

비압축성 유동 해석을 위한 입자법 수치 시뮬레이션 기술 개발

이병혁* · 박종천* · 류민철** · 김용수** · 김영훈***

*부산대학교 조선해양공학과

**대우조선해양(주) 선박해양 기술연구소

***목포대학교 중형조선지역혁신센터

Development of Numerical Simulation of Particle Method for Solving Incompressible Flow

BYUNG-HYUK LEE*, JONG-CHUN PARK*, MIN-CHEOL RYU**, YONG-SOO KIM** AND YOUNG-HUN KIM***

*Dept. of Naval Architecture and Ocean Engineering, Pusan National University, Busan, Korea

**Ship and Ocean R&D Institute, Daewoo Shipbuilding and Marine Engineering Co, Ltd, Geje, Korea

***RIC for Southwestern Midsized Shipbuilding Industry, Mokpo Univ, Mokpo, Korea

KEY WORDS: Particle method 입자법, Computational fluid dynamics(CFD) 전산유체역학, Moving particle semi-implicit method(MPS) 입자간 상호작용 모델, Kernel function 커널함수, Incompressible flow 비압축성 유동, Poiseuille flow Poiseuille 유동

ABSTRACT: A particle method recognized as one of gridless methods has been developed to investigate incompressible viscous flow. The method is more feasible and effective than conventional grid methods for solving the flow field with complicated boundary shapes or multiple bodies. The method consists of particle interaction models representing pressure gradient, diffusion, incompressibility and the boundary conditions. In the present study, the models in case of various simulation condition were checked with the analytic solution, and applied to the two-dimensional Poiseuille flow in order to validate the developed method.

1. 서 론

종래 연속체의 수치 시뮬레이션 기술로는 격자계를 이용하는 방법이 널리 사용되어 왔다. 하지만 복잡한 형상에 대해서는 격자 생성에 많은 어려움과 방대한 시간이 소요되며 연속적으로 계면(Interface)이 크게 변형하는 문제에는 격자 생성에 대해 다양한 연구가 불가피하다. 한편 입자를 사용하는 SPH법(Monaghan, 1988), PIC법(Harlow, 1988), PIC법의 계량인 FLIP법(Brackbill and Ruppel, 1986; Brackbill et al., 1988), MPS법(Koshizuka et al., 1995) 등은 격자생성의 복잡한 작업이 불필요하여 격자가 꼬이는 등의 위상관계를 고려할 필요가 없고, 계면이 크게 변형되는 문제에도 적용될 수 있는 장점을 가지고 있다. 특히 비선형성 자유표면 유동의 수치 시뮬레이션의 경우에 있어서 입자를 이용한 수치 시뮬레이션 방법은 격자를 이용한 해석 방법보다 복잡한 형상의 물리 현상을 해석할 수 있는 가능성을 가지고 있다. 또한 입자를 이용한 수치 시뮬레이션 방법은 이류항(Convection term)의 계산을 입자의 완전한 라그랑지안(Lagrangian) 접근에 의해 입자의 이동으로 계산함으로써 오일러(Eulerian) 방법에서 심각하게 유발되는 수치 확산(Numerical diffusion)을 줄일 수 있다.

본 논문에서는 비압축성 유동의 수치 시뮬레이션을 위하여 Koshizuka et al.(1995)이 제안한 MPS(Moving particle semi-implicit method)법을 기초로 새로운 입자법 기술을 개발하는 것을 목적으로 하며, 개발된 입자법을 비압축성 유체의 Poiseuille 유동 문제에 적용하여 그 타당성을 확인하였다.

2. 지배방정식

비압축성 점성 유체의 운동에 관한 지배방정식은 연속방정식과 Navier-Stokes 방정식이다.

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{u} + \vec{F} \tag{2}$$

여기서, \vec{u} 는 속도벡터, t 는 시간, ∇ 은 구배 연산자, P 는 압력, ν 는 동점성계수, \vec{F} 는 외력을 각각 나타낸다.

연속방정식 식 (1)은 격자법에서 일반적으로 속도의 발산(Divergence)으로 쓰여지는 반면, 본 연구에서는 밀도의 발산으로 쓰여졌다. Navier-Stokes 방정식 식 (2)의 좌변은 이류항을 포함한 라그랑지안의 전미분(Total derivative) 형태이고, 입자

교신저자 박종천: 부산광역시 금정구 장전동 산30

051-510-2480 jcpark@pusan.ac.kr

의 직접적인 이동에 의해 계산된다. 한편, 우변은 압력 구배항, 점성항 그리고 외력항으로 구성되어 있다. 비압축성 점성 유동을 시뮬레이션 하기 위해서는 압력 구배항, 점성항 및 비압축성을 나타내는 입자간의 상호작용 모델이 필요하며, 본 연구에서는 이러한 모델들에 대하여 Koshizuka et al.(1995)에 의해 제안된 MPS법을 도입하기로 한다.

3. 입자간 상호작용 모델

MPS법에서는 연속체의 이산적인 계산을 입자 상호작용 모델을 통해서 행한다. 즉, 지배방정식의 편미분 연산자에 대응하는 입자간 상호작용 모델을 만들고, 지배방정식 각각의 항과 등가인 입자 상호작용 모델로 치환한다.

3.1 커널 함수(Kernel function)

연속 유체는 입자의 속도성분, 질량, 압력과 같은 물리량으로 나타내어진다. 유체의 흐름은 입자들의 상호작용 움직임에 의해 가시화된다. 따라서 지배방정식은 입자간의 상호작용으로 표시할 수 있다. MPS법에서 입자 상호작용은 커널 함수에 기초하여 이루어져 있다. 본 연구에서 사용한 커널 함수의 구체적인 식은 다음과 같다.

$$w(r) = \begin{cases} -(2r/r_e)^2 + 2 & (0 \leq r < (1/2)r_e) \\ (2r/r_e - 2)^2 & ((1/2)r_e \leq r < r_e) \\ 0 & (r_e < r) \end{cases} \quad (3)$$

여기에서 r 은 두 입자 사이의 거리이고, r_e 는 입자 상호작용 범위를 나타내는 커널 크기(Kernel size)이다. 커널 함수는 두 입자 사이의 거리 즉 중심 입자에서 주변 입자까지의 거리에 따라 입자 각각에 대하여 물리량의 가중치를 주는 것이다. 두 입자 사이의 거리가 가까울 경우 물리량의 가중치를 크게 주고, 두 입자 사이의 거리가 멀 경우 물리량의 가중치를 작게 준다. 만약 두 입자 사이의 거리가 매우 멀다면 물리량의 가중치가 매우 작기 때문에 물리량의 가중치를 무시하기에 충분하다. 따라서 입자 상호작용 범위를 나타내는 임계거리 r_e 를 두

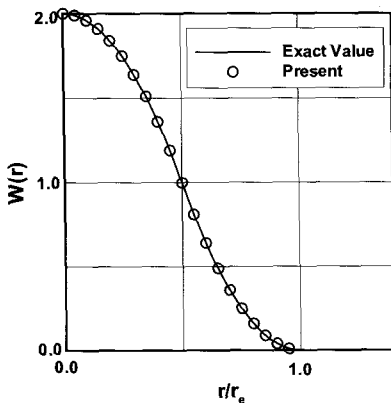


Fig. 1 The kernel employed in the present study

어 입자들 간의 상호작용 범위를 제한하여 전체 계산의 시간을 줄일 수 있다. 임계거리 r_e 는 초기 입자 배치 상태에서 평균 입자간 거리 l_0 에 임의의 값을 곱하여 얻는다.

3.2 구배 모델(Gradient model)

MPS법에서 입자 i 위치에서의 구배 모델은 입자 i 와 그 주변 입자 j 사이에서 구배 벡터를 $(P_j - P_i)(\vec{r}_j - \vec{r}_i)/|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2$ 으로 계산하고 이것을 커널 함수로 평균화 한 것이다(Fig. 2). 구배 모델에서는 동일한 입자에 대한 구배 벡터는 고려하지 않는다.

$$\langle \nabla P \rangle_i = \frac{d}{n^0} \sum_{j \neq i} \left[\frac{P_j - P_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) \right] \quad (4)$$

식 (4)에서 d 는 계산 공간의 차원이고, n^0 는 초기 입자 배치 상태에서의 입자수밀도(Particle number density)이다. 입자 i 의 입자수밀도는 식 (5)와 같이 정의한다.

$$n_i = \sum_{j \neq i} w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) \quad (5)$$

식 (5)는 주변의 입자 j 의 커널 함수의 합을 취한 것이다. 식 (5)에서 중심입자 i 는 입자수밀도 계산에 포함하지 않는다. 체적 V 중에 질량 m 의 입자가 N 개 들어 있다고 하면 밀도는

$$\rho = \frac{mN}{V} \quad (6)$$

이다. 입자수밀도의 정의로부터 N 을 입자수밀도로, V 를 커널 함수의 적분으로 근사할 수 있다.

$$\frac{N}{V} \cong \frac{\langle n \rangle}{\int w dV} \quad (7)$$

따라서 밀도는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\rho \cong \frac{m \langle n \rangle}{\int u x w} \quad (8)$$

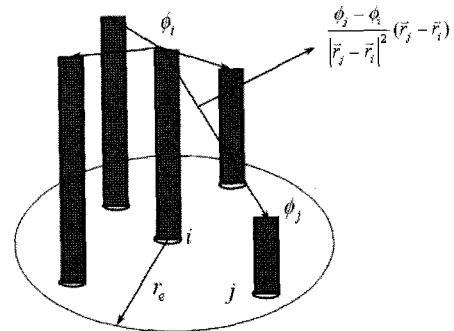


Fig. 2 The gradient model of MPS method

커널 함수의 임계거리가 일정하면 커널 함수의 적분도 일정하므로 밀도는 입자수밀도에 비례한다. 따라서 입자수밀도의 물리적 의미는 밀도이다.

구배모델의 타당성을 확인하기 위하여 Fig. 3과 같은 1차원 문제($y=-x^2+100x$)에 적용시켜 보았다. 입자의 x 방향 위치는 주변입자들까지의 평균 거리가 1.0이 되도록 0에서 100까지 임의(Random) 배열 하였다. 입자 배치의 임의의 정도는 입자간 평균 거리의 10%이다. 배열한 입자의 총 개수는 101개이고, 임계거리 r_e 는 $2.1l_0$ 이다. Fig. 4는 압력 구배 모델 식 (4)를 적용시킨 결과이며, 해석해와 거의 일치함을 알 수 있다. 또한 임계거리 r_e 가 $3.1l_0, 4.1l_0$ 인 경우에도 해석해와 거의 일치하였다.

3.3 확산(Laplacian) 모델

수학 연산자인 라플라시안(Laplacian, ∇^2)은 물리적으로 확산을 의미하며, Fig. 5에서 표시하는 바와 같이 입자 i 가 갖는 물리량의 일부를 주위의 입자 j 쪽으로 커널 함수의 분포에 따라 분배하는 역할을 해 준다.

$$\langle \nabla^2 \phi \rangle = \frac{2d}{\lambda n_i} \sum_{j \neq i} [(\phi_j - \phi_i) w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|)] \quad (9)$$

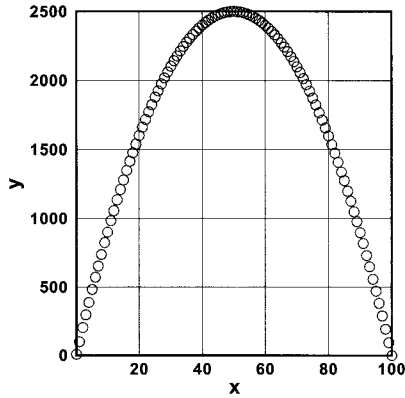


Fig. 3 Value x and y retained by particles in the test problem, $y=-x^2+100x$, for pressure gradient models

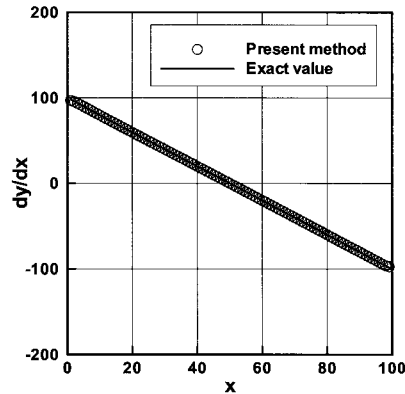


Fig. 4 The result of the present model

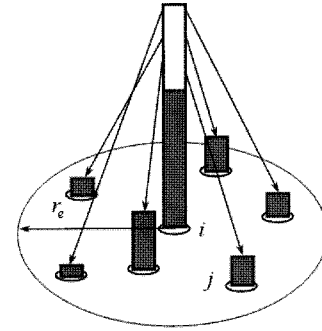


Fig. 5 The Laplacian model of MPS method

$$\lambda = \frac{\sum_{j \neq i} w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) |\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2}{\sum_{j \neq i} w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|)} \cong \frac{\int_V w(r) r^2 dv}{\int_V w(r) dv} \quad (10)$$

단, d 는 계산 공간의 차원이고, λ 는 해석해와 동일한 분산을 유지하기 위해 사용하는 계수이다. 계산 공간이 2차원이고, 커널 함수가 식 (3)의 경우 λ 는 $\frac{31}{140} r_e^2$ 가 된다.

식 (9)의 확산 모델을 다음과 같이 일정한 소스 S 와 확산계수 ν 를 가지는 1차원 문제에 적용시켜 보았다.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + S \quad (11)$$

본 연구에서는 $S/\nu=1.0$ 으로 설정하였고, 초기 조건과 경계 조건을 각각 다음과 같이 설정하였다.

$$f(x, t) = 0 \text{ at } x=0.0 \text{ and } x=20.0$$

$$f(x, t) = 0 \text{ at } t=0.0$$

초기의 입자 배치는 인접한 입자와의 평균 거리가 0.5가 되도록 임의로 배치하였다. 배치된 입자들의 양 끝단에는 점착(No-slip)조건을 각각 만족시키기 위해 추가로 가상입자들(Dummy particles)를 배치하였다. 즉, 추가된 가상입자의 갯수는 양 끝단 입자의 입자수밀도 계산이 가능하도록 임계거리 r_e 를 고려하여 산정하였다.

계산 간격 Δt 는 0.05로 고정하였고, 임계거리 r_e 는 $1.1l_0, 2.1l_0, 3.1l_0, 4.1l_0$ 로 변화시켜 계산하였다. 여기에서 l_0 는 초기 입자 배치 상태에서 입자간 거리이다. 가상입자의 물리량은 직접적으로 계산되지 않으며, 본 연구에서는 가상입자의 f 값을 모두 0으로 고정한 경우 (Case01)와 벽면에서 점착조건을 만족시키기 위해 기울기를 일정하게 유지하는 경우(Case02)의 결과를 서로 비교하였다.

Fig. 6은 1차원 확산방정식의 수치 해석 결과를 나타낸다. 단 이때의 $r_e = 2.1l_0$, 경계조건은 Case02를 적용하였다. 시간이 진행함에 따라 주어진 초기조건과 경계조건 하에서 점착 해석에 근접해 감을 알 수 있다.

Fig. 7은 다양한 입제거리 r_e 에 따른 계산결과를 보인다. 그림에서와 같이 r_e 가 $1.1l_0$ 인 경우를 제외하고는 해석해와 잘 일치함을 알 수 있다. 이로써 입제거리 r_e 는 계산의 정확성 확보를 위해 $r_e \geq 2.1l_0$ 와 같이 어느 정도 커야함을 알 수 있다.

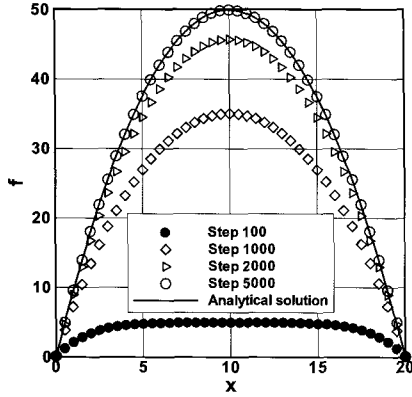


Fig. 6 Time-sequential development of one-dimensional diffusion problem

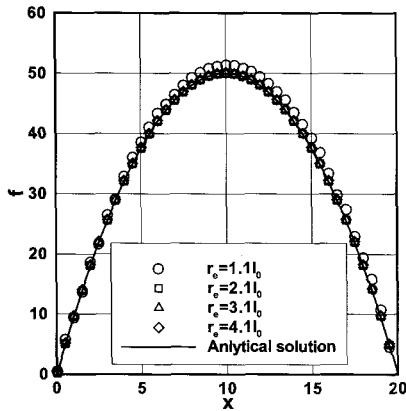


Fig. 7 Result of the one-dimensional diffusion calculation using the present diffusion model with various kernel sizes

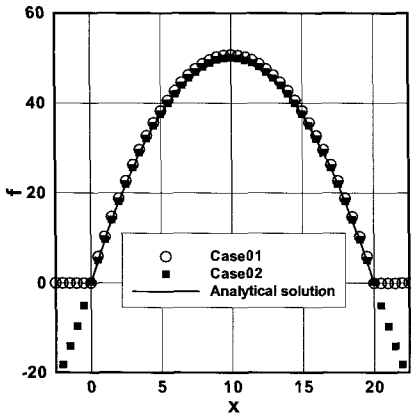


Fig. 8 Result of the one-dimension calculation using the present diffusion model with various boundary conditions

Fig. 8은 r_e 가 $2.1l_0$ 일 때 Case01과 Case02에 대한 수치 계산 결과이다. Koshizuka et al.가 제안한 식 (12)를 이용하여 해석해와 오차를 비교하였다. Case01의 경우 해석해와의 오차는 2.59%이고 Case02는 0.29%이다. 이로써 확산항의 계산에는 경계조건으로서 가상 입자들에 대한 적절한 물리량 부여가 필요함을 알 수 있다.

$$err^n = \frac{\sum |\phi_i^n - \phi_{i,analytic}^n|}{\sum \phi_{i,analytic}^n} \quad (12)$$

여기에서 $\phi_{i,analytic}^n$ 은 각 지점에서의 해석해를 의미한다.

3.4 비압축성 모델

만약 입자의 질량이 모두 동일하다면, 유체의 밀도는 입자수 밀도에 비례하므로 연속방정식 식 (1)은 입자수밀도가 일정하다는 조건과 동일하다.

MPS법에서는 비압축성 유동의 계산 알고리즘으로서 SMAC 법과 거의 유사한 알고리즘을 사용한다(Fig. 9). 매 시간스텝은 양과 음의 2단계로 나뉜다. 먼저, 시각 n 에 있어서 입자의 위치, 속도, 압력을 각각 $\vec{r}_i^n, \vec{u}_i^n, P_i^n$ 로 한다. 제 1단계에서는 점성항과 외력항의 계산을 통하여 입자의 중간속도인 \vec{u}_i^* 를 구한다. 다음에, 입자의 중간속도 \vec{u}_i^* 를 이용하여 입자의 중간 위치 \vec{r}_i^* 를 구한다. 즉,

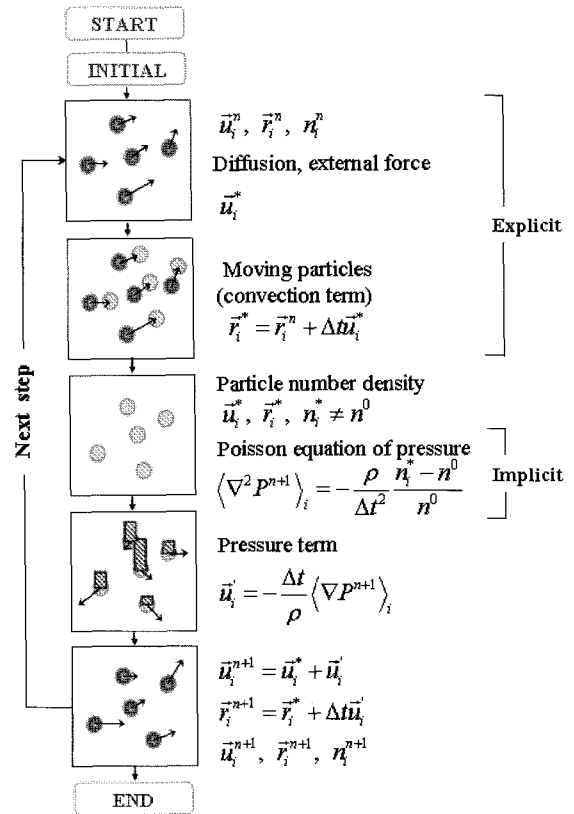


Fig. 9 Algorithm of the present particle method

$$\vec{r}_i^* = \vec{r}_i^n + \Delta t \vec{u}_i^* \quad (13)$$

식 (13)에 의한 입자의 이동은 격자를 사용하는 방법에 있어서 이류항의 계산에 해당된다. 계산된 입자의 중간 위치를 이용하여 중간 입자수밀도 n_i^* 를 계산할 수 있다.

제2단계에서는 먼저 압력의 포아송(Poisson)방정식을 계산한다.

$$\langle \nabla^2 P \rangle_i^{n+1} = -\frac{\rho}{\Delta t^2} \frac{n_i^* - n^0}{n^0} \quad (14)$$

식 (14)의 우변은 제 1단계의 입자수밀도 n_i^* 와 초기 입자수밀도 n^0 와의 차를 나타낸다. 좌변은 확산 모델인 식 (9)에 의해 연립 1차방정식으로 이산화 할 수 있으며, 적절한 반복해법에 의해 구할 수 있다. 구해진 압력장을 이용하여 식 (15)로부터 속도의 수정치 \vec{u}_i' 가 얻어진다. 단, 우변의 압력 구배 계산에서는 MPS법의 구배모델 식 (4)를 적용한다.

$$\vec{u}_i' = -\frac{\Delta t}{\rho} \langle \nabla P^{n+1} \rangle_i \quad (15)$$

최종적으로, 시각 $n+1$ 에서의 속도와 입자의 위치는 각각 다음 두 식에 의해 새롭게 얻어진다.

$$\vec{u}_i^{n+1} = \vec{u}_i^* + \vec{u}_i' \quad (16)$$

$$\vec{r}_i^{n+1} = \vec{r}_i^* + \Delta t \vec{u}_i' \quad (17)$$

본 방법과 일반적인 차분법에 있어서의 SMAC 법과의 차이는 이류항이 입자의 이동에 의해 직접 계산된다는 것과 압력의 포아송 방정식에 있어서 우변의 소스항이 속도의 발산이 아닌 입자수밀도로 표시되는 것이다.

3.5 벽 경계 조건

본 연구에 사용되는 입자의 종류에는 유체 입자(Fluid particles), 벽면 입자(Wall particles) 그리고 벽 내의 가상입자가 있다. 벽면 입자는 유체 입자와 가상입자 사이의 입자이다. 유체 입자와 벽면 입자는 압력의 계산에 포함시킨다. 벽면 입자를 압력 계산에 포함시키는 이유는 유체 입자가 벽면 주변에 집중될 경우 벽면 입자의 압력을 크게 하여 벽면에 유체 입자가 집중되는 것을 방지하기 위함이다. 벽 내 가상 입자의 배치는 벽면 입자의 입자수밀도 계산이 적절히 되도록 커널함수의 임계거리까지 벽면 입자의 외측에 배치한다.

입자법의 물리량 계산은 주변 입자의 물리량으로부터 계산되기 때문에 특히 경계면에서의 물리량 설정이 매우 중요하다. 따라서 벽 내 가상 입자들의 물리량에 대한 정보가 필요하다. 본 연구에 사용된 벽 경계 조건은 두 가지이다. 하나는 Koshizuka et al.(1995)가 제안한 방법으로서 점착 경계 조건

(No-slip)에 대해서 벽 내 가상 입자들의 속도를 항상 0으로 설정한다. 이때, 미끄럼 경계 조건(Free-slip)에 대해서 벽과 수평한 성분에 대해서 벽 방향의 기울기를 0으로 설정하지만, 압력의 계산에 있어서는 벽 내 가상 입자를 제외시킨다(Case03). 다른 하나는 이동경계조건이다(Case04). 이동경계조건은 식 (18)에 의해 계산되어지며, 식 (18)에서 \vec{n} 과 \vec{t} 는 각각 벽면의 수직벡터와 수평벡터이다.

$$\begin{aligned} P_{dummy} &= P_i + \rho gh, \quad x_{dummy} = 2x_{wall} - x_i \\ u_{dummy} \cdot n &= 2u_{surface} \cdot n - u_i, \quad u_{dummy} \cdot t = u_i \cdot t \end{aligned} \quad (18)$$

4. 수치시뮬레이션

4.1 Poiseuille 유동

앞서 설명한 입자 상호작용 모델을 2차원의 Poiseuille 문제에 적용하였다. 초기 입자의 배치는 Fig. 10과 같다.

초기 1×1 영역 유체입자의 속도는 모두 일정하게 1.0으로 고정하였다. 유체입자의 유입, 유출에 대해서는 주기 경계조건을 주었고, 각각의 유체입자에 대해 유동이 관내를 원활히 빠져나가도록 유동 방향으로 일정한 압력 구배를 주었다. 계산영역의 입자 개수는 51×51 , 임계거리 r_c 는 전체 계산중 포아송 방정식의 계산에서는 $4.0l_0$, 나머지 계산에서는 $2.1l_0$ 을 사용하였다. 계산 시간 간격 Δt 는 가변 Δt 와 고정 Δt 로 나누어 시뮬레이션에 적용하였고, 레이놀즈 수(Re)는 10, 밀도 ρ 는 $1000(\text{kg}/\text{m}^3)$ 으로 고정하였다.

Fig. 11은 관내 유동이 완전 발달한 후 경계조건에 따른 관내 한 열 입자들의 속도분포를 나타낸다. 단, 이때의 Δt 는 2.0×10^{-4} 로 고정하였다. 경계조건에 따른 결과는 확산항의 1차원 테스트 문제의 결과와 달리 두 경우 모두 층류 유동에 관한 해석해와 잘 일치함을 알 수 있다. 이는 관내 유체 입자가 원활히 빠져 나갈 수 있도록 유동방향으로 일정하게 준 압력 구배의 영향에 의한 것으로 생각된다.

Fig. 12는 경계조건에 따른 관내 중앙부의 최대속도 U_{max} 의 시간 변화를 나타낸다. 두 경계조건 모두 시간이 발달함에 따라 U_{max} 는 일정한 값(≈ 2.0)에 수렴하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 13는 벽 경계 조건이 이동경계조건이고 Δt 가 고정인 경우와 가변인 경우, 관내 중앙부의 최대속도 U_{max} 를 나타낸다. 가변 Δt 의 계산은 식 (19)과 같다. 식 (19)에서 C 는 Courant 수로 본 연구에서는 $C=0.01$ 과 0.06 이다. 이때 l_0 는 초기 입자 배치 상태에서의 입자간 평균거리이며 u_{max} 는 매 시간 스텝 입자들의 최대 속도이다.

$$\Delta t = C \frac{l_0}{u_{max}} \quad (19)$$

결과적으로 Δt 가 고정인 경우와 Courant 수 $C=0.01$ 인 경우에는 해석해와 잘 일치하지만, $C=0.06$ 인 경우에는 $t=0.2$

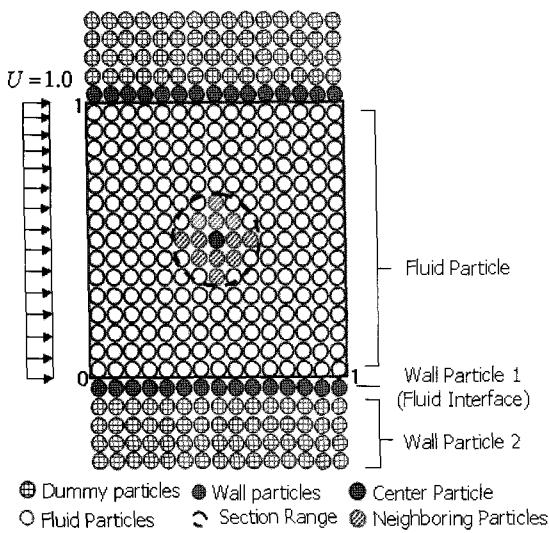


Fig. 10 Computational region for a 2D Poiseuille flow

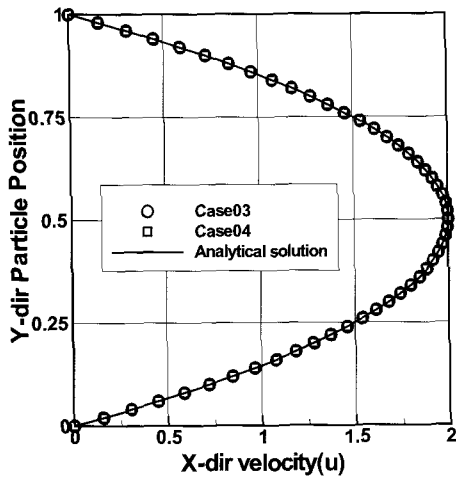


Fig. 11 Velocity distribution of Poiseuille flow

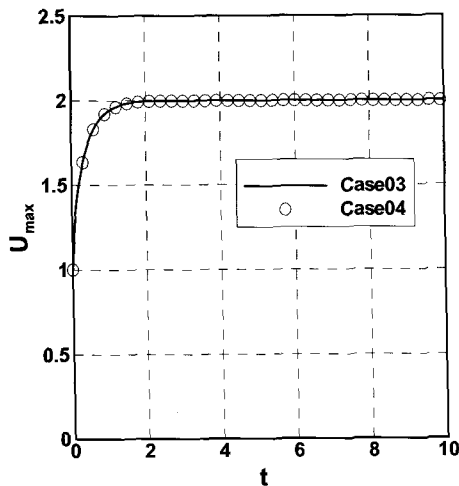


Fig. 12 U_{max} for time history of Poiseuille flow with various boundary condition

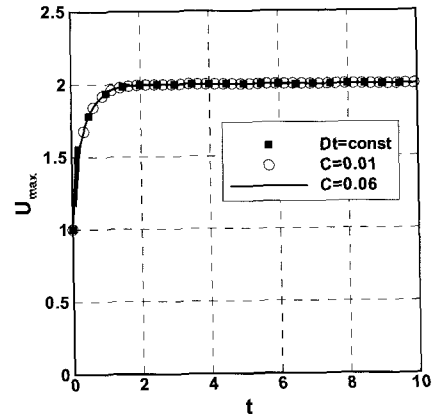


Fig. 13 U_{max} for time history of Poiseuille flow with various Courant number

부근에서 속도의 진동이 발생하였다. 이로서 Courant 수는 임의의 값(예를 들어, $C=0.01$) 이하가 되어야 함을 알 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 비압축성 유동의 수치 시뮬레이션을 위한 입자법을 개발하였다. 지배방정식을 MPS법(Koshizuka et al., 1995)의 입자 상호 작용 모델로 치환하였으며, 구배모델과 확산모델 각각에 대하여 1차원 테스트 문제에 적용하여 유용한 결과를 도출하였다. 또한 각각의 입자 상호작용 모델을 2차원 Poiseuille 유동 문제에 적용하여 유용한 결과를 얻었다. 향후 입자간 상호작용모델을 바탕으로 자유수면 조건을 도입하여 복잡한 파동과 구조물의 상호작용 문제에 적용할 예정이다.

후 기

본 연구는 부산대학교 자유과제학술연구비(2년) 과제의 지원으로 수행된 연구결과 중 일부임을 밝히며, 지원에 깊이 감사드립니다.

참 고 문 헌

- Brackbill, J.U. and Ruppel, H.M. (1986). "FLIP: A Method for Adaptively Zoned, Particle-in-Cell Calculations of Fluid Flows in Two Dimensions", J. Comput. Phys., Vol 65, pp 314-343.
- Brackbill, J.U., Kothe, D.B. and Ruppel, H.M. (1988). "FLIP: A Low Dissipation, Particle-in-Cell Method for Fluid Flow", Comp. Phys. Commun., Vol 48, pp 25.
- Harlow, F.H. (1988). "PIC and Its Progeny", Comput. Phys. Commun., Vol 48, pp 1-10.
- Koshizuka, S., Tamako, H. and Oka, Y. (1995). "A Particle

- Method for Incompressible Viscous Flow with Fluid Fragmentation", J. Comput. Fluid Dynamics, Vol 4, pp 29-46.
- Koshizuka, S. and Oka, Y. (1996). "Moving-Particle Semi-implicit Method for Fragmentation of Incompressible Fluid", Nucl. Sci. Eng., Vol 123, pp 421-434.
- Monaghan, J.J. (1988). "An Introduction to SPH", Comput. Phys. Comm., Vol 48, pp 89-96.
-
- 2007년 4월 25일 원고 접수
2007년 7월 31일 최종 수정본 채택