식 (22)~(24)의 관계를 모두 만족하는 리아푸노브 함수에 대해, 섭동함수  $g(t,x)$ 가 식 (28)과 (29)를 각각 만족하면, 식 (25)의 섭동 시스템은 평행점  $x = 0$ 에서 점근적 안정(asymptotically stable) 하다.

식 (25)의 공칭모델이 선형일 경우, 즉  $f(t,x) = Ax(t)$ 일 때 시스템 섭동 모델은 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + g(t,x) \quad (30)$$

여기서  $\lambda(A) < 0$  ( $\lambda$ 는 행렬  $A$ 의 고유치(eigenvalue)를 나타낸다). 이것은 공칭시스템이 점근적 안정함을 의미하며, 따라서 리아푸노브 안정성 이론으로부터 정방행렬(square matrix)  $P$ 에 대해 다음의 리아푸노브 방정식의 해가 존재한다.

$$PA + A^T P = -Q \quad (31)$$

여기서  $Q = Q^T > 0$ 이다. 행렬  $P = P^T > 0$ 의 고유치를 이용하여 리아푸노브 함수  $V(x) = x^T P x$ 에 대해 식 (22)~(24)의 관계식을 구하면

$$\lambda_{\min}(P)\|x\|_2^2 \leq V(x) \leq \lambda_{\max}(P)\|x\|_2^2 \quad (32)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}Ax = -x^T Q x \leq -\lambda_{\min}(Q)\|x\|_2^2 \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\|_2 &= \|2x^T P\|_2 \leq 2\|P\|_2\|x\|_2 \\ &= 2\lambda_{\max}(P)\|x\|_2 \end{aligned} \quad (34)$$

이며, 따라서 시스템 섭동에 대한 리아푸노브 함수의 미분식은 다음과 같다.

$$\dot{V}(x) = -\lambda_{\min}(Q)\|x\|_2^2 + 2\lambda_{\max}(P)\gamma\|x\|_2^2 \quad (35)$$

이 관계로부터  $\dot{V}(x) < 0$ 위한 조건은 다음과 같이 간단하게 구할 수가 있다.

$$\gamma < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)} \quad (36)$$

이와 같은 결과들을 이용하여 본 논문의 섭동을 갖는 크레인 모델의 안정성 및 섭동함수의 안정한 조건을 산출한다.

위의 결과를 이용하기 위해, 식 (10)의 크레인 모델에서 공칭과 섭동 부분을 다시 나타내면

$$f(q) = Aq(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_p & -K_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ K_p r + M^{-1} \Delta + \Delta u \end{bmatrix} \quad (38)$$

이며, 앞서 서술한 바와 같이, 기존의 잘 정립된 선형 시스템 이론을 이용하여, 적절한  $K_p$ 와  $K_d$  값을 선정하여 안정한  $f(x)$ 을 구성할 수 있다. 간단히, 행렬  $Q$ 를  $8 \times 8$ 크기의 단위 행렬로 두면(즉,  $Q = I_{8 \times 8}$ ), 식 (37)에 대한 리아푸노브 함수에 대해 행렬  $P$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} K_d K_p^{-1} + K_d^{-1} & -K_p^{-1} - 2(K_d^{-1})^2 \\ K_p^{-1}(K_d^{-1})^2 & K_d^{-1} K_p^{-1} \end{bmatrix} \quad (39)$$

여기서 정방행렬  $P$ 는 총 8개의 고유치를 가지며, 그 중 가장 큰값을 갖는 고유치는 다음과 같이 표현하자.

$$\lambda^* = \max\{\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}, \dots, \lambda_{p_8}\} \quad (40)$$

식 (32) ~ (43)에 의해  $c_3 = 1$ 과  $c_4 = \lambda^*$ 임을 쉽게 알 수 있으며, 따라서 섭동함수  $g(q)$ 는 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned} \|g(q)\|_2 &= \|K_p r + M^{-1} \Delta(q, \dot{q}) + \Delta u\| \\ &\leq \|K_p r\| + \|M^{-1} \Delta(q, \dot{q}) + \Delta u\| \\ &\leq \|K_p r\| + \|M^{-1}\| \|\Delta(q, \dot{q})\| + \|\max(\Delta u)\| \end{aligned} \quad (41)$$

여기서  $\|M^{-1}\|$ 는 행렬  $M^{-1}$ 의 놈(norm)을 나타낸다. 섭동함수를 상수  $\gamma$ 와 함께 표현된다고 가정하며

$$\Delta(q_1, q_2) = \gamma \delta(q_1, q_2) \quad (42)$$

가 되며, 일반적으로 섭동의 궤적은 상태벡터  $q$ 에 대해 상대적으로 작으므로 다음과 같은 부등식으로 나타낼 수 있다.

$$\|\delta(q_1, q_2)\|_2 \leq \|q\|_2 \quad (43)$$

따라서 식 (35)에 의해

$$\dot{V}(q) = -\|q\|_2^2 + 2\lambda^* \{ \|K_p r\| + \|M^{-1}\| \gamma \|q\|_2^2 + \max(\Delta u) \} \quad (44)$$

이며, 안정한 조건, 즉  $\dot{V}(x) < 0$  위해 다음의 조건을 가진다.

$$\gamma < -\frac{\|K_p r\| + \max(\Delta u)}{\|M^{-1}\| \max(\|q\|_2^2)} \quad (45)$$

### 5. 컴퓨터 모의실험

본 논문에서 제안한 제어알고리즘의 타당성을 검증하기 위

해 Fig. 1의 크레인시스템에 대해 컴퓨터 시뮬레이션을 실시하였다. 시뮬레이션 실험은 다음과 같이 크게 3가지로 나누어 실시하였다. 첫 번째 실험은 공칭 시스템모델에 대한 제어실험이며, 이 때 선형시스템 이론을 적용하여 제어파라미터 벡터 값을 선정한다. 두 번째 실험은 시스템 섭동을 적용하여 첫 번째 실험에 적용한 제어기에 대한 동특성을 고찰한다. 마지막으로, 제안한 제어기법을 두 번째 실험의 동일한 시스템에 적용하여 성능의 개선정도를 실험한다.

실험 I : Fig. 1의 시스템 모델에 적용한 파라미터 값은 Table 1과 같다. 기준입력은  $r_x = 10[m]$ ,  $r_y = 3[m]$ 로 설정하였다. 또한 식 (1)의 공칭모델에 대한 PD 제어기 파라미터는 최적의 제어성능을 갖는 값으로 선정하였으며 다음과 같다.

$$\begin{aligned} K_p &= \text{diag}\{0.1, 0.25, 0.5, 0.35\} \\ K_d &= \text{diag}\{0.35, 0.5, 0.8, 0.75\} \end{aligned}$$

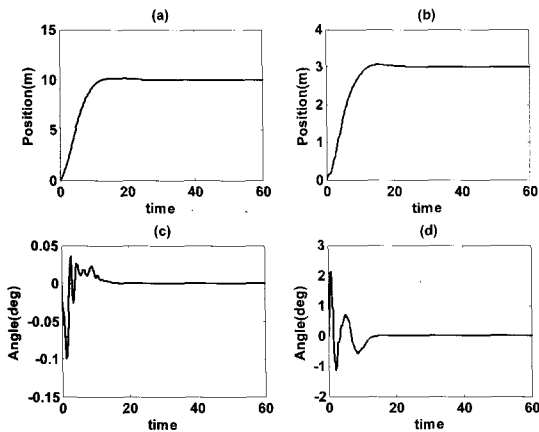
Fig. 2는 공칭 크레인 모델에 대한 시스템 응답 결과를 나타낸다. x-축과 y-축에 대한 크레인의 위치는 오버슈트(overshoot)가 거의 발생하지 않으며 정상상태 수렴시간도 비교적 만족스러운 결과를 보이고 있다. 두 각도의 궤적 또한 비교적 양호한 응답을 가지며, 따라서 위에서 구한 제어기 파라미터는 전체적으로 바람직한 제어성능을 발휘함을 알 수 있다.

실험 II : 이번 시뮬레이션은 실험 I의 공칭모델에 파라미터 변화시켜 실험 I에서 구한 PD 제어기를 그대로 적용하여 크레인 응답을 조사한다. 시뮬레이션 환경은 실험 I의 조건과 동일하며, 표 1의  $m_p = 2000$ 으로 증가시켰다. 이런 설정은 실제 산업현장에서 발생하는 크레인 부하의 무계변동에 대한 실험으로 간주할 수 있다. 그림 3은 시스템 응답을 각각 보여주고 있으며, 예상한 바와 같이 제어성능이 크게 감소되었음을 알 수 있다. 즉, 주어진 동일한 시간 내에 크레인 위치는 설정치에 도달하지 못함을 볼 수 있고, 로프의 각도 또한 평형점에 수렴하지 못하여 불규칙 진동이 계속 일어남을 알 수 있다. 결론적으로, 실험 I에서 구한 제어기 파라미터 값이 시스템 섭동을 갖는 모델에 적합지 않음을 수치적 방법으로 보여준다.

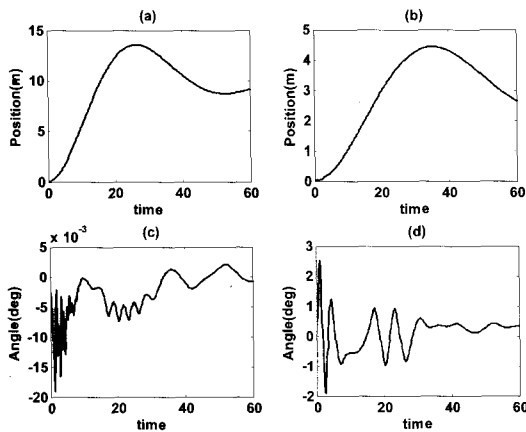
실험 III : 이번 실험은 본 논문에서 제안한 제어알고리즘을 검증하는 것으로서, 실험 II의 시뮬레이션 조건과 동일한 시나리오를 바탕으로 시스템 섭동을 갖는 크레인 제어를 실시하였다. 그림 4는 시뮬레이션 결과를 나타내며, 실험 II의 경우에 비해 월등히 성능이 개선되었음을 쉽게 알 수 있다. 전체적으로 정상상태 도달시간에 실험 I의 경우보다 늦지만, 이것은 크레인 부하가 보다 많이 증가하였기 때문이다. 따라서, 시뮬레이션 결과를 통해 본 제어기법의 타당성 및 우수성을 입증할 수 있다.

### 5. 결론

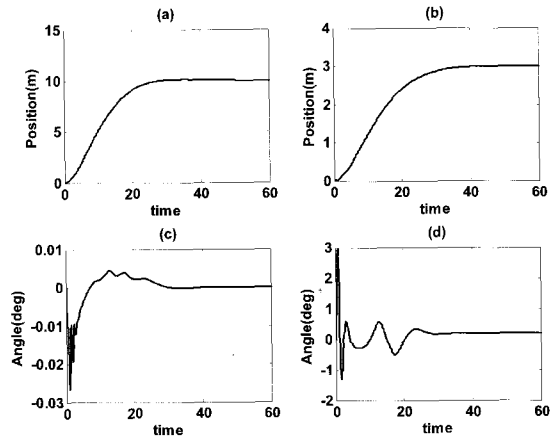
본 논문은 시스템 섭동을 갖는 크레인 시스템에 대해 모델 매칭기법을 통해 적응제어규칙을 제안하였다. 시스템 모델은 비선형성이 아주 강한 3 자유도 오버헤드 모델을 이용하였으며 피드백 선형화를 통해 우선 모델을 선형화하였다. 시스템 섭동에 대한 제어규칙은 리아푸노브 이론을 적용하여 기준 모델에 대한 보조 제어입력을 해석적 방법을 통해 산출하였다. 또한 시스템 섭동의 크레인 모델에 대해 리아푸노브 안정성 이론을 도입하여 안정성 해석을 실시하였으며 섭동함수에 대한 경계치를 전개하였다. 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 제안한 제어기법의 타당성을 보였으며 기존의 방법과 비교분석하여 우수성을 입증하였다. 하지만, 시스템 섭동이 결정론적(deterministic) 방법을 통해 설정이 되었으나 향후 연구에서 확률적(stochastic) 섭동에 대한 제어기의 설계 및 시스템 해석이 이루어져야 한다. 마지막으로, 크레인 시뮬레이터에 본 논문의 제어기법을 적용하여 실시간 제어시에도 만족스러운 제어성능을 입증하고자 한다.



(a) Crane position  $x(t)$  (b) Crane position  $y(t)$   
 (c) Loop angle  $\theta(t)$  (d) Loop angle  $\phi(t)$   
 Fig. 2 Crane system response (Simulation I)



(a) Crane position  $x(t)$  (b) Crane position  $y(t)$   
 (c) Loop angle  $\theta(t)$  (d) Loop angle  $\phi(t)$   
 Fig. 3 Crane system response (Simulation II)



(a) Crane position  $x(t)$  (b) Crane position  $y(t)$   
 (c) Loop angle  $\theta(t)$  (d) Loop angle  $\phi(t)$   
 Fig. 4 Crane system response (Simulation III)

Table 1 Parameter values of the crane system

$m_p$ [kg]	$m_c$ [kg]	$m_r$ [kg]	$L$ [m]	$I$ [kg · m <sup>2</sup> ]
160	23	190	2.5	1.5

### 후 기

이 논문은 정부(과학기술부)의 재원으로 한국과학재단의 국가 지정연구실사업으로 수행된 연구임 (No. MI030000030306J0000 30310).

### 참 고 문 헌

- [1] Yu, J., Lewis, F. L., and Huang, T., (1995), "Nonlinear feedback control of a gantry crane," *Proc. of American Control Conference*, pp. 4310~4315.
- [2] Yoshida, K. and Kawabe, H., (1992), "A design of saturating control with a guaranteed cost and its application to the crane control systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 37, pp. 121~127.
- [3] Martindale, S. C., Dawson, D. M., Zhu, J., and Rahn, C., (1995), "Approximate nonlinear control for a two degree of freedom overhead crane: theory and experimentation," *Proc. of American Control Conference*, pp. 301~305.
- [4] Moustafa, K. A. F., and Ebeid, A. M., (1988), "Nonlinear modeling and control of overhead crane load sway," *J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 110, pp. 266~271.
- [5] Lee, H., (1998), "Modeling and control of a

- three-dimensional overhead cranes," *J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 120, pp. 471~476.
- [6] Fantoni, I., Lozano, R., and Spong, M. W., (2000), "Energy based control of the pendubot," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 45, pp. 725~729.
- [7] Fang, Y., Zergeroglu, E., Dixon, W. E., and Dawson, D. M., (2001), "Nonlinear coupling control laws for an overhead crane system," *Proc. of IEEE Conf. on Control Applications*, pp. 639~644.
- [8] Guez, J., Eilbert, L., and Kam, M., (1988), "Neural network architecture for control," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 8, no. 2, pp. 22~25.
- [9] Cho, H. C., Fadali, M. S., Lee, Y. J., and Lee, K. S., (2006), "Neural robust control for perturbed crane systems," *J. of Mechanical Science & Technology*, vol. 20, no. 5, pp. 591~601.
- [10] Hunt, L. R. and Meyer, G., (1983), "Global transformations of nonlinear systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 28, no. 1, pp. 24~31.
- [11] Slotine, J.-J. E. and Li, W., (1991), "*Applied nonlinear control*", Prentice Hall, New Jersey
- [12] Khalil, H. K., (1996), "*Nonlinear systems*", Prentice Hall, New Jersey.

---

원고접수일 : 2007년 4월 6일

원고채택일 : 2007년 7월 3일