

# 건축물의 내진설계를 위한 구조동력학

## (제1부 : 단자유도 구조물의 지진해석과 응답스펙트럼)



이 동 군  
성균관대학교 건축공학과교수

구조동력학 이론에 기초하여 내진설계 기술이 개발되었다. 그러므로 건축물의 내진설계를 근본적으로 이해하기 위해서는 구조동력학의 여러 가지 이론들을 먼저 알고 이들이 내진설계에 어떻게 적용이 되는지를 알아야 한다. 이 글은 구조기술자 여러분이 건축물의 내진설계를 이해하는데 도움이 될 수 있도록 하기 위하여 다음과 같이 3부로 연재될 예정이다.

- 제1부: 응답스펙트럼과 구조물의 동적해석
- 제2부: 등가정적해석법과 반응수정계수의 배경
- 제3부: 능력스펙트럼법에 의한 비탄성 해석

제1부에서는 단자유도 구조물의 지진해석을 통하여 응답스펙트럼을 작성하는 원리와 이를 이용하여 간편하게 지진해석을 수행하는 방법을 소개하고 응답스펙트럼에 근거하여 설계응답스펙트럼을 작성하는 방법과 다자유도 구조물의 지진응답을 알아내기 위한 응답

스펙트럼해석법에 관하여 소개한다.

제2부에서는 구조동력학 이론에 근거하여 등가정적해석법이 유도된 근거와 반응수정계수를 사용하게 되는 배경을 소개하여 구조기술자들이 내진설계에 좀 더 확실한 이해를 할 수 있도록 할 것이다.

마지막으로 제3부에서는 비탄성해석을 좀 더 쉽게 하기 위하여 사용되는 능력스펙트럼법의 배경과 이를 이용하여 건축물의 성능점을 찾는 방법과 구조물의 비탄성 지진응답을 평가하는 방법에 대하여 소개함으로써 성능에 기초한 내진설계를 위한 기초 이론을 확실히 이해할 수 있도록 할 것이다.

구조동력학에 관한 내용을 여기에 상세히 소개하자면 엄청난 분량이 될 것이므로 여기서는 이 글을 읽는 구조기술자들이 구조동력학에 관한 기초적인 내용을 이해하고 있는 것으로 가정하기로 한다. 그러므로 구조동력학에 대한 기초적 이론을 확실히 이해하고 있지 못한 분들은 이 글을 읽기 전에 먼저 구조동력학에 관한 알기 쉬운 서적을 먼저 읽도록 추천한다.

### 1. 단자유도 구조물의 지진해석과 응답스펙트럼

내진설계란 지진이 발생하는 경우에 일어날 것으로 예상되는 여러 가지의 현상을 미리 예측하고 이에 대하여 적절한 구조설계를 수행함으로써 지진의 피해를 최소화하는 것을 말한다. 지진이 발생하면 지반이 진동하게 되며 이에 따라서 지반 위에 놓인 구조물은 진동을 하게 되는데 이러한 구조물의 응답을 미리 알아내는 것을 지진해석(seismic analysis)이라고 한다. 흔히들 '내진해석'이라는 표현을 사용하는데 해석 자체로는 구조물에 대한 내진성능이 확보되지 못하므로 이러한

표현은 합당하다고 보기 어렵다. 따라서 '지진해석'을 수행한 결과를 토대로 '내진설계'를 한다고 하여야 논리적인 표현이 될 것이다.

#### 1.1 지진응답의 해석

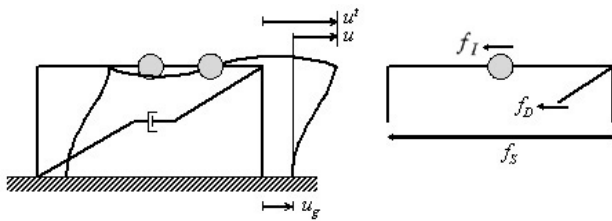
지진이 발생하면 <그림 1.1(a)>에서 보는 바와 같은 단층 구조물에 변위가 발생하게 되는데 이 때 질량의 변위( $u'$ )를 절대변위(absolute displacement) 또는 전체변위(total displacement)라고 하며 구조물의 절대변위와 지반변위( $u_g$ )의 차이를 상대변위( $u$ )라고 한다. 그러므로 구조물의 절대변위는 <식 1.1>에서 보는 바와 같이 상대변위와

지반변위의 합이 된다.

$$u'(t) = u(t) + u_g(t) \quad \langle \text{식 1.1} \rangle$$

이런 구조물은 단자유도 모델로 이상화할 수 있으며 단자유도 모델의 감쇠진동에 대한 운동방정식은 <식 1.2>와 같이 나타낼 수 있다.

$$m\ddot{u}'(t) + c\dot{u}'(t) + ku(t) = 0 \quad \langle \text{식 1.2} \rangle$$



(a) 지진에 의한 구조물 변위 (b) 자유 물체도  
 <그림 1.1> 지진에 의한 구조물의 변위와 힘

진동하는 구조물에서는 <그림 1.1(b)>에서 볼 수 있는 바와 같이 관성력( $f_I$ ), 감쇠력( $f_D$ ) 및 복원력( $f_S$ )이 발생한다. 관성력은 절대가속도와 질량의 곱이며 절대가속도( $\ddot{u}'$ )는 상대가속도( $\ddot{u}$ )와 지반가속도( $\ddot{u}_g$ )의 합이므로 관성력을 <식 1.3>과 같이 나타낼 수 있다.

$$f_I = m\ddot{u}'(t) = m\ddot{u}(t) + m\ddot{u}_g(t) \quad \langle \text{식 1.3} \rangle$$

<식 1.3>을 <식 1.2>에 대입하여 정리하면 <식 1.4>과 같은 형태로 지진에 의한 구조물의 운동방정식을 얻을 수 있다. 그리고 이 식에서 2번째 항을 우변으로 옮기면 <식 1.5>와 같이 좌변의 모든 항은 상대가속도, 상대속도 및 상대변위 등의 상대응답으로 나타나게 된다.

$$m\ddot{u}(t) + m\ddot{u}_g(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad \langle \text{식 1.4} \rangle$$

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = -m\ddot{u}_g(t) \quad \langle \text{식 1.5} \rangle$$

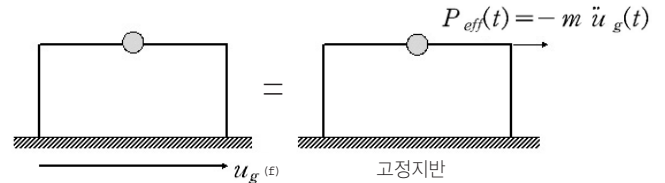
이 식의 양변을 질량(m)으로 나누면 <식 1.6>과 같이 나타낼 수 있다.

$$\ddot{u}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{u}(t) + \omega_n^2u(t) = -\ddot{u}_g(t) \quad \langle \text{식 1.6} \rangle$$

<식 1.5>와 <식 1.1>을 비교하여 보면 두 식의 좌변은 같으며 <식 1.1>의 우변은 가해지는 하중이지만 <식 1.5>의 우변에는  $-m\ddot{u}_g(t)$ 가 있음을 알 수 있다. 그러므로 지반가속도  $\ddot{u}_g(t)$ 로 인한

구조물의 상대변위는 <그림 1.2>에서 보는 바와 같이 지반이 고정된 상태에서 외력  $-m\ddot{u}_g(t)$ 가 작용할 때 구조물에 발생하는 변위와 같은 것을 알 수 있다.

$$P_{eff}(t) = -m\ddot{u}_g(t) \quad \langle \text{식 1.7} \rangle$$



<그림 1.2> 수평지반가속도와 유효지진하중

### 1.2 응답스펙트럼의 배경

지진하중이 가해지는 동안 구조물에 발생하는 변위, 속도, 가속도, 밀면전단력, 전도모멘트 등의 응답은 시간이력해석법(time history analysis)에 의하여 결정될 수 있지만 구조물을 내진설계를 할 경우에는 일반적으로 구조물의 최대응답을 기준으로 필요한 강도를 결정하므로 시간변화에 따른 구조물의 시간이력거동을 모두 필요로 하지는 않는다. 따라서 내진설계를 위하여 간편하고 쉬운 방법으로 구조물의 최대 지진응답을 알아낼 필요가 있으며 이러한 목적으로 흔히 사용되는 것이 응답스펙트럼(response spectrum)이다.

지진이 발생하였을 때 지반운동에 의한 단자유도 구조물의 동적평형 방정식인 <식 1.5>를 살펴보면 구조물의 응답은 구조물의 질량, 감쇠 및 강성과 지반가속도에 의하여 결정됨을 알 수 있다. 그러나 <식 1.6>을 사용하여 구조물의 응답을 구하는 경우에는 구조물의 응답이 감쇠비, 고유진동수와 지반가속도에 의하여 결정될 수 있다. 그러므로 질량이나 강성이 서로 다른 구조물일지라도 고유진동수(또는 고유진동주기)와 감쇠비가 동일한 경우에는 서로 같은 거동을 하게 되는 것을 알 수가 있다.

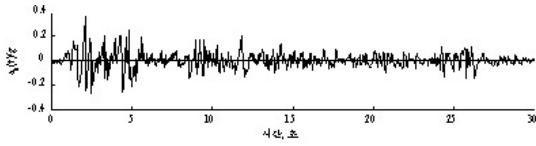
일정한 감쇠비를 가진 단자유도 구조물의 진동주기를 변화시키면서 구조물의 최대응답을 구하고 진동주기와 최대응답과의 관계를 그린 것을 응답스펙트럼이라고 한다. 이러한 응답스펙트럼을 사용하면 시간이력해석법을 사용하지 않고도 특정한 지반운동에 대하여 주어진 감쇠비와 고유진동주기를 가진 구조물의 최대응답을 쉽게 알아낼 수가 있으므로 매우 편리하다.

### 1.3 응답스펙트럼의 작성방법

#### 가) 변위응답스펙트럼의 작성

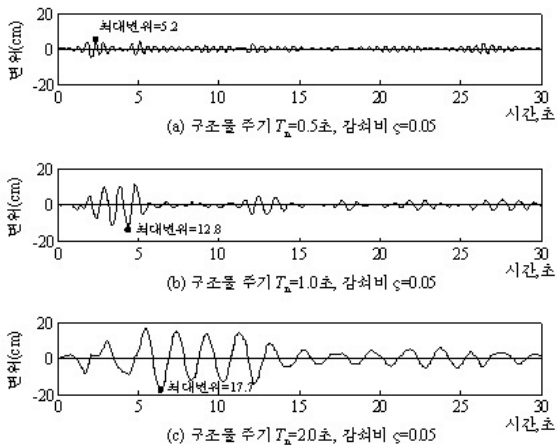
응답스펙트럼을 작성하기 위해서는 지진에 의한 지반가속도의 시간

이력을 필요로 한다. <그림 1.3>은 El Centro(1940) 지진의 지반가속도 기록(남북방향성분)을 보여주고 있는데 편의상 앞으로 모든 응답스펙트럼의 작성이나 지진해석에는 이 지반가속도를 사용하기로 한다.



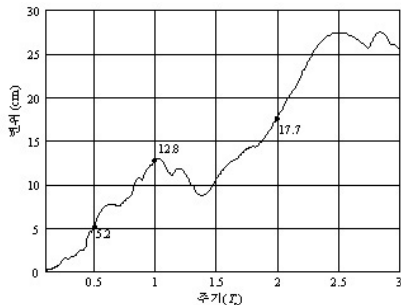
<그림 1.3> El Centro 지진의 남북방향성분 지반가속도

감쇠비가 0.05인 경우에 진동주기가 0.5초, 1.0초, 2.0초인 구조물에서 El Centro 지진의 지반가속도에 의하여 발생하게 되는 변위의 시간이력은 <그림 1.4>에서 보는 바와 같으며 각 구조물에서 발생하는 최대변위는 각각 5.2cm, 12.8cm, 17.7cm이다. 이 세 가지의 서로 다른 진동주기를 가진 구조물의 최대변위를 <그림 1.5>에 표시하였다.



<그림 1.4> 구조물 주기 변화에 따른 변위의 시간이력

이와 같이 감쇠비를 일정하게 유지하면서 고유진동주기를 여러 가지로 변화시킨 단자유도 구조물들에 대하여 위와 같은 과정을 반복하여 수행하면 <그림 1.5>와 같은 El Centro 지진에 대한 변위응답스펙트럼을 얻을 수가 있다.



<그림 1.5> El Centro 지진에 대한 변위응답스펙트럼 : 감쇠비=0.05

나) 유사속도와 유사가속도

앞에서 소개한 변위응답스펙트럼 작성법을 사용하면 변위응답스펙트럼 뿐만 아니라 속도응답스펙트럼이나 가속도응답스펙트럼을 작성할 수 있다. 그러나 세 가지의 응답스펙트럼을 사용하면 여러 가지로 불편하므로 이것을 하나의 그래프로 표현하는 것이 바람직하다. 그래서 구조물의 응답이 조화함수로 표현될 수 있다고 가정하고 유사속도(pseudo-velocity:  $\dot{A}$ )와 유사가속도(pseudo-acceleration:  $\ddot{V}$ )의 개념을 도입한다. 구조물에 발생하는 변위는 지반가속도와 구조물의 동적특성에 좌우되지만 만약 변위를 <식 1.8a>와 같이 최대치가  $u_g$ 인 조화운동으로 가정하면 이에 대한 속도 및 가속도는 <식 1.8b>와 <식 1.8c>에서 보는 바와 같이 조화함수로 나타낼 수 있다.

$$u(t) = u_o \sin \omega_n t \quad \langle \text{식 1.8a} \rangle$$

$$\dot{u}(t) = u_o \omega_n \cos \omega_n t \quad \langle \text{식 1.8b} \rangle$$

$$\ddot{u}(t) = -u_o \omega_n^2 \sin \omega_n t \quad \langle \text{식 1.8c} \rangle$$

변위, 속도 및 가속도의 최대치  $u_o$ ,  $\dot{u}_o$ ,  $\ddot{u}_o$ 를 다음과 같이 최대변위  $D$ , 유사속도 및 유사가속도  $A$ 로 정의하는데 유사속도 및 유사가속도는  $\omega_n$ 에 및  $\omega_n^2$ 을 곱하여 얻을 수 있음을 알 수 있다.

$$D \equiv u_o \quad \langle \text{식 1.9a} \rangle$$

$$V \equiv \dot{u}_o = D \omega_n = \frac{2\pi}{T_n} D \quad \langle \text{식 1.9b} \rangle$$

$$A \equiv \ddot{u}_o = D \omega_n^2 = \left(\frac{2\pi}{T_n}\right)^2 D \quad \langle \text{식 1.9c} \rangle$$

최대밀면전단력( $V_{bo}$ ) 또는 최대등가정적하중( $F_{so}$ )은 <식 1.10>에서 보는 바와 같이 질량과 유사가속도의 곱으로 나타낼 수 있는데 구조기술자들이 질량보다는 무게에 친숙하므로 유사가속도를 중력가속도로 나눈  $A/g$ 과 무게의 곱으로 표현하는 방법을 주로 사용한다.

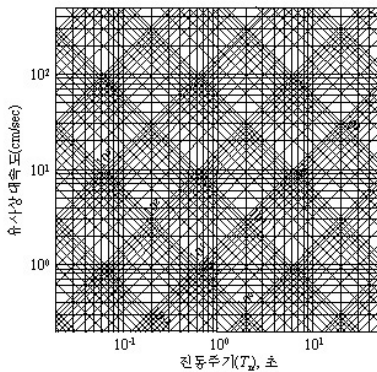
$$V_{bo} = f_{so} = mA = A \frac{W}{g} = \frac{A}{g} W \quad \langle \text{식 1.10} \rangle$$

여기서  $A/g$ 는 내진설계기준에서 밀면전단력을 구하기 위하여 사용하는 밀면전단계수(base shear coefficient) 또는 횡하중계수(lateral force coefficient)이다. 우리나라의 내진설계기준에서는 밀면전단력을 <식 1.11>과 같이 규정하고 있는데 이것은 밀면전단계수의 형태를 이용하여 전체 무게에 비례하는 밀면전단력을 규정하고 있음을 알 수 있다.

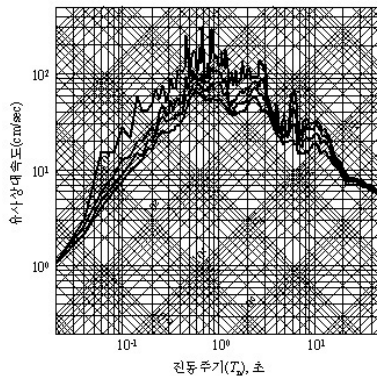
$$V_{bo} = C_s W \quad \langle \text{식 1.11} \rangle$$

다) D-V-A 조합스펙트럼의 작성방법

앞에서 설명한 바와 같이 주어진 지반가속도에 대하여 최대변위, 유사속도 및 유사가속도의 세 가지 응답을 하나의 그래프에 나타내면 매우 편리하게 사용할 수 있다. <그림 2.2.6>에서 보는 것과 같이 가로축은 진동주기를 나타내고 세로축과 2개의 경사진 축은 유사속도, 변위, 유사가속도를 나타내는데 이 4개의 축에는 모두 대수눈금(logarithmic scale)을 사용한다. 이와 같은 방법으로 3가지 응답을 하나의 그래프에 나타낸 것을 D-V-A 조합스펙트럼(combined D-V-A spectrum)이라고 하며 3중 대수그래프(tripartite logarithmic plot) 또는 4축 대수그래프(four-way logarithmic plot)라고도 부른다. 이러한 방법으로 El Centro 지진의 지반가속도에 대한 응답스펙트럼을 3중 대수그래프로 작성하면 <그림 1.7>과 같다.



<그림 1.6> 3중 대수그래프 용지



<그림 1.7> El Centro 지진에 응답스펙트럼 ( $\zeta=0, 2, 5, 10\%$ )

1.4 응답스펙트럼의 이용 방법

응답스펙트럼을 이용하면 단자유도 구조물에 대하여 시간이력해석을 수행하지 않고 최대응답을 구할 수 있다. 단자유도 구조물의 최대변위( $u_o$ )를 구하기 위하여 응답스펙트럼에서 진동주기에 대한 최대변위(D), 유사속도(V) 및 유사가속도(A) 중에서 하나의 값을 알 수 있다면 <식 1.12>와 <식 1.13>을 이용하여 최대변위와 밀면전단력을

알아낼 수 있다.

$$u_o = D = \left(\frac{T_n}{2\pi}\right)V = \left(\frac{T_n}{2\pi}\right)^2 A \quad \langle \text{식 1.12} \rangle$$

$$V_{so} = kD = k \frac{1}{\omega_n^2} A = k \frac{m}{k} A = mA \quad \langle \text{식 1.13} \rangle$$

1.5 비탄성 응답스펙트럼

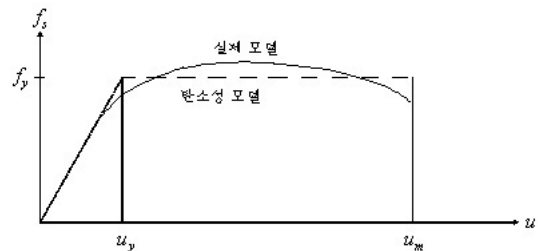
구조물이 탄성범위를 벗어나 소성변형을 일으키게 되면 구조물의 동적특성이 변하게 되므로 구조물은 탄성스펙트럼에 근거한 응답과는 다른 거동을 하게 된다. 그래서 비탄성거동을 하는 구조물의 최대응답을 알아내기 위해서는 비탄성 응답스펙트럼을 따로 구하여야 한다.

가) 비탄성 응답스펙트럼의 작성방법

구조물에 대한 비탄성 거동의 정도를 나타내기 위하여 <식 1.14>에서 보는 바와 같이 구조물의 항복변위( $u_y$ )에 대한 구조물의 최대변위( $u_m$ )의 비를 연성도라고 정의한다.

$$\mu = \frac{u_m}{u_y} \quad \langle \text{식 1.14} \rangle$$

그리고 비탄성 동적응답은 하중-변형 특성에 따라서 다르게 되는데 일반적으로 <그림 1.8>에서 보는 바와 같이 구조물의 하중-변형 관계를 탄소성(elastic-plastic)으로 이상화하고 동적해석을 수행하여 비탄성 응답스펙트럼을 작성하게 된다.

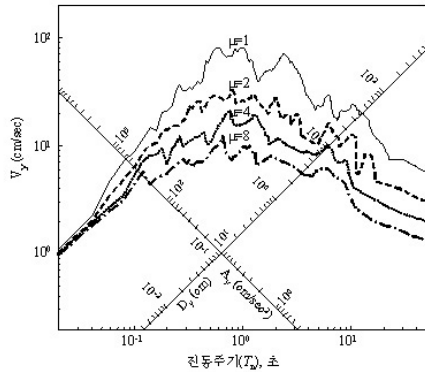


<그림 1.8> 하중-변형 곡선의 실제 모델과 탄소성 모델

<그림 1.7>에서 보는 바와 같이 여러 가지의 감쇠비에 대하여 여러 개의 곡선으로 나타내는 탄성응답스펙트럼과는 달리 비탄성응답스펙트럼은 하나의 감쇠비를 먼저 선택한 후에 여러 가지의 연성도에 대하여 응답스펙트럼을 작성하게 된다. 선택된 감쇠비와 진동주기를 가지는 구조물의 항복강도를 여러 가지로 변화시키면서 비탄성 동적해석을 반복해서 수행하고 최대연성도가 목표로 하는 연성도와 일치할 때의 최대변위를 구한다. 이러한 과정을 원하는 진동주기 범위에 대하여 반복하면 한 가지 연성도에 대한 응답스펙트럼을 얻게 된다. 감



쇠비를 5%로 정하고 연성도가 1, 2, 4, 8인 경우에 대하여 El Centro 지진에 대한 응답스펙트럼을 구하면 <그림 1.9>에서 보는 바와 같다. 여기에서 연성도가 증가함에 따라서 응답이 점차 감소하는 것을 알 수 있으나 진동주기가 짧은 경우에는 연성도가 증가하여도 응답의 감소가 크지 않음을 볼 수 있다.



<그림 1.9> El Centro 지진에 대한 비탄성 응답스펙트럼 : 연성도( $\mu$ )=1, 2, 4 및 8; 감쇠비( $\zeta$ )=5%

나) 비탄성 응답스펙트럼의 이용방법

탄성 응답스펙트럼과는 달리 비탄성 응답스펙트럼에서는 구조물의 최대변위(D), 유사속도(V)와 유사가속도(A)를 사용하지 않고 항복변위(D<sub>y</sub>), 항복유사속도(V<sub>y</sub>)와 항복유사가속도(A<sub>y</sub>)를 사용한다. 비탄성 거동을 하는 구조물의 설계에는 항복강도를 사용하게 되는데 이것을 구하기 위하여 항복가속도의 개념을 도입하게 된다. 항복속도와 항복가속도의 물리적 의미를 설명하기는 쉽지 않지만 이것들은 <식 1.9b>와 <식 1.9c>에서  $\omega$ 를 바꾸면 <식 1.15>에서 보는 바와 같이 정의될 수 있다.

$$D_y = u_y \quad V_y = \omega_n u_y \quad A_y = \omega_n^2 u_y \quad \text{〈식 1.15〉}$$

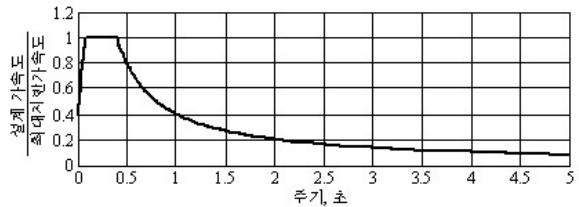
<그림 1.9>에서 보는 바와 같이 일정한 감쇠비에 대하여 작성된 비선형 응답스펙트럼을 이용하면 특정한 연성도를 가지는 구조물의 설계강도를 결정할 수 있다. <그림 2.4.1>에서 보는 항복변위와 항복강도의 관계와 <식 1.5>로부터 다음과 같이 설계강도(항복강도)를 구할 수 있다.

$$f_y = k u_y = m \omega_n^2 u_y = m \omega_n^2 D_y = m A_y = \frac{A_y}{g} W = \frac{\omega_n^2 D_y}{g} W \quad \text{〈식 1.16〉}$$

1.6 설계용 응답스펙트럼

설계용 응답스펙트럼(design response spectrum)은 구조물의 내진

설계에서 지진의 영향을 고려하여 지진력을 산정하기 위하여 사용된다. 특정한 지반운동에 대하여 작성된 응답스펙트럼은 <그림 1.7>이나 <그림 1.9>에서 볼 수 있는 바와 같이 진동주기에 따라서 급격히 변하므로 들쭉날쭉한 형태를 가지고 있다. 그리고 여러 가지의 지반운동에 대한 응답 스펙트럼은 서로 다른 형태를 가지게 된다. 그러나 해당 부지에서 예상되는 지반운동을 정확하게 예측하는 것이 불가능하므로 이것으로부터 설계용 응답스펙트럼을 구하기도 어렵다. 미래에 발생할 지반운동에 대하여 정확한 응답스펙트럼을 예측하는 것이 불가능하다면 과거에 발생한 여러 가지의 지진에 의한 응답스펙트럼을 분석하고 이를 근거로 구조물의 내진설계에 사용될 응답스펙트럼을 작성할 필요가 있다. 일반적으로 내진설계기준에서는 설계용 응답스펙트럼을 <그림 1.10>에서 보는 바와 같이 진동주기에 따라서 급격하게 변하지 않는 완만한 곡선으로 규정하고 있다.



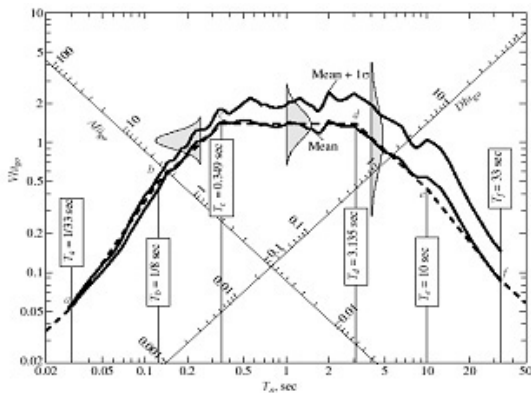
<그림 1.10> UBC 97의 설계용 가속스펙트럼 (최대 지반가속도=0.4g 지반상태=S<sub>B</sub> 즉 Ca=.04, Cv=0.4)

가) 탄성 설계응답스펙트럼의 작성방법

탄성 설계스펙트럼은 다양한 지반운동으로부터 구한 응답스펙트럼을 통계학적 방법을 통하여 만들 수 있다. R. Riddell과 N. Newmark는 여러 가지의 지진에 대한 응답스펙트럼을 최대지반가속도(peak ground acceleration: PGA)로 정규화하고 이것들의 평균치와 평균치에 표준편차를 더한 값을 <그림 1.11>에서 보는 바와 같이 나타내었다. 그리고 T<sub>a</sub>, T<sub>b</sub>, T<sub>c</sub>, T<sub>d</sub>, T<sub>e</sub> 및의 6가지 주기를 설정하고 이를 경계로 하여 진동주기를 7개의 구간으로 나눈 후에 각 구간에 대하여 응답스펙트럼의 평균치를 직선으로 근사화하고 그림에 점선으로 나타내었다. 구간의 경계가 되는 주기인 T<sub>a</sub>, T<sub>b</sub>, T<sub>c</sub> 및 T<sub>e</sub>는 1/33초, 1/8초, 10초 및 33초이며 T<sub>c</sub>는 b-c 구간과 c-d 구간의 직선화된 스펙트럼이 만나는 교점에 해당되는 주기이고 T<sub>a</sub>는 c-d 구간과 d-e 구간의 직선화된 스펙트럼이 만나는 점에 해당되는 주기이다.

응답스펙트럼의 평균치를 나타내는 곡선을 크게 세 구간으로 나누어 생각할 수 있다. 진동주기가 T<sub>c</sub>보다 짧은 구간에는 응답스펙트럼이 가속도에 의하여 좌우되며 진동주기가 T<sub>c</sub>와 T<sub>a</sub>사이의 구간에서는 속도에 의하여 응답스펙트럼이 좌우되고 진동주기가 T<sub>a</sub>보다 긴 구간에서는 응답스펙트럼이 변위에 의하여 좌우되는 것을 알 수 있다. 그

리므로 이러한 구간들을 가속도에 민감한 구간(acceleration sensitive region), 속도에 민감한 구간(velocity sensitive region) 및 변위에 민감한 구간(displacement sensitive region)이라고 부른다. 그리고 진동주기가  $T_a$ 보다 짧은 구간에서는 응답스펙트럼의 가속도가 최대지반가속도와 거의 일치하며 진동주기가  $T_b$ 보다 긴 구간에서는 응답스펙트럼의 변위가 최대지반변위와 거의 일치하는 것을 볼 수 있다. 그러나 b-c, c-d 및 d-e 구간에서는 가속도, 속도 및 변위가 최대지반가속도, 최대지반속도 및 최대지반변위에 비하여 어느 정도 증폭이 됨을 알 수 있다. 여러 가지의 감쇠비에 대하여 가속도, 속도 및 변위의 증폭계수 ( $\alpha_A$ ,  $\alpha_V$  및  $\alpha_D$ )를 표 1.1에 나타내었는데 응답스펙트럼 평균치의 경우에 비하여 응답스펙트럼의 평균치에 표준편차를 더한 경우에는 가속도, 속도 및 변위가 좀 더 크게 증폭이 되는 것을 알 수 있다. 일반적으로 내진설계에서는 84.1%의 지진을 포함할 수 있도록 표준편차를 더한 경우를 선택하고 있다.



〈그림 1.11〉 응답스펙트럼의 평균치와 평균치에 표준편차를 더한 결과 :  $\zeta=5\%$

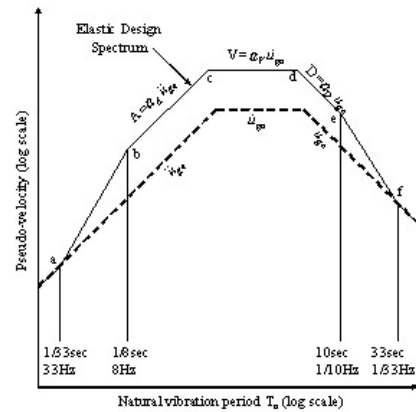
〈표 1.1〉 증폭계수 : 탄성설계스펙트럼

Damping	Median (50 percentile)			One Sigma (84.1 percentile)		
	$\alpha_A$	$\alpha_V$	$\alpha_D$	$\alpha_A$	$\alpha_V$	$\alpha_D$
1	3.21	2.31	1.82	4.38	3.38	2.73
2	2.74	2.03	1.63	3.66	2.92	2.42
5	2.12	1.65	1.59	2.71	2.30	2.01
10	1.64	1.37	1.20	1.99	1.84	1.69
20	1.17	1.08	1.01	1.26	1.37	1.38

앞에서 설명한 〈표 1.1〉의 진동주기 구간별 증폭계수를 사용하여 탄성 설계스펙트럼을 작성하면 〈그림 1.12〉에서 보는 바와 같은 탄성 설계응답스펙트럼을 얻을 수 있게 된다.

나) 비탄성 설계응답스펙트럼의 작성방법

구조물의 비탄성거동에 의하여 상당한 에너지 소산효과가 있으므로



〈그림 1.12〉 탄성 설계스펙트럼의 작성

〈그림 1.9〉에서 보는 바와 같이 비탄성거동이 증가함에 따라서 응답이 감소하게 된다. 그러므로 구조물이 비탄성거동을 할 수 있는 최대 능력, 즉 연성능력(ductility capacity)에 따라서 설계용 지진하중이 저감될 수가 있다. 따라서 구조물의 내진설계에는 설정된 연성능력에 따라서 저감된 지진하중을 사용하고 이러한 연성능력을 가지도록 구조상설계를 한다.

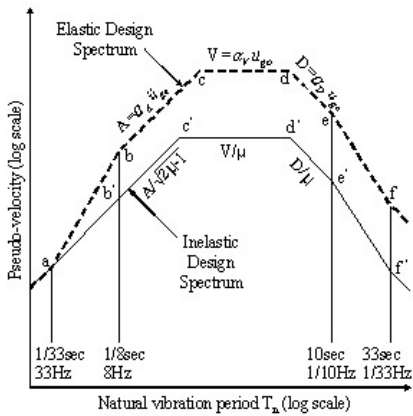
비탄성 설계응답스펙트럼의 작성에 관한 이론은 너무 복잡하기 때문에 여기서는 비탄성 설계응답스펙트럼을 작성하는 방법만을 간단히 설명하기로 한다. 먼저 탄성응답과 탄소성응답의 관계를 나타내기 위하여 탄소성구조물에 대한 정규화된 항복강도 ( $\overline{f_y}$ )를 〈식 1.17〉과 같이 정의한다.

$$\overline{f_y} = \frac{f_y}{f_{s0}} = \frac{u_y}{u_{s0}} \quad \text{〈식 1.17〉}$$

여기서  $f_{s0}$ 는 최대 등가정적하중(최대 탄성복원력)이고  $f_y$ 는 항복강도이며  $u_{s0}$ 는 최대 탄성변위와 항복변위이다. 위에서 정의된  $\overline{f_y}$ 를 이용하여 탄성 설계스펙트럼으로부터 비탄성 설계스펙트럼을 작성할 수 있다. 이전에 수행된 많은 연구들에 의하면  $\overline{f_y}$ 와 연성도( $\mu$ ) 사이의 관계가 다음과 같은 것으로 알려져 있다.

$$\overline{f_y} = \begin{cases} 1 & T_n < T_a \\ (2\mu - 1)^{-1/2} & T_b < T_n < T_c \\ \mu^{-1} & T_n > T_c \end{cases} \quad \text{〈식 1.18〉}$$

최대지반가속도, 속도 및 변위에 근거하여 〈그림 1.12〉에서 보는 바와 같이 탄성 설계스펙트럼 a-b-c-d-e-f를 작성한 후에 특정한 연성도( $\mu$ )에 대하여 〈식 1.18〉에서 정하는 바와 같이 저감시키면 〈그림 1.13〉에서 보는 바와 같은 비탄성 설계스펙트럼 a'-b'-c'-d'-e'-f'을 작성할 수 있다.



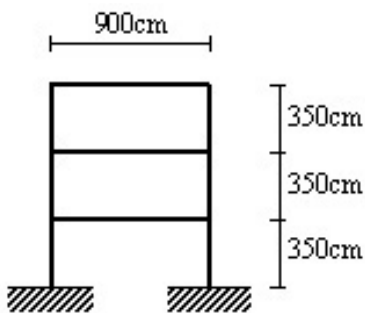
〈그림 1.13〉 비탄성 설계스펙트럼

## 2 다자유도구조물의 지진해석

다자유도 구조물의 지진해석에 관하여 이해하기 위해서 먼저 여러 가지의 해석모델에 관하여 알아볼 필요가 있다. 사용하는 해석모델의 특성에 따라서 구조물의 지진거동이 상당한 차이를 보일 수가 있으므로 지진해석을 수행하기 위하여 어떠한 해석모델을 사용할 것인지를 신중히 결정하여야 한다.

### 2.1 해석 모델

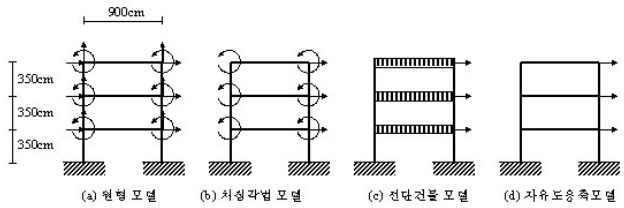
다자유도 구조물의 지진해석을 수행하기 위하여 여러 가지의 해석 모델을 사용할 수가 있다. 지진해석을 위한 해석모델에 대해서 설명하기 위하여 〈그림 2.1〉과 같은 3층 2차원 건물을 예제구조물로 사용하기로 한다. 예제구조물의 각 층의 질량은 17.55ton이며 모든 층에 대하여 표 2.1에서 보는 바와 같은 부재를 사용하였다.



〈그림 2.1〉 예제구조물

〈표 2.1〉 부재 단면성질

부재	단면(cm)	A(cm <sup>2</sup> )	I(cm <sup>4</sup> )
보	TIMES	Ab=2400	Ib=720000
기둥	TIMES	Ac=3600	Ic=1080000



〈그림 2.2〉 해석모델에 대한 자유도

#### 가) 원형 모델

이 구조물은 여섯 개의 절점이 자유롭게 움직일 수 있으므로 〈그림 3.1.2(a)〉에서 보는 바와 같이 18개의 자유도를 가지게 된다. 이 경우에 예제구조물의 보와 기둥의 단면특성이 표 2.2에 나타나 있는 바와 같이 원래의 값을 가진다. 일반적으로 구조물의 해석에는 이러한 모델이 주로 사용된다.

#### 나) 처짐각법 모델

일반적으로 건축구조물에서 횡력에 의하여 발생하는 절점들의 변위는 주로 부재의 휨변형에 의한 것이며 축변형이나 전단변형에 의한 변위는 무시할 정도로 작다. 따라서 구조물의 변형을 생각할 때에 축변형을 무시하면 〈그림 2.2(b)〉에서 보는 바와 같이 각 절점의 회전과 각 층의 수평변위를 고려하여 9개의 자유도를 가지는 해석모델을 얻을 수 있다. 고전적 해석방법인 처짐각법은 이러한 모델을 사용하여 자유도의 수를 줄임으로써 해석에 사용되는 연립방정식의 미지수를 최소화하고 있다. 이 모델을 작성할 때에 가정한 내용(부재의 축변형과 전단변형이 구조물의 변위에 미치는 영향을 무시할 수 있다는 것)이 근사적으로 합당할 경우에는 이 모델을 사용하면 상당히 정확한 해석결과를 얻을 수가 있다. 이 경우에 예제구조물의 보와 기둥의 단면적은 표 2.2에서 보는 바와 같이 무한히 큰 것으로 간주된다.

#### 다) 전단건물 모델

이러한 구조물에 대하여 자유도를 더욱 줄이는 방법으로 〈그림 2.2(c)〉에서 보는 전단건물 모델(shear building model)을 생각할 수가 있다. 이 모델은 처짐각법 모델보다 자유도를 더 줄이기 위하여 보를 강체로 가정하고 기둥의 축변형을 무시함으로써 절점의 회전을 구속하고 각 층의 수평변위만 남기는 방법을 사용한다. 따라서 구조물은 층수만큼의 자유도만 가지게 되며 이 예제구조물의 경우에는 자유도가 3이 된다. 앞에서 소개한 처짐각법 모델은 대부분의 경우에 매우 정확한 해석결과를 주는데 반하여 이 전단건물 모델은 해석결과가 상당히 부정확하게 된다. 그럼에도 불구하고 수많은 구조동력학 교과서에서 이 모델을 사용하는 이유는 다음과 같다. 첫째, 해석에

필요한 자유도가 최소화되므로 강성행렬의 구성과 해석이 간단할 뿐만 아니라 동력학 이론을 설명하기에도 편리하다는 점이다. 둘째, 구조물의 수평강성을 과대평가하더라도 동력학 이론을 설명하는 데는 아무런 문제가 없다는 것이다. 따라서 여기서도 이 모델을 사용하여 여러 가지의 이론들을 설명하기로 한다. 그러나 실무 구조기술자가 실제 구조물의 동적해석에 이 모델을 사용하면 해석 결과에 심각한 영향을 미칠 가능성이 있음을 항상 기억해야 할 것이다.

라) 응축 모델

위에서 사용한 세 가지의 해석모델 이외에도 유한요소법에 정통한 전문가들이 즐겨 사용하는 모델이 또 한 가지가 있다. 이 모델은 구조물의 해석에 사용되는 평형방정식의 미지수의 수를 줄이기 위하여 행렬응축(matrix condensation)을 수행하는 방법이다. 행렬응축을 통하여 응축모델(condensed model)을 구하는 과정에는 일반적으로 보의 축변형을 구속하여 각 층에 하나의 수평변위를 허용하도록 한다. 이러한 방법을 사용하면 <그림 2.2(d)>에서 보는 바와 같이 각 층별로 하나의 자유도를 가지는 모델을 얻게 된다. 따라서 해석에 사용되는 자유도의 수는 전단건물모델과 같지만 해석결과의 정확성은 월등히 우수하다.

<표 2.2> 여러 가지의 해석모델에 대한 단면성질

부재 종류	단면 성질	해석 모델			
		원형 모델	처짐각법 모델	전단건물 모델	응축 모델
보	A	Ab	INF	INF	INF
	I	Ib	Ib	INF	Ib
기둥	A	Ac	INF	INF	Ac
	I	Ic	Ic	Ic	Ic

2.2 진동수와 모드형상

단자유도 구조물의 무감쇠 자유진동을 나타내는 운동방정식을 다자유도 구조물에 대한 무감쇠 자유진동으로 확장하면 동적평형방정식을 다음과 같이 행렬식으로 나타낼 수 있다.

$$M\ddot{U} + KU = 0 \quad \text{<식 2.1>}$$

여기서  $U$ 는 구조물의 질량행렬이고  $K$ 는 강성행렬이며  $\dot{U}$ 는 변위벡터이고  $\ddot{U}$ 는 가속도벡터이다. 구조물이 진동하는 동안에 변위가 일정한 형상( $n$ 차 모드형상;  $\phi_n$ )를 유지한다고 가정할 때 다자유도 구조물의 자유진동은 구조물의  $n$ 차 모드의 진동을 의미하는데 다음의 <식 2.2>에서 보는 바와 같이 구조물의  $n$ 차 모드의 진동을 나타내는 모드좌표(modal coordinate)인  $q_n$  과 모드형상  $\phi_n$ 의 곱으로 나타낼 수 있다.

$$U_n = q_n \phi_n = (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) \phi_n \quad \text{<식 2.2>}$$

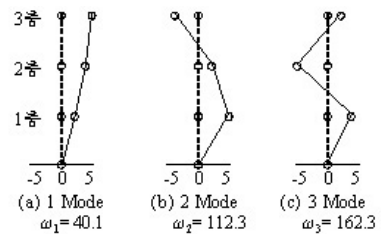
여기서  $q_n$ 은 시간에 따라서 변하는 진폭을 결정하고  $\phi_n$ 은 진동형상을 나타내며 시간에 따라서 변하지 않는다. 이것을 <식(2.1)>에 대입하여 고유치 방정식의 형태로 변환하면 <식 2.3>을 얻을 수 있다.

$$[K - \omega_n^2 M] \phi_n = 0 \quad \text{<식 2.3>}$$

위의 방정식에서  $\phi_n$ 이 0이 아닌 의미있는 해를 가지기 위해서는 다음의 조건을 만족시켜야 한다.

$$|K - \omega_n^2 M| = 0 \quad \text{<식 2.4>}$$

특성방정식(characteristic equation)으로 알려진 이 식을 풀면 자유도와 같은 수의 고유진동수( $\omega_n$ )를 얻게 된다. <식 2.4>를 풀어서 구하게 되는 구조물의 고유진동수를 <식 2.3>에 대입하면  $\phi_n$ 를 구할 수 있다. 그러나 <식 2.3>의 우변이 0이므로  $\phi_n$ 의 값을 구할 수는 없지만  $\phi_n$ 의 각 요소의 상대적인 비는 구할 수가 있다. 이와 같이 구조물의 진동할 때 변형형상을 나타내는  $\phi_n$ 를 모드형상(mode shape)이라고 부른다. 여러 개의 진동수 중에서 값이 가장 작은 경우가 1차 진동 모드이며 1차 모드의 진동수  $\omega_1$ 에 대응하는  $\phi_n$ 을 1차 모드형상이라고 한다. 예제구조물의 경우에는 전단건물 모델을 사용하여 구한 1차, 2차 및 3차 모드의 진동수가 각각 40.1, 112.3 및 162.3 rad/sec이며 모드형상을 그림으로 나타내면 아래에서 보는 바와 같다.



<그림 2.3> 3층 전단건물의 고유모드형상

2.3 모드의 직교성 (orthogonality)

앞에서 설명한 방법으로 구한 모드형상은 여러 가지의 특수한 성질을 가지고 있다. 그 중에서도 가장 중요한 것이 모드의 직교성이다. 질량행렬이나 강성행렬의 앞에  $n$ 번째 모드형상의 전치행렬( $\phi_n^T$ )을 곱하고 뒤에는  $r$ 번째 모드형상( $\phi_r$ )을 곱하면 다음 식들에서 보는 바와 같이  $n \neq r$ 인 경우에는 0이 되고  $n = r$ 인 경우에는 0이 아닌 값을 가지게 된다.



$$\begin{aligned}
 n \neq r \text{ 이면 } & \phi_n^T \mathbf{M} \phi_r = 0 && \text{이면 } \langle \text{식 2.5a} \rangle \\
 n = r \text{ 이면 } & \phi_n^T \mathbf{M} \phi_r = M_n && \text{이면 } \langle \text{식 2.5b} \rangle \\
 n \neq r \text{ 이면 } & \phi_n^T \mathbf{K} \phi_r = 0 && \text{이면 } \langle \text{식 2.5c} \rangle \\
 n = r \text{ 이면 } & && \text{이면 } \langle \text{식 2.5d} \rangle
 \end{aligned}$$

이와 같이 구조물의 각 고유모드는 질량행렬과 강성행렬에 대하여 서로 직교성(orthogonality)을 가지고 있으므로 이것을 이용하여 다음에서 설명하는 방법으로 각 모드의 진동을 분리시켜서 쉽게 산정할 수 있다.

### 2.4 모드중첩법

조화하중  $p \sin \omega t$  가 가해지는 경우에 다자유도 구조물에 대한 동적 평형방정식을 행렬식의 형태로 나타내면 <식 2.6>과 같다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{p} \sin \omega t \quad \langle \text{식 2.6} \rangle$$

이 식의 각 항의 앞에  $\Phi^T$  를 곱하고 좌변의 각 항에서  $\ddot{\mathbf{U}}, \dot{\mathbf{U}}$  및  $\mathbf{U}$  의 앞에  $\Phi\Phi^{-1}$  를 곱하면 다음과 같이 된다.

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{U}} + \Phi^T \mathbf{C} \Phi \dot{\mathbf{U}} + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{U} = \Phi^T \mathbf{p} \sin \omega t \quad \langle \text{식 2.7} \rangle$$

모드의 직교성을 이용하면 <식 2.8>과 같이 대각행렬  $\mathbf{m}, \mathbf{c}$  및  $\mathbf{k}$  와 벡터  $\mathbf{p}^*$  를 얻을 수 있으며 좌변 각 항의 가속도, 속도 및 변위 벡터를 <식 3.9>에서 보는 바와 같이 모드좌표벡터  $\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}$  및 <식 2.8>로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{m} = \Phi^T \mathbf{M} \Phi \quad \mathbf{c} = \Phi^T \mathbf{C} \Phi \quad \mathbf{k} = \Phi^T \mathbf{K} \Phi \quad \mathbf{p}^* = \Phi^T \mathbf{p} \\
 \ddot{\mathbf{q}} = \Phi^{-1} \ddot{\mathbf{U}} \quad \dot{\mathbf{q}} = \Phi^{-1} \dot{\mathbf{U}} \quad \mathbf{q} = \Phi^{-1} \mathbf{U} \quad \langle \text{식 2.8} \rangle
 \end{aligned}$$

$$\langle \text{식 2.9} \rangle$$

이러한 관계를 이용하여 <식 2.7>을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{k}\mathbf{q} = \mathbf{p}^* \sin \omega t \quad \langle \text{식 2.10} \rangle$$

이 식에서  $\mathbf{m}, \mathbf{c}$  및  $\mathbf{k}$  가 대각행렬이므로 <식 2.11>과 같이 N개의 독립된 다자유도 자유진동방정식으로 분리(uncouple)하여 생각할 수 있다.

$$m_i \ddot{q}_i + c_i \dot{q}_i + k_i q_i = p_i^* \sin \omega t \quad \langle \text{식 2.11} \rangle$$

여기서  $m_i, c_i$  및  $k_i$  는 대각행렬  $\mathbf{m}, \mathbf{c}$  및  $\mathbf{k}$  의 i번째 대각요소이

며  $p_i$  는  $\mathbf{p}^*$  벡터의 i번째 요소이다.

이와 같이 모드의 직교성을 이용하여 다자유도 구조물의 운동방정식을 각 모드의 운동방정식으로 분리하면 <식 2.6>과 같은 연립미분방정식을 <식 2.11>과 같이 분리할 수 있다. <식 2.11>을 구할 수 있는 번째 모드 진동에 의한 모드좌표(  $q_i$ ,  $\dot{q}_i$  및  $\ddot{q}_i$  )에 모드형상을 곱하여 <식 2.12a>에서 보는 바와 같이 구할 수 있는 모드별 응답  $\mathbf{U}$  을 <식 2.12b>에서 보는 바와 같이 모두 더하면 구조물의 응답(  $\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}$  및  $\ddot{\mathbf{U}}$  )을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}_i = \phi_i q_i \quad \dot{\mathbf{U}}_i = \phi_i \dot{q}_i \quad \ddot{\mathbf{U}}_i = \phi_i \ddot{q}_i \\
 \mathbf{U} = \sum_{i=1}^N \phi_i q_i = \Phi \mathbf{q} \quad \dot{\mathbf{U}} = \sum_{i=1}^N \phi_i \dot{q}_i = \Phi \dot{\mathbf{q}} \quad \ddot{\mathbf{U}} = \sum_{i=1}^N \phi_i \ddot{q}_i = \Phi \ddot{\mathbf{q}} \quad \langle \text{식 2.12a} \rangle \\
 \langle \text{식 2.12b} \rangle
 \end{aligned}$$

구조물의 변위응답을 구하기 위하여 <식 2.6>과 같은 동적평형방정식을 개의 미분방정식으로 분리시킨 <식 2.11>을 풀어서 구하게 되는 다자유도 구조물의 응답을 구하기 위해서는 초기조건이 필요하다. 그러므로 다자유도 구조물의 초기조건을 각 모드에 대하여 다자유도 구조물의 초기조건의 형태로 변환할 필요가 있다. <식 2.9>를 사용하면 다자유도 구조물의 초기조건을 다음과 같이 모드좌표로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{q}(0) = \Phi^{-1} \mathbf{U}(0) \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \Phi^{-1} \dot{\mathbf{U}}(0) \quad \langle \text{식 2.13} \rangle$$

$$\mathbf{q}(0) \quad \dot{\mathbf{q}}(0) \quad \mathbf{U} \quad \dot{\mathbf{U}}$$

여기서  $\mathbf{q}(0)$  와  $\dot{\mathbf{q}}(0)$  는 초기변위(  $\mathbf{U}(0)$  )와  $\mathbf{U}(0)$  속도  $\dot{\mathbf{U}}(0)$  )에 대응하는 모드좌표의 초기변위와 초기속도이며  $\mathbf{U}$  와  $\dot{\mathbf{U}}$  를 i차 모드방정식에 대한 초기변위와 초기속도로 사용한다.

## 3 응답스펙트럼해석법

### 3.1 내진설계를 위한 지진해석

내진설계를 위하여 구조물의 지진해석을 수행하게 되는데 이때 흔히 사용되는 해석법을 다음과 같이 등가정적해석법, 응답스펙트럼해석법 및 시간이력해석법의 세 가지로 나누어 생각할 수 있다.

가) 등가정적해석법(equivalent lateral force procedure; ELFP)

지진의 영향을 나타낼 수 있는 등가의 정적하중을 먼저 산정하고 이에 대하여 정적해석을 수행함으로써 구조물 각부의 응력을 구하여 내진설계에 반영하는 방법을 등가정적해석법이라 한다. 이 방법은 세 가지의 해석법 중에서 가장 정확성이 떨어지기 때문에 간단한 구조물

이나 정형구조물에 주로 사용이 되며 부정확성을 감안하여 해석에 사용되는 지진하중을 안전측이 되도록 약간 과대평가하는 경향이 있다. 이 방법에 관한 배경이 되는 동적해석 이론에 관해서는 4장에서 자세히 다루도록 한다.

나) 응답스펙트럼해석법(response spectrum analysis; RSA)

응답스펙트럼해석법은 구조동력학의 이론에 근거하여 구조물의 동적거동을 근사적으로 알아내는 방법인데 이 장에서 설명할 주된 내용이다. 이 방법은 구조물의 동적거동의 최대치를 구하기 위하여 사용되는데 내진설계에는 지진에 의하여 구조물에 발생하게 되는 변위나 응력의 최대치가 필요하게 되므로 구조물의 내진설계에서 동적해석 방법으로 흔히 사용되고 있다.

다) 시간이력해석법(time history analysis; THA)

지진하중을 받는 경우에 발생하게 될 구조물 응답의 시간에 따른 변화를 응답의 시간이력이라 하며 지진응답의 시간이력을 자세히 알아내기 위하여 사용되는 방법을 시간이력해석법이라 한다. 모드중첩법과 직접적분법이 시간이력해석법의 대표적인 방법인데 모드중첩법은 선형해석을 가장 정확하게 수행할 수 있는 방법인 반면에 직접적분법을 사용하면 선형해석은 물론이고 비선형해석도 가능하다. 그러나 이러한 방법들을 사용하기 위해서는 앞으로 발생하여 대상 구조물에 영향을 미치게 될 지진에 의한 지반가속도에 관한 자료를 필요로 하기 때문에 사용하기에 상당히 번거로운 뿐만 아니라 해석시간이 많이 소요되는 단점이 있어서 꼭 필요한 경우에만 제한적으로 사용된다. 그러므로 여기서는 응답스펙트럼해석법에 대해서 집중적으로 설명하기로 한다.

3.2 응답스펙트럼해석법의 원리

앞의 2.4에서 소개한 모드중첩법은 각 모드의 응답을 그대로 더하여 모든 모드의 영향에 의한 구조물의 응답을 알아내는 방법이다. 따라서 이 방법을 사용하면 해석의 대상이 되는 모든 시간 범위에 대하여 구조물의 동적응답 즉 응답의 시간이력을 알아 낼 수가 있다. 그러나 실제의 내진설계에 있어서는 응답의 시간이력보다는 응답의 최대치를 필요로 하는 경우가 대부분이다. 이러한 내진설계에서의 필요성을 충족시키기 위하여 개발된 방법이 응답스펙트럼해석법인데 이 방법을 설명하기 위하여 필요한 경우에는 <그림 2.1>에서 보는 3층 구조물을 예로 들어서 여러 가지의 계산과정을 설명하기로 한다. 지진에 의한 지반가속도가  $\ddot{u}_g$ 인 지진의 영향을 받는 다자유도 구조물에 대한 동적 평형방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = -M1\ddot{u}_g \tag{식 3.1}$$

여기서  $U$ 는 모든 항이 1인 벡터이다. 이 전단건물 모델은 수평방향으로 3개의 자유도를 가지므로  $U$ 의 모든 항이 1이지만 일반적으로는 지반운동과 같은 방향을 가지는 자유도에 대해서는 1이고 그 이외의 자유도에 대해서는 0인 벡터이다. <식 2.12>의 관계를 <식 3.1>에 대입하면 다자유도 구조물의 동적평형방정식은 <식 3.2>와 같은 형태로 바뀌게 된다.

$$M\Phi\ddot{q} + C\Phi\dot{q} + K\Phi q = -M1\ddot{u}_g \tag{식 3.2}$$

$\Phi^T$

그리고 이 식의 각 항 앞에 모드행렬의 전치행렬( )을 곱하면 <식 3.3a>를 얻을 수 있으며 여기에 앞의 2.3에서 설명한 모드의 직교성을 적용하면 다음의 <식 3.3b>와 같이 나타낼 수 있다.

$$\Phi^T M \Phi \ddot{q} + \Phi^T C \Phi \dot{q} + \Phi^T K \Phi q = -\Phi^T M 1 \ddot{u}_g$$

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = -m^* \ddot{u}_g \tag{식 3.3a}$$

$$\tag{식 3.3b}$$

여기서  $m, c$  및  $k$ 는 모드좌표계에서  $\Phi^T M 1$ , 감쇠 및 강성행렬인데 모드의 직교성에 의하여 대각행렬이고  $m^*$ 는 인 벡터이므로 <식 3.3b>는 자유도와 같은 수의 서로 독립된 식임을 알 수 있다. 그 중에서 번째의 식은 다음과 같이 나타내는데 이것은 번째 모드에 대한 동적평형방정식이다.

$$m_i \ddot{q}_i + c_i \dot{q}_i + k_i q_i = -m_i^* \ddot{u}_g \tag{식 3.4}$$

여기서  $m_i, c_i$  및  $k_i$ 는 각각  $m, c$  및  $k$ 의  $i$ 번째 대각요소인  $m_i = \Phi^T M \Phi$ ,  $c_i = \Phi^T C \Phi$ ,  $k_i = \Phi^T K \Phi$  이고  $m^*$  벡터의  $i$ 번째 요소인  $m_i^* = \Phi^T M 1$  이다. 일반적으로 질량행렬은 집중행렬(lumped mass)의 형식으로 구성되는데 이러한 질량행렬은 대각행렬이므로  $m_i$ 와  $m_i^*$ 를 다음과 같이 쉽게 구할

$$m_i = \sum_{j=1}^N \phi_{ji}^2 M_{jj} \quad m_i^* = \sum_{j=1}^N \phi_{ji} M_{jj} \tag{식 3.5}$$

이와 같이 모드의 직교성을 이용하면 <식 3.1>과 같은 연립미분방정식으로 나타나는 다자유도 구조물의 운동방정식을 <식 3.4>와 같이 서로 독립된 미분방정식으로 각 모드의 운동방정식을 분리할 수 있게 된다. 그리고 <식 3.4>의  $m_i, c_i$  및  $k_i$ 를 사용하여 진동주기와

$$T_i = 2\pi\sqrt{\frac{m_i}{k_i}} \quad \zeta_i = \frac{c_i}{2m_i\omega_i} \quad \text{[제 3.6]}$$

(식 3.6)

그러므로 (식 3.4)의 해를 구하기 위해서는 변위 진동모드와 동일한 진동수( $\omega_i$ )와 감쇠비( $\zeta_i$ )를 가지는 등가의 단자유도 구조물에 대한 응답을 구하면 될 것이다. 따라서 응답스펙트럼해석법에서는 각각의 진동모드에 대하여 등가의 단자유도모델을 설정하고 이것들의 응답을 구한 후에 그 결과를 조합하는 방법을 사용하고 있다.

### 3.3 모드 참여계수, 모드 유효질량 및 질량참여율

위에서 구한 (식 3.4)는 그 형태가 단자유도 구조물의 지진응답을 구하기 위한 동적평형방정식인 (식 1.5)와 매우 유사하기 때문에 이것을 단자유도 구조물의 질량( $m_i$ ), 감쇠계수( $c_i$ ) 이고 강성계수가( $k_i$ )인 경우와 대비하여 생각할 수가 있다. 그러나 (식 1.5)에서는 좌변의 첫째항과 우변에 같은  $\ddot{u}_g$  을 사용하고 있지만 (식 3.4)에서는 이들이 각각  $m_i$  과  $m_i^*$  으로 서로 다른 점이 (식 1.5)과는 차이가 나고 할 수가 있다. (식 3.4)의 양변을  $m_i$  로 나누면 다음의 (식 3.7)과 같이  $\ddot{q}_i + 2\zeta\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2q_i = -\frac{m_i^*}{m_i}\ddot{u}_g$

$$\zeta \quad \Gamma_i \quad \text{(식 3.7)}$$

여기서( $\zeta_i$ )와  $w_i$ 는 감쇠율과 각진동수이며 우변에서 지반가속도 앞에  $\Gamma_i = m_i^*/m_i$  같이 된다.

$$\ddot{q}_i + 2\zeta\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2q_i = -\Gamma_i\ddot{u}_g \quad \text{(식 3.8)}$$

(식 3.9)

이제 (식 3.9)과 (식 1.6)을 비교해 보면 좌변은 같은 것을 알 수 있다. 그러나 (식 3.9)의 우변은  $\ddot{u}_g$  임에 비해서 (식 3.9)의 우변에는 지반가속도 앞에  $\Gamma_i$  가 곱해져 있다. 그러므로 (식 3.9)은 (식 1.6)에 비하여  $\Gamma_i$  로 조정된 지반가속도를 입력하였을 경우에 대한 동적평형방정식이라고 할 수가 있다. 따라서 이러한  $\Gamma_i$ 에 대해서는 해당 지반가속도를 가하여 구할 수 있는 구조물의 응답에 배를 하면 원하는 응답을 얻을 수가 있게 될 것이다. 그러므로  $\Gamma_i$  를 모드 참여계수(modal participation factor)라 부른다.

예제구조물에 대하여 (식 3.9)를 사용하여 구한 모드별 참여계수는 표 3.1에서 보는 바와 같다. 이 표에서 볼 수 있듯이 첫 번째 진동모드에 관한 참여계수가 가장 크고 고차 진동모드에 대한 참여계수

는 점차 작아짐을 알 수가 있다. 따라서 많은  $\phi$ 술자들은 이 모드참여계수가 클수록 해당모드의 영향이 큰 것으로 생각하는 경향이 있는데 이것은 큰 착각이다. 왜냐하면 모드형상( $\phi_i$ )은 임의로 정규화(normalize)할 수 있으므로 모드 참여계수는 정규화의 정도에 따라서 달라질 수가 있기 때문이다. 예를 들면 원래의 모드형상에 표 3.1의 모드참여계수를 곱하여 정규화된 모드형상을 구한 후에 이 새로운 모드형상을 사용하여 모드참여계수를 다시 구하면 이번에는 표 3.2에서 보는 바와 같이 모든 모드에 대하여 1.0이 된다. 이와 같이 모드참여계수는 모드형상을 어떻게 정규화하느냐에 따라서 달라질 수 있는 값

〈표 3.1〉 예제구조물의 모드별 참여계수

층	모드		
	1	2	3
3	1.000	-0.802	-0.445
2	0.802	0.445	1.000
1	0.445	1.000	-0.802
모드참여계수	1.220	0.349	-0.134

〈표 3.2〉 예제구조물의 정규화된 모드형상

층	모드		
	1	2	3
3	1.220	-0.280	0.060
2	0.979	0.155	-0.134
1	0.543	0.349	0.108
모드참여계수	1.000	1.000	1.000

이므로 동적해석 과정에서 입력지반가속도를 조정하기 위하여 사용되는 계수일 뿐이며 이것의 값이 가지는 특별한 물리적인 의미는 없다.

각 모드가 구조물의 동적거동에 미치는 영향을 나타내기 위한 인자로 모드 유효질량(effective modal mass)을 생각할 수가 있다. 자유도가  $n$  개인 구조물에 대한 변위 벡터  $\mathbf{u}$  이 주어지면 (식 3.10)과

$$M_i^* = \frac{(\sum_{j=1}^n \phi_{ji} M_{jj})^2}{\sum_{j=1}^n \phi_{ji}^2 M_{jj}} \quad \text{(식 3.10)}$$

각 모드별로 유효질량을 산출한 것이 표 3.3에 나타나 있는데 저차

〈표 3.3〉 예제구조물의 모드 유효질량과 질량참여율

모드	모드 유효질량		질량참여율	
	$M_i^*$	누계	$\Gamma_{Mi}$	누계
1	48.126	48.126	0.914	0.914
2	3.942	55.068	0.075	0.989
3	0.581	55.649	0.011	1.000

모드의 유효질량이 더 크을 알 수가 있다. 그리고 각 모드  $\Gamma_i$  유효질량을 모두 더하면 구조물의 전체 질량이 된다. 그러므로 각 모드의 유효질량을 구조물의 전체 질량으로 나누면 질량참여율 ( : mass participation ratio)을 얻을 수 있으며 모든 모드에 대하여 질량참여율을 더하면 1.0이 된다.

$$\langle \text{식 3.11} \rangle$$

### 3.4 모드별 최대응답의 산정

위에서 설명한 바와 같이 <식 3.8>은 지반가속도에 모드참여계수를 곱한 것을 입력 지반가속도로 생각할 때의 단자유도 구조물에 대한 동적평형방정식이다. 따라서  $i$ 번째 모드의 응답을 구하기 위해서는 지반가속도를 해당 모드참여계수로 조정하고 등가 단자유도구조물의 지진 응답을 구하면 되는 것을 알 수가 있다. 그러나 응답스펙트럼해석법에서는 구조물의 최대 지진응답을 구하는데 목적이 있으므로 1.4에서 소개한 방법을 응용하여 모드별 최대 지진응답을 구한다.

먼저  $i$ 번째 모드의 최대응답을 구하기 위해서 응답스펙트럼으로부터 모드의 진동주기와 감쇠비에 상응하는 가속도 값을 읽는다. 여기서는 <그림 1.7>에서 보는 El Centro 지진에 대한 5% 가속도응답스펙트럼을 사용하기로 한다. 예제 전단건물 모델에 대하여 각 모드의 고유 진동주기에 해당하는 최대가속도를 응답스펙트럼에서 읽으면 표 3.4와 같다. 이것은 El Centro 지진에 의하여 해당 진동주기를 가지는 단자유도 구조물에서 발생할 것으로 예상되는 최대가속도이다. 그러나 <식 3.8>에서 보는 바와 같이 모드응답은 모드참여계수로 조정한 입력지진에 의한 응답이어야 하므로 응답스펙트럼에서 읽은 최대가속도에 모드참여계수를 곱하면 구조물에서 발생할 최대가속도를 얻게 된다. 예제 구조물에 대하여 가속도 응답스펙트럼으로부터 읽은 각 모드별 최대 가속도는 550, 470 및 380cm/sec<sup>2</sup>이며

<표 3.4> 모드별 진동주기와 최대가속도

모드	진동주기 (초)	모드참여계수 ( $\Gamma_i$ )	최대가속도(cm/sec <sup>2</sup> )	
			조정전 ( $A_i/\Gamma_i$ )	조정전 ( $A_i$ )
1	0.157	1.220	550	671.0
2	0.056	0.349	470	164.0
3	0.039	-0.134	380	-50.9

이것에 모드참여계수를 곱하면 표 3.4에서 보는 바와 같이 조정된 최대가속도를 얻게 된다.

변위 응답스펙트럼을 사용하면 직접 모드별 최대변위를 구할 수 있지만 일반적으로 가속도 응답스펙트럼을 주로 사용하므로 <식 1.9c>를 사용하여 각 모드의 최대가속도로부터 다음과 같이 모드 최대변위를 구할 수가 있다  $D_i = \frac{A_i}{(2\pi/T_i)^2}$

이와 같이 구한 모드별 최대변위를 이용하여  $\vec{q}_i$ 과  $\vec{q}_i$ 들의  $q_i$ 대변위를 구하게 된다. 구조물의 동적해석에서 구조물의 응답은 <식 2.12a>에서 보는 바와 같이 모드형상에 모드좌표응답( , 및 )을 곱하면 구할 수 있으므로 예제구조물에 대해서  $i$ 번째 모드의 영향에 의한 최대  $\mathbf{U}_i = \{u_{1i}, u_{2i}, \dots, u_{Ni}\}^T = \phi_i D_i$

$$\langle \text{식 3.12} \rangle$$

### 3.5 모드별 최대 응답의 조합

앞에서 구한 각 모드의 영향을 받은 구조물의 변위성분은 각 모드의 응답이 최대가 될 경우에 발생하게 되는데 모든 모드의 응답이 동시에 최대에 도달한다면 다음과 같이 각 모드별로 구한 변위의 절대치를 더하면 구조물의 최대변위를 구할 수가 있다. 그러나 실제로는 모든 모드의 최대 응답이 동시에 발생할 가능성은 극히 낮다. 따라서 모드별 최대응답을 조합하기 위하여 이보다 더 합리적인 방법이 필요하다. 이러한 목적으로 흔히 사용되는 조합법은 SRSS(the Square Root of the Sum of Squares) 조합법이다. 이 방법은 구조물 응답의 각 모드별 영향을 제곱하여 모두 합한 다음에 이의 제곱근을 구하는 방법이다.

예제구조물과 같은 3층의 경우에는 SRSS 조합법으로 최대변위를 구하기 위해

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{u_{11}^2 + u_{12}^2 + u_{13}^2} \\ \sqrt{u_{21}^2 + u_{22}^2 + u_{23}^2} \\ \sqrt{u_{31}^2 + u_{32}^2 + u_{33}^2} \end{Bmatrix}$$

$$\langle \text{식 3.13} \rangle$$

이와 같이 각 모드의 영향을 조합하여 구조물의 최대응답을 구하는데 한 가지 주의하여야 할 일은 각각의 응답을 직접 조합하여야 한다는 것이다. 예를 들면 부재의 휨모멘트나 전단력을 구하기 위해서는 각 모드가 이들에 미치는 영향을 직접 조합하여 구하여야 한다. 만약에 휨모멘트를 먼저 구한 다음에 이를 이용하여 전단력을 구하면 합당하지 못한 결과를 얻게 되므로 특히 주의하여야 한다.

응답스펙트럼해석법에서 SRSS 조합법이 가장 많이 사용되지만 이 방법은 경우에 따라서는 합당하지 못한 결과를 주는 수가 있다. 특히 두개 이상의 주요 모드에 대한 진동수(또는 진동주기)가 서로 비슷한 경우에는 응답을 과소평가하는 문제가 있는 것이 알려져 있다. 이러한 경우에는 CQC(Complete Quadratic Combination) 조합법을 사용



하면 그 결과가 좀 더 나아질 수가 있다. 정형인 고층건물인 경우에는 각 모드별 진동주기가 분명히 구분이 되므로 SRSS 조합법을 사용하여도 별다른 무리가 없지만 비정형 건물에 대해서는 인접한 주요모드의 진동주기가 충분히 차이가 나는지를 반드시 확인하여야 한다.

### 3.6 조합에 사용되어야 할 모드의 수

해석에 사용될 모드의 수가 많을수록 해석결과가 정확하지만 실제로는 일부의 모드만을 사용하여 해석하는 것이 효과적이다. 현대 내진설계 기술을 혁신적으로 개선한 ATC 3-06에서는 각 해석 방향에 대하여 최소한 다음에서 정하는 이상의 의 모드를 사용하도록 요구하고 있다.

- 적어도 3개의 모드 (2층 이하의 건물에 대해서는 층수만큼의 모드)
- 진동주기가 0.4초 이상인 모든 모드

그러나 이보다 더 합리적인 것은 동력학 이론에 근거하여 사용되는 모드의 유효질량의 합이 전체질량의 90% 이상이 되는 수의 모드를 사용하는 것이다. 일반적인 고층건물이라면 10층 정도의 건물은 3개, 20층 정도의 건물은 4개, 30층 정도의 건물은 5개 정도의 모드를 사용하면 질량참여율의 합이 0.9를 넘게 되는 것으로 예상할 수 있다.

## 원 고 모 집

「건축구조」는 회원여러분의 참여를 기다리고 있습니다. 보내주신 원고는 소중히 생각하겠습니다. 회원여러분의 많은 협조 부탁드립니다.

### ■원고구분

- ① 신기술·신공법, 구조시스템 소개
- ② 구조기술관련 법규신설 및 제도변경, 기술소식
- ③ 일반소식, 학회소식, 칼럼, 참관기
- ④ 용어해설, 문예마당, 회원동정

### ■제출내용 및 형식

- ① 원고원본 및 원고저장 디스켓, 저자 사진
- ② 원고제출시 성명, 소속기관, 직위, 연락처 표시
- ③ 한글, MS워드로 작성(분량 제한 없음)

### ■제출처

서울시 강남구 역삼동 635-4 한국과학기술회관 신관 1010호 TEL : (02)566-4711 / FAX : (02)566-4729  
E-mail: ksea@ksea.or.kr