



복합진자 모형의 뉴턴·오일러 알고리즘 비교

Comparison of Newton's and Euler's Algorithm in a Compound Pendulum

하종규* (한국체육대학교)

Hah, Chong-Ku (Korea National Sport University)

ABSTRACT

C. K. HAH, Comparison of Newton's and Euler's Algorithm in a Compound Pendulum. Korean Journal of Sports Biomechanics, 2006, Vol. 16, No. 3, pp. 1-7, 2006. The Primary type of swinging motion in human movement is that which is characteristic of a pendulum. The two types of pendulums are identified as simple and compound. A simple pendulum consist of a small body suspended by a relatively long cord. Its total mass is contained within the bob. The cord is not considered to have mass. A compound pendulum, on the other hand, is any pendulum such as the human body swinging by hands from a horizontal bar. Therefore a compound pendulum depicts important motions that are harmonic, periodic, and oscillatory. In this paper one discusses and compares two algorithms of Newton's method ($F = m a$) and Euler's method ($M = I \times \alpha$) in compound pendulum. Through exercise model such as human body with weight ($m = 50$ kg), body length ($L = 1.5$ m), and center of gravity ($L_c = 0.4119L$) from proximal end swinging by hands from a horizontal bar, one finds kinematic variables (angle displacement / velocity / acceleration), and simulates kinematic variables by changing body lengths and body mass. BSP by Clauser et al. (1969) & Chandler et al. (1975) is used to find moment of inertia of the compound pendulum. The radius of gyration about center of gravity (CoG) is $k_c = K_c \times L$ (단, k_c = radius of gyration, K_c = radius of gyration / segment length), and then moment of inertia about center of gravity (CoG) becomes $I_c = m k_c^2$. Finally, moment of inertia about Z-axis by parallel theorem becomes $I_o = I_c + m k^2$. The two-order ordinary differential equations of models are solved by ND function of numeric analysis method in Mathematica 5.1. The results are as follows; First, The complexity of Newton's method is much more complex than that of Euler's method. Second, one could be find kinematic variables according to changing body lengths ($L = 1.3 / 1.7$ m) and periods are increased by body length increment ($L = 1.3 / 1.5 / 1.7$ m). Third, one could be find that periods are not changing by means of changing mass ($m = 50 / 55 / 60$ kg). Conclusively, one is intended to meditate the possibility of applying a compound pendulum to sports (balling, golf, gymnastics and so on) necessary swinging motions. Further improvements to the study could be to apply Euler's method to real motions and one would be able to develop the simulator.

KEYWORDS: ALGORITHM, SIMULATION, COMPOUND PENDULUM

I. 서론

인간 움직임에서 스윙동작은 기본적으로 진자운동의 특성을 가지고 있다. 진자 운동의 종류에는 단진자 운동과 복합진자 운동이 있다. 단진자 운동(simple pendulum)은 체조의 링과 같이 질량을 무시할 수 있는 줄에 매달린 선수의 스윙동작과 같은 운동이다. 반면 복합진자(compound pendulum) 운동은 선수가 철봉에 매달려 손에 의해서 수행되는 스윙동작이다(Barham, 1978). 인체의 스윙국면은 주로 힘 생성국면을 이루므로 골프, 볼링, 체조 등의 중요국면이다. 운동역학 분야에서 진자운동을 적용한 연구들은 Milburn (1982)이 골프의 다운스윙 국면에서 상완과 클럽을 이중진자 모형으로 적용하였다. 최근 Hiley & Yeadon (2003, 2005)은 인체를 4분절 진자운동으로 모형화하여 몸굽혀 휘돌기 동작(scooped swing) 시 신체회전각(whole body rotation angle), 바의 변위(bar displacement)와 릴리스 속도를 시뮬레이션하여 실험치와 모델치 간의 차이를 1.2° , 0.014 m 와 2%수준까지 의사 최적화하였다. 또한, 지금까지 시도된 바가 없는 3회전 몸뚱이 공중돌기 내리기 동작(triple straight somersault dismount)에 관한 가능성을 시뮬레이션하여 이론적으로 가능함을 제시하였다. 하종규(2006)는 스포츠 종목 중 단·이중진자운동으로 기술할 수 있는 동작을 라그랑지 방법으로

모델링하여 시뮬레이션의 가능성을 제시하였다.

여러 운동종목에 적용 가능한 복합진자 운동을 실제 동작에 적용하기 위해 체계적이고 구체적인 이해가 필요하다. 이에 정해진 모형에서 뉴턴 방법과 오일러 방법으로 모델링하는 알고리즘을 비교하고, 수치해석법을 사용하여 이제 상미분방정식의 해와 운동학적 종속변인(각변위, 각속도, 각가속도)의 결과를 도출하고자 한다. 또한, 신장(L)과 질량(m)에 대한 시뮬레이션의 가능성을 제시할 것이다.

II. 연구 방법

1. 모형화

모형은 질량(50kg), 신장(1.5m)인 사람(total body)이 철봉에 매달려 스윙(진자 운동)하는 동작으로 무게중심은 Clauser et al(1969) & Chander et al(1975)의 BSP인 신장 근위의 41.19%에 위치한다고 가정한다. <그림 1>은 상기 모형의 자유 물체도로서 질량(m), 신체길이(L)과 관절(O)에서 무게중심까지의 거리($L_c = 0.4119L$)인 단일분절 강체시스템이다. 시상면(xy-plane)에서 자유도 1인 일반화좌표(θ)의 운동으로 x축은 수평축(I), y축은 수직축(J), z축은 회전축(K)인 직교좌표축(오른손 좌표계)이다. 또한 추가적으로 임의의 좌표축인 물체 고정

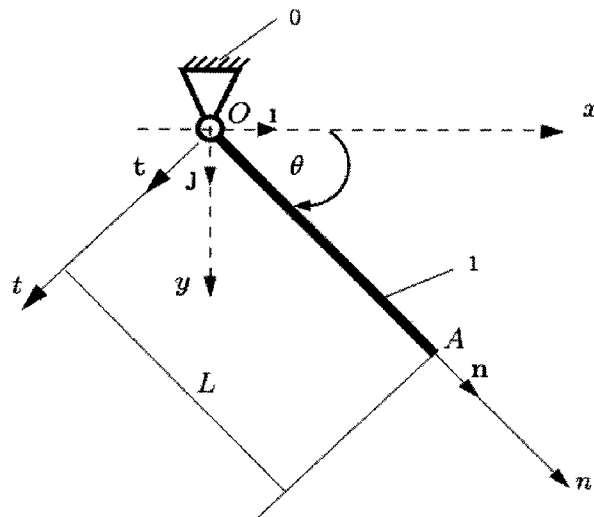


그림 1. 자유 물체도 1

좌표축(body-fixed coordinate axes)의 유용성을 보이기 위하여 단위벡터(t, n)를 사용하였다. 이 모형에서 철봉의 수평축과 사람이 이루는 각변위, 각속도, 각가속도를 구하고자 한다.

1) 모형의 가정

- (1) 각 분절은 항상 일정한 질량을 가지고, 질량중심에 위치한 점질량으로 간주한다.
- (2) 각 분절의 무게중심 위치는 운동 중 변하지 않는다.
- (3) 각 분절의 질량중심점(근/원 위단)에 대한 관성모멘트는 운동 중 변하지 않는다.
- (4) 각 분절의 길이는 운동 중에도 변하지 않는다.
- (5) 관절의 형태는 핀조인트로 간주하며 관절의 마찰력은 무시한다.
- (6) 각 분절에 작용하는 공기 저항력은 무시한다.

2 알고리즘

<그림 2>는 뉴턴 알고리즘의 모델링을 위하여 자유물체도1에서 분력(F_x, F_y)만을 분리하여 표시한 것이다. <그림 3>은 오일러 알고리즘과 물체 고정좌표계를 나타내는 자유물체도이다. 알고리즘은 프로그램의 편의를 위하여 Mathematica5.0 언어 형식을 이용하여 나타낸 것이다.

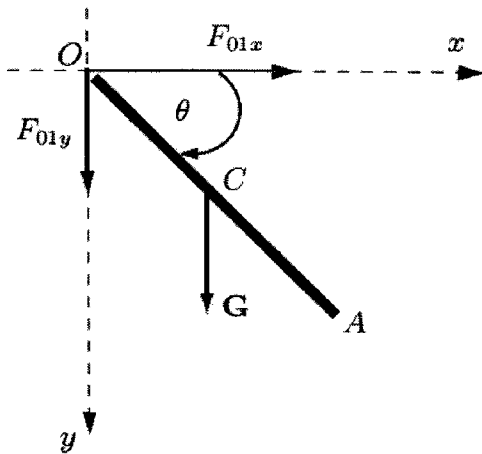


그림 2. 자유 물체도 2

1) 뉴턴 알고리즘

뉴턴 알고리즘의 절차는 다음과 같다.

(1) 강체의 각속도(angular velocity of RB)

각속도는 일반화 좌표 θ 의 미분으로 성분 표시하면 $\omega = \text{omega}[t] = \{ 0, 0, \text{theta}'[t] \}$ 이다.

(2) 강체의 각가속도(angular acceleration of RB)

각가속도는 일반화 좌표 θ 를 2계 미분한 것으로 성분 표시하면 $\alpha = \text{alpha}[t] = \{ 0, 0, \text{theta}''[t] \}$ 이다.

(3) 위치벡터(position vector of C)

관절(O)에서 무게중심까지의 변위(rc)를 L의 비로 표시하면 $rc = 0.4119L$ 이고 x성분은 $xc = 0.4119L * \text{Cos}[\text{theta}[t]]$, y성분은 $yc = 0.4119L * \text{Sin}[\text{theta}[t]]$ 이고 성분으로 표시하면 $rc = \{ xc, yc, 0 \}$ 이다.

(4) 무게중심의 속도와 가속도(velocity and acceleration of c)

rc 를 시간(t)로 미분하면 속도 즉, $vc = d(rc)/dt$ 이고 이것을 메쓰메티카 언어로 표시하면 $vc = D[rc, t]$ 이고 vc 를 시간(t)로 미분하면 가속도 $ac = d(vc)/dt$ 이며 메쓰메티카 언어로 표시하면 $ac = D[vc, t]$ 이다.

(5) 물체 고정좌표축을 이용한 무게중심의 속도와 가

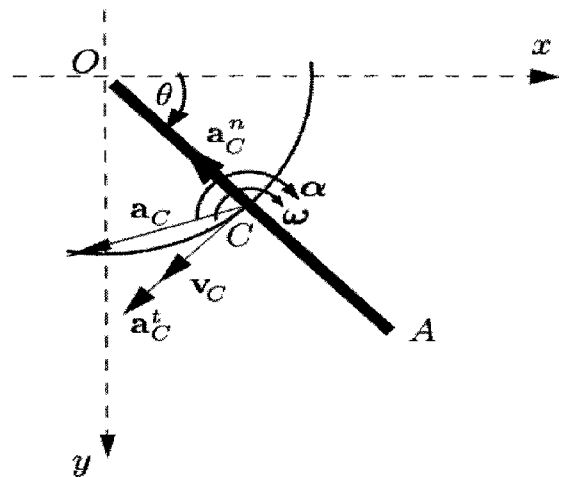


그림 3. 자유물체도 3

속도(body-fixed coordinate axes way of calculating vc and ac)

<그림 1>과 같이 물체 고정좌표축의 단위벡터는 $t, n, n \times t = k$ 이고 무게중심의 속도, $vc = \text{Cross}[\omega[t], rc]$ 는 강체의 각속도와 위치벡터의 외적이다. 무게중심의 가속도, $ac = \text{Cross}[\alpha[t], rc] - \omega[t] \cdot \omega[t] * rc$ 는 각속도와 위치벡터의 외적에서 각속도의 제곱(내적)과 위치벡터의 곱을 뺀 것이다. (4)의 결과와 동일하나 미분과정이 필요치 않으므로 경우에 따라서 매우 편리하다.

(6) 힘(Forces)

관절(O)에서의 반작용력(reaction forces at pin joint)은 $F_o = \{ F_{ox}, F_{oy}, 0 \}$ 이다. $G = \{ 0, m g, 0 \}$ 는 무게중심 C에서의 중력의 성분 표시이다. 관절(O)에서의 z축 관성 모멘트는 Clauser et al.(1969)와 Chandler et al.(1975)이 제시한 신체분절 파라메타(BSP)를 이용한다. 무게중심에서의 회전반경은 $k_c = K_c \times L$ (단, $k_c = \text{radius of gyration}$, $K_c = \text{radius of gyration / segment length}$)이고 무게중심에서의 관성모멘트는 $I_c = m k_c^2$ 이며 관절(O)에서의 관성 모멘트는 평행축 이론에 의해서 $I_o = I_c + m k^2$ 가 된다.

(7) 힘 운동방정식(force equation)

무게중심에서의 힘 운동방정식은 $\sum F = m * ac = F_o + G$ 을 메쓰메티카 언어로 식을 정리하여 표현하면 $eq_{IF} = \text{Simplify}[m * ac - (F_o + G)]$ 이다. x축 사영 방정식은 $eq_{IF}[[1]] = 0$ 가 되고 해는 $solF_{ox} = \text{Solve}[eq_{IF}[[1]] = 0, F_{ox}][[1]]$ 이다. 해(solF_{ox})를 F_{ox} 대입하면 $F_x = F_{ox} / . solF_{ox}$ 가 된다. 그리고 y축 사영 방정식은 $eq_{IF}[[2]] = 0$ 으로 해는 $solF_{oy} = \text{Solve}[eq_{IF}[[2]] = 0, F_{oy}][[1]]$ 이고 F_{oy}에 대입하면 $F_y = F_{oy} / . solF_{oy}$ 이다. 또한 회전축 사영인 z축 사영 방정식은 $eq_{IM}[[3]] = \text{Simplify}[I_c * \alpha[t] - \text{Cross}[r_{co}, F_o]]$ 이고 $eq_{IM}[[3]]$ 에 $solF_{ox}$ 와 $solF_{oy}$ 를 대입하면 $solution_1 = \text{Solve}[(eq_{IM}[[3]] /. solF_{ox} /. solF_{oy}) == 0, \theta''[t]][[1]]$ 가 된다.

2) 오일러 알고리즘

오일러 알고리즘의 절차는 뉴턴 알고리즘의 (1) - (6) 단계는 동일한 절차이며 차이점은 다음 절차이다.

(1) - (6) : 뉴턴 알고리즘 절차와 동일.

(7) 모멘트 운동방정식(moment equation)

관절(O)에서의 모멘트 운동방정식은 $\sum M_o = I_o * \alpha = rc \times G$ 이므로 메쓰메티카 언어로 표현하면 $eq_2 = \text{Simplify}[I_o * \alpha[t] - \text{Cross}[r_o, G]]$ 가 된다. $solution_2 = \text{Solve}[eq_2 == 0, \theta''[t]][[1]]$ 는 각속도 ($\theta''[t]$)를 구하는 방정식이다.

III. 결과 및 논의

1. 알고리즘 비교

뉴턴·오일러 알고리즘을 사용한 모델(운동방정식)의 해는 $\theta''[t] = \frac{0.4119g \cos[\theta[t]]}{(0.169662 + K^2)L}$ 으로 동일해를 구하였다. 이 해(각가속도)를 적분하여 각속도와 각변위를 구할 수 있으며 또한 메쓰메티카의 수치해석 방법인 ND함수를 이용하여 구하는 것이 더 편리하다. 그리고 뉴턴 방법은 1-(7)과 같이 각 사영(x, y, z)의 힘 운동방정식을 필요로 하나 오일러 방법에서는 2-(7)과 같이 모멘트 운동방정식만으로 만족하므로 사용하기에 매우 간편하였다. 즉, 오일러 방법의 복잡도가 낮았다.

2. 신체길이(L)에 대한 패턴 비교

기저 상수 입력치인 $data = \{ m \rightarrow 50, L \rightarrow 1.3/1.5/1.7, g \rightarrow 9.8, L_c \rightarrow 0.4419L \}$ 을 대입한 방정식은 $meq = eq_2 / . data$ 가 된다. 이 미분방정식을 수치해석 방법으로 표현하면 $soldif = \text{NDSolve}[\{ meq == 0, \theta[0] == 0, \theta'[0] == 0 \}, \theta[t], \{ t, 0, 5/10 \}]$ 가 된다. 여기서 초기 입력치는 각변위, $\theta[0] = 0$ 와 각속도, $\theta'[0] = 0$ 로 하였으며 수행시간은 5/10초로 하였다. <그림 4>는 신체길이(L)이 1.3 m, 1.5 m, 및

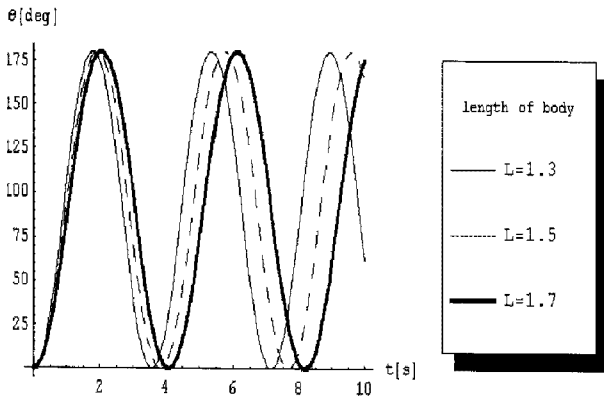


그림 4. 신체길이에 따른 사물레이션

1.7m로 시물레이션한 과정으로 신체길이가 커질수록 주기가 커짐을 알 수 있었다. 이것은 주기가 신체길이의 제곱근에 비례함을 잘 반영하고 있다.

3. 신체길이에 따른 운동학적 변위

<그림 5>는 질량($m = 50 \text{ kg}$)을 고정하고 신체길이 ($L = 1.5 \text{ m}$)으로 수행시간 5초 동안의 그래프로써 주기 3.8초를 나타내고 있다. 그리고 <그림 6, 7>은 각속도와 각가속도이다.

1) 각변위 패턴

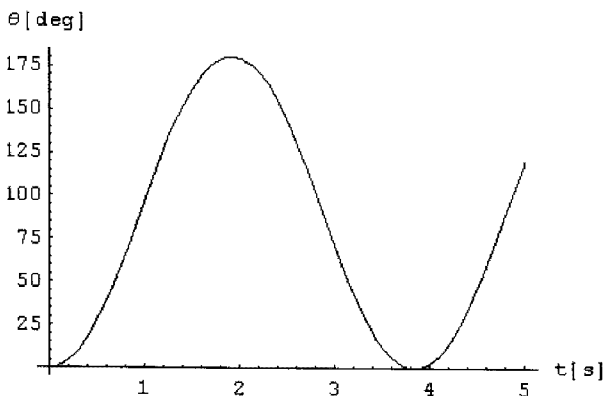


그림 5. 각변위($L = 1.5 \text{ m}$)

2) 각속도 패턴

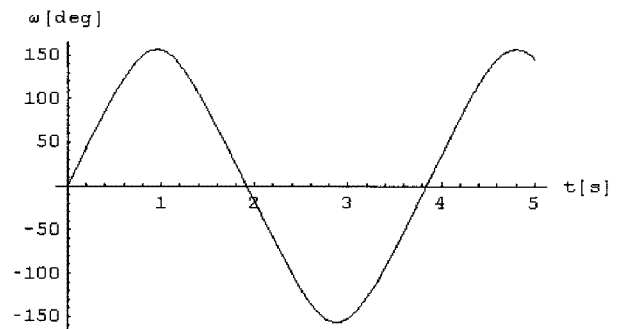


그림 6. 각속도($L = 1.5 \text{ m}$)

3) 각가속도 패턴

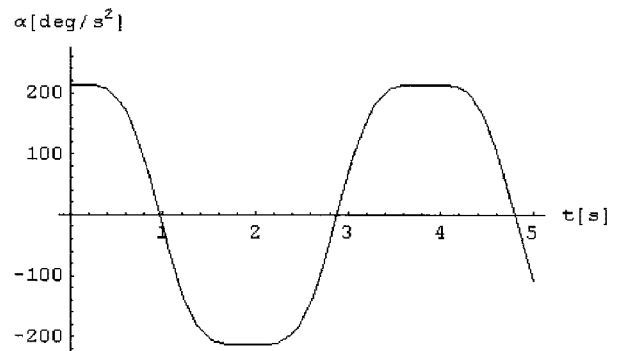


그림 7. 각가속도($L = 1.5 \text{ m}$)

<그림 8>는 질량($m = 50 \text{ kg}$)을 고정하고 신체길이 ($L = 1.7 \text{ m}$)으로 수행시간 5초 동안의 그래프로써 주기 4.2초를 나타내고 있다. 그리고 <그림 9, 10>은 각속도와 각가속도이다.

4) 각변위 패턴

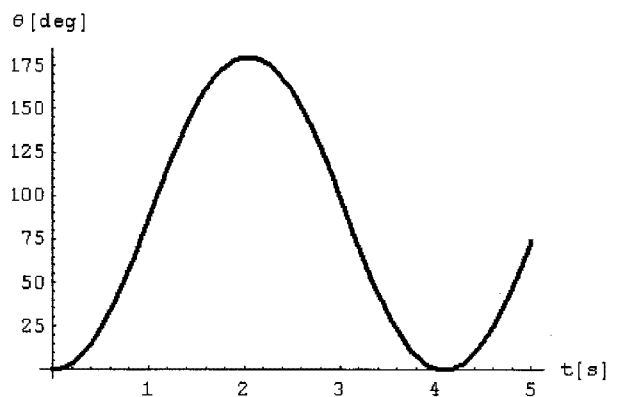


그림 8. 각변위($L = 1.7 \text{ m}$)

5) 각속도 패턴

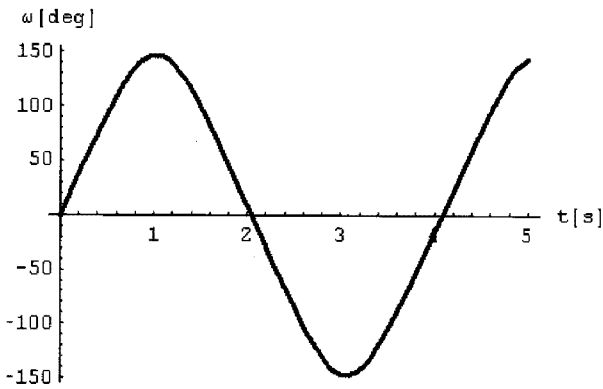


그림 9. 각속도(L = 1.7 m)

6) 각가속도 패턴

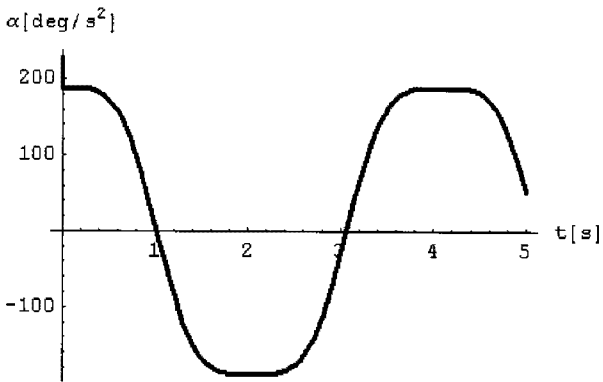


그림 10. 각가속도(L = 1.7 m)

4. 질량에 따른 운동학적 변위

<그림 11>은 신장(1.5 m)을 고정하고 수행시간 10초 동안 질량(m) = 50/ 55/ 60 kg으로 변화시킨 각변위의 그래프로써 질량에 관계없이 주기 3.8초를 나타내고 있다.

1) 각변위 패턴

복합진자 모형에 관한 이러한 운동방정식의 알고리즘을 골프의 퍼팅동작에 적용하면 실험과정을 거치지 않고 개인의 특성(신체조건 및 BSP등) 입력하여 운동학적 종속변인(각변위, 각속도, 각가속도)을 시뮬레이션 할 수 있다. 여러 종목의 특정동작에 관한 효율적인 운동방정식을 탐색하는 것은 매우 중요하고 할 수 있다.

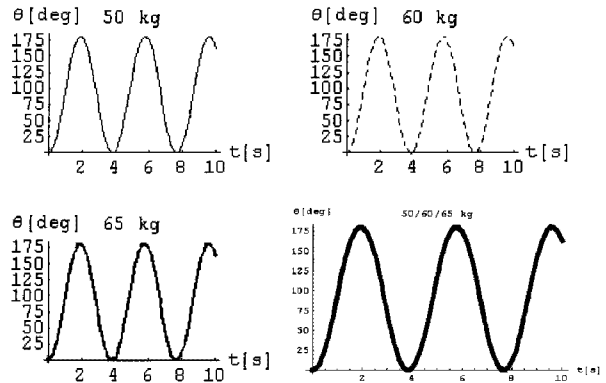


그림 11. 질량에 따른 각변위

IV. 결론 및 제언

복합진자 모형에 관한 운동학적 종속변인(각변위, 각속도, 각가속도)을 구하는 뉴턴·오일러 방법의 구체적 알고리즘을 제시하고 비교하였다. 복합진자 운동에 관한 운동학적 해석은 뉴턴 방법보다 오일러 방법이 복잡도가 낮아 실제 사용하기 용이함을 알 수 있었다. 복합진자운동에 오일러 운동방정식을 적용함으로써 운동학적 변인을 도출할 수 있는 시뮬레이션의 가능성을 제시하였다. 차후 연구로써 실제모형의 최적모형을 도출하여 시뮬레이터 개발에 적용하는 것은 매우 현실적으로 유용할 것이다.

참고 문헌

하종규(2006). 라그랑지 방법을 이용한 진자모형의 알고리즘. 한국체육학회지, 45(1), 781-787.
 Barham, J. N.(1978). Mechanical kinesiology. Saint Louse, The C.V. Mosby Company. pp.386-398.
 Hiley, M. J., & Yeadon, M. R.(2003). The margin for error when releasing the high bar for dismounts. *Journal of Biomechanics*, 36, 313-319.
 Hiley, M. J., & Yeadon, M. R.(2005). Maximal dismounts from high bar. *Journal of*

Biomechanics, 38, 2221- 2227.

Milburn, P. D. (1982). Summation of segmental velocities in the golf swing. *Medicine and Science in Sports and Exercise*, 14(1), 60-64.

투 고 일 : 2006. 7.30

심 사 일 : 2006. 8. 1

심사완료일 : 2006. 8.15