

행렬-스타그래프와 팬케익그래프, RFM그래프 사이의 임베딩 분석

이형옥^{*}, 전영국^{**}

요 약

행렬-스타그래프와 팬케익 및 RFM 그래프는 스타 그래프가 갖는 좋은 성질을 가지면서 하이퍼큐브보다 망 비용이 적은 값을 갖는 상호연결망이다. 행렬-스타그래프는 스타그래프를 기본 모듈로 하여 노드 대칭성, 최대고장허용도, 계층적분할 성질을 갖고 스타그래프보다 망비용이 개선된 상호연결망이다. 본 논문에서는 그래프의 에지 정의를 이용하여 행렬-스타그래프, 팬케익그래프, RFM그래프 사이의 임베딩 방법을 제시한다. 행렬-스타그래프 MS_{2n} 은 팬케익그래프 P_{2n} 에 연장을 4, 확장을 1, RFM_n 그래프는 팬케익그래프 P_n 에 연장을 2, 확장을 1, 그리고 행렬-스타그래프 MS_{2n} 을 RFM_{2n} 으로 평균연장을 3에 임베딩 가능성을 보인다.

Embedding Analysis Among the Matrix-star, Pancake, and RFM Graphs

Hyeongok Lee^{*}, Youngcook Jun^{**}

ABSTRACT

Matrix-star, Pancake, and RFM graphs have such a good property of Star graph and a lower network cost than Hypercube. Matrix-star graph has Star graph as a basic module and the node symmetry, the maximum fault tolerance, and the hierarchical decomposition property. Also it is an interconnection network that improves the network cost against Star graph. In this paper, we propose a method to embed among Matrix-star, Pancake, and RFM graphs using the edge definition of graphs. We prove that Matrix-star MS_{2n} can be embedded into Pancake P_{2n} with dilation 4, expansion 1, and RFM_n graphs can be embedded into Pancake P_n with dilation 2. Also, we show that Matrix-star MS_{2n} can be embedded into the RFM_{2n} with average dilation 3.

Key words: Interconnection Network(상호연결망), Embedding(임베딩), Dilation(연장율)

1. 서 론

최근 반도체 기술의 발달과 높은 성능을 요구하는 응용분야의 증대로 고성능 컴퓨터에 대한 관심이 증대하고 있다. 고성능을 얻기 위한 방법으로 병렬처리에 대한 필요성이 크게 증가하여 병렬컴퓨터에 대한 연구가 많이 진행되고 있다. 병렬컴퓨터는 크게 공유 기억 장치를 갖는 다중프로세서(multiprocessor) 시

스템과 분산 기억장치를 사용하는 다중컴퓨터(multicomputer) 시스템으로 분류한다. 다중컴퓨터 시스템은 각각의 프로세서들이 자신의 기억 장치를 갖고 각 프로세서는 상호연결망에 의해 연결되어 있으며 프로세서간의 통신은 상호 연결망을 통하여 메시지 전송방식으로 이루어진다[1-4]. 다중컴퓨터에서 상호연결망은 전체 시스템의 성능과 시스템의 확장성에 큰 영향을 미친다. 지금까지 널리 알려진 상호연

※ 교신저자(Corresponding Author) : 이형옥, 주소 : 전남 순천시 매곡동 315번지(540-742), 전화 : 061)750-3345, FAX : 061)750-3308, E-mail : oklee@sunchon.ac.kr
접수일 : 2006년 2월 9일, 완료일 : 2006년 6월 7일

^{*} 정회원, 순천대학교 사범대학 컴퓨터교육과

^{**} 순천대학교 컴퓨터교육과 부교수
(E-mail: ycjun@sunchon.ac.kr)

※본 연구는 학술진흥원(지역대학 우수과학자)(R-05-2004-000-11771-0)지원으로 수행되었음

결망으로 메쉬, 하이퍼큐브, 스타그래프 등이 있다.

메쉬 구조는 상수개의 분지수를 갖고 본 논문에서는 스타그래프 부류로 알려진 행렬-스타(matrix-star)그래프, 팬케익(pancake)그래프, 그리고 RFM 그래프 사이의 임베딩을 분석한다. 논문의 구성은 2장에서 본 연구에서 적용되는 그래프의 정의, 종류 및 성질을 그래프 이론 관점에서 알아보고, 3장에서 임베딩 방법과 연장율을 분석하고, 마지막으로 결론을 맺는다.

2. 상호연결망

2.1 상호연결망의 정의와 망 척도

상호연결망은 각 프로세서를 노드로 프로세서들 간의 통신 채널을 에지로 나타내는 무방향 그래프 $G=(V,E)$ 로 표현된다. 여기서 $V(G)$ 는 노드들의 집합 즉 $V(G)=\{0,1,2,\dots,N-1\}$ 이고, $E(G)$ 는 에지의 집합으로써 $V(G)$ 내의 임의의 두 노드 v 와 w 의 쌍 (v,w) 으로서 에지 (v,w) 가 존재할 필요충분조건은 노드 v 와 w 사이에 통신 채널이 존재하는 것이다[1]. 지금까지 제안된 상호연결망을 노드 수를 중심으로 분류하면 $n \times k$ 개 노드를 갖는 메쉬 부류, 2개 노드를 갖는 하이퍼큐브 부류[1,5,7,8], $n!$ 개 노드를 갖는 스타그래프 부류[]로 나눌 수 있다. 상호연결망을 평가하는 망 척도는 분지수(degree), 지름(diameter), 대칭성(symmetry), 확장성(scalability), 고장허용도(fault tolerance), 임베딩(embedding) 등이 있다.

상호연결망의 임베딩은 어떤 그래프 G 가 다른 그래프 H 에 포함 혹은 어떻게 연관되어 있는지를 알아보기 위해 그래프들간의 관계를 분석하기 위한 평가 척도이다. 그래프 G 가 다른 그래프 H 에 적은 비용으로 임베딩 가능하다는 것은 연결망 G 에서 개발된 알고리즘을 연결망 H 에서 적은 비용으로 효율적으로 이용할 수 있기 때문에 상호연결망의 임베딩 평가의 의미가 있다[5,6].

2.2 상호연결망의 종류

스타그래프는 하이퍼큐브와 비슷한 노드 개수를 가질 때 상대적으로 적은 노드 개수와 짧은 지름을 갖는 장점이 있지만 노드 개수 증가율이 급격하고 하이퍼큐브 부류와 임베딩이 어려운 단점이 있다[6,

8]. 스타(star)그래프[9,10] 부류는 팬케익(pancake) 그래프[2,10-12], Rotator그래프[13], Faber-Moore 그래프[14,15], 매크로-스타(macro-star)그래프[16], 행렬-스타(matrix-star)그래프[17,18], RFM그래프[14] 등이 제안되었다.

n -차원 스타그래프 S_n 은 $n!$ 개의 노드와 $n!(n-1)/2$ 개의 에지로 구성된다. 각 노드의 주소는 n 개의 서로 다른 심볼의 순열로 표현될 수 있고, 노드 v 와 w 의 순열에서 첫 번째 심볼과 나머지 $n-1$ 개 심볼 중 한 개의 심볼이 교환된 순열을 갖는 노드 v 와 w 사이에 에지가 존재한다. n 개의 서로 다른 집합 $\langle N \rangle = \{1, 2, \dots, n\}$ 이라 하고, $\langle N \rangle$ 의 순열 $S = s_1s_2 \dots s_i \dots s_n$, $s_i \in \langle N \rangle$ 이라 하면, 스타그래프 S_n 은 다음과 같이 정의된다[6,9,10].

$$V(S_n) = \{(s_1s_2 \dots s_i \dots s_n) \mid s_i \in \langle n \rangle, i \neq j, s_i \neq s_j\}$$

$$E(S_n) = \{(s_1s_2 \dots s_i \dots s_n)(s_1s_2 \dots s_1 \dots s_n) \mid (s_1s_2 \dots s_i \dots s_n) \in V(S_n), 2 \leq i \leq n\}$$

n 개의 심볼로 구성된 어떤 순열과 그 순열의 첫 번째 자리와 i 번째 자리를 바꾼 순열 사이에 에지가 있으므로 스타그래프 S_n 은 분지수가 $n-1$ 인 정규 그래프이다($2 \leq i \leq n$). (그림 1)은 4-차원 스타그래프의 예이다. 스타그래프 S_n 은 $n-1$ 가지 방법으로 n 개의 노드 중복 없는 S_{n-1} 으로 분할 가능한 재귀적 구조를 갖고 있다. 스타그래프 S_n 의 지름은 $\lfloor 3(n-1)/2 \rfloor$ 이고, 노드간 평균 거리는 $n+2/n+H_n-4$ 을 갖고, 노드 대칭 및 에지 대칭적이고 이분 그래프(bipartite graph)이고, 최대고장 허용도 성질이 있음이 알려졌다(단, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$) [9]. 스타그래프 S_n 은 해밀턴싸이클을 포함할 뿐만 아니라 임의의 에지를 지나는 해밀턴싸이클이 존재하지만, 길이가 4인 싸이클을 포함하지 않기 때문에 어떠한 종류의 메쉬나 하이퍼큐브도 부그래프로 갖지 않는다[6].

n -차원 팬케익그래프 P_n 은 $n!$ 개의 노드와 $n!(n-1)/2$ 개의 에지로 구성되고 노드 대칭성을 갖는다. 각 노드 주소는 n 개의 서로 다른 심볼의 순열로 표현될 수 있고, 노드 v 와 연결된 w 의 비트 스트링은 노드 v 의 순열에서 두 번째 심볼부터 n 번째 심볼이 역순으로 교환된 순열을 갖는 노드 v 와 w 사이에 에지가 존재한다. n 개의 서로 다른 집합 $\langle N \rangle = \{1, 2, \dots, n\}$ 이라 하고, $\langle N \rangle$ 의 순열 $P = p_1p_2 \dots p_i \dots p_n$, $p_i \in \langle N \rangle$ 이라 하면 팬케익그래프 P_n 은 다음과 같이 정의된다[2,10-12].

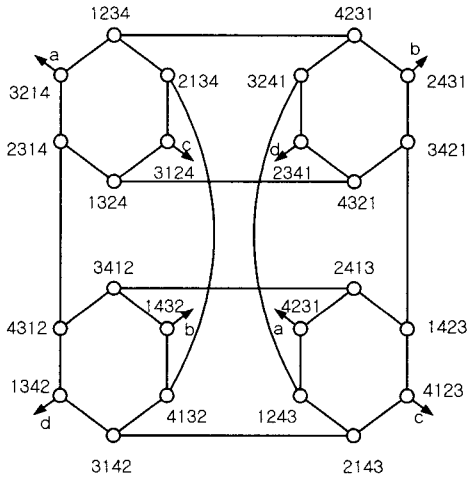


그림 1. 4 차원 스타 그래프

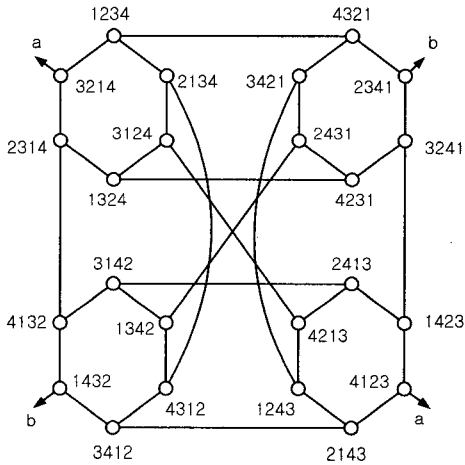


그림 2. 4 차원 팬케익 그래프

$$V(P_n) = \{(p_1 p_2 \dots p_i \dots p_j \dots p_n) \mid \{p_i, p_j\} \in \langle N \rangle, i \neq j, p_i \neq p_j\}$$

$$E(P_n) = \{(p_1 p_2 \dots p_i \dots p_n)(p_i p_{i-1} p_{i-2} \dots p_2 p_1 p_{i+1} p_{i+2} \dots p_n) \mid (p_1 p_2 \dots p_i \dots p_n) \in V(P_n), 2 \leq i \leq n\}$$

팬케익그래프의 노드 $P=(p_1 p_2 \dots p_i \dots p_n)$ 와 i -차원에 지에 의해 인접한 노드를 P^i 라 하고, 노드 P^i 의 순열은 $p_i p_{i-1} p_{i-2} \dots p_2 p_1 p_{i+1} p_{i+2} \dots p_n$ 이다. 팬케익그래프 P_n 은 해밀턴 싸이클을 포함하지만, 4-차원 이상의 팬케익 그래프는 길이가 홀수인 싸이클이 존재하기 때문에 이분 그래프가 아님이 알려져 있고, 전위합 문제, 정렬(sorting)과 합병(merging) 알고리즘에 대한 연구 결과가 있다[12]. 또한 팬케익그래프에서 지름[2], 병

렬 라우팅과 정렬 알고리즘[11], 임베딩[12], 부하균 등 문제[4] 등이 발표되었다.

n -차원 Rotator-Faber-Moore(이하 RFM_n)그래프는 n 개 심볼 $\{1,2,3,\dots,n\}$ 의 순열로 노드를 나타내고, 노드간의 연결 관계는 방향그래프인 Rotator 그래프와 Faber-Moore 그래프의 에지 발생기 즉, 차원에지를 함께 적용하여 에지를 정의하고 있다[14]. Rotator 그래프의 차원에지 R^i 는 $(123\dots i\dots n) \rightarrow (23\dots i1\dots n)$, $2 \leq i \leq n$ 이고, Faber-Moore 그래프의 차원에지 F^j 는 $(123\dots j-1jj+1\dots n) \rightarrow (j123\dots j-1j+1\dots n)$, $2 \leq j \leq n$ 이다. n 개의 서로 다른 집합 $\langle N \rangle = \{1,2,\dots,n\}$ 이라 하고, $\langle N \rangle$ 의 순열 $r_1 r_2 \dots r_i \dots r_n$, $r_i \in \langle N \rangle$ 이라 하면 RFM_n 그래프는 다음과 같이 정의된다[13,15].

$$V(RFM_n) = \{(r_1 r_2 \dots r_i \dots r_n) \mid r_i \in \langle N \rangle, i \neq j, r_i \neq r_j\}$$

$$E(RFM_n) = \{R^i, F^j\}$$

$$R^i : \{(r_1 r_2 \dots r_i \dots r_n)(r_2 p_3 p_4 \dots r_i r_1 \dots r_n) \mid (r_1 r_2 \dots r_i \dots r_n) \in V(RFM_n), 2 \leq i \leq n\}$$

$$F^j : \{(r_1 r_2 \dots r_j-1 r_j r_{j+1} \dots r_n)(r_j r_1 r_2 \dots r_j-1 r_{j+1} \dots r_n) \mid (r_1 r_2 \dots r_j-1 r_j r_{j+1} \dots r_n) \in V(RFM_n), 2 \leq j \leq n\}$$

RFM_n 그래프는 $n!$ 개의 노드 개수를 갖고, 분지수가 $2n-3$ 이고 노드 대칭적인 정규연결망임이 알려졌다. RFM_n 그래프의 지름은 $n-1$ 이고, 최대고장허용도를 갖고, 노드 중복하지 않는 싸이클이 존재하고, 일-대-다 방송 알고리즘이 제시되었다. 또한 임베딩에 있어서는 스타그래프 S_n 을 RFM_n 그래프에 연장을 2, 버블정렬그래프 B_n 를 RFM_n 그래프에 연장을

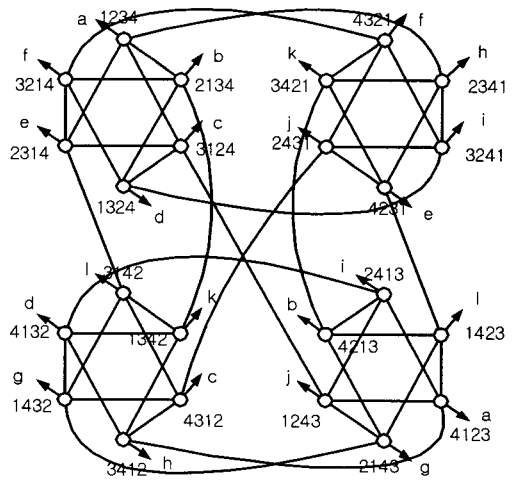


그림 3. 4 차원 RFM그래프

2, 2차원 토러스 $n \times (n-1)!$ 을 RFM_n 그래프에 연장을 2로 사상 가능함을 보였다[14]. 논문 [14]에서 스타 그래프와 버블정렬 그래프를 RFM_n 그래프로 임베딩 방법은 스타 그래프의 한 에지를 RFM_n 그래프의 2개 에지 즉, R^i, F^j 를 이용하여 표현하였으며, 토러스 구조를 RFM_n 그래프에 임베딩한 방법은 토러스의 노드 주소를 그레이 코드(gray code)로 표현하고, 그레이 코드 시퀀스의 특성인 연속한 주소가 한 비트 다른 성질을 이용하여 임베딩 하였다.

행렬-스타 그래프 $MS_{2,n}$ 은 $2n$ 개의 심볼 $1, 2, 3, \dots, 2n$ 으로 구성된 2행 n 열의 행렬 $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_j & \dots & x_{2n} \end{bmatrix}$ 형태로 노드가 표현되고, 노드를 연결하는 에지는 다음과 같은 행렬로 표현된 노드 사이에 연결 관계를 갖는다[17,18].

- (1) 1행 1열의 원소와 1행 i 열의 원소가 교환된 행렬

$$\begin{bmatrix} x_i & x_2 & \dots & x_1 & \dots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_j & \dots & x_{2n} \end{bmatrix}$$

- (2) 1행과 2행의 원소가 교환된 행렬

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_j & \dots & x_{2n} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_n \end{bmatrix}$$

- (3) 1열에 있는 원소 x_1 과 x_{n+1} 이 교환된 행렬

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ x_1 & x_{n+2} & \dots & x_j & \dots & x_{2n} \end{bmatrix}$$

행렬-스타 그래프 $MS_{2,n}$ 의 정의에 의해 에지는 3개로 분류하여 (1)의 조건에 의해 정의되는 에지를 C_i , ($2 \leq i \leq n$), (2)의 조건에 의해 정의되는 에지를 E , 그리고 (3)의 조건에 의해 정의되는 에지를 R 이라 한다. 위의 정의에 의해 행렬-스타 그래프 $MS_{2,n}$ 은 $2n$ 개의 심볼로 표현할 수 있는 순열의 개수만큼 행렬을 생성할 수 있으므로 $(2n)!$ 개의 노드로 구성되고, 각 노드의 분지수는 $n+1$ 인 정규 연결망이다($n \geq 2$). 단, $n=1$ 인 행렬-스타 그래프 $MS_{2,1}$ 은 위의 정의에서 조건 (2)과 (3)가 동일하므로 분지수는 1이고, 두 개의 노드로 구성된 K_2 그래프이다. (그림 4)는 노드가 2행 2열의 행렬로 표현되는 행렬-스타 그래프 $MS_{2,2}$ 의 예이다. 행렬-스타 그래프 $MS_{2,n}$ 의 노드는 $2n$ 개 원소를 갖는 2행 n 열의 행렬로 표현하므로 본 논문에서는 노드와 행렬을 같은 개념으로 사용한다. 그리고 노드의 주소를 나타내는 $2 \times n$ 은 노드를 표현하는 행렬이 2행 n 열을 의미한다. 행렬-스타 그래프와 스타(star) 그래프, 버블정렬(bubblesort) 그래프, 전치(transposition) 그래프의 임베딩 결과는 [18]에 있다.

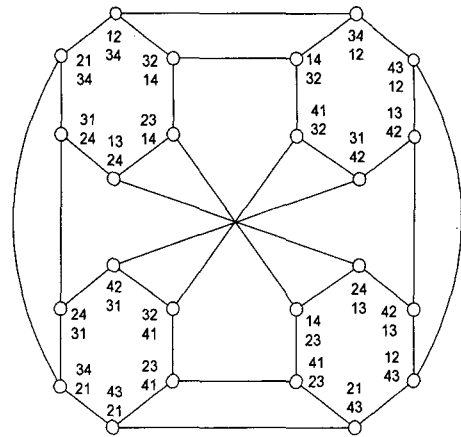


그림 4. 2 차원 행렬-스타 그래프

표 1. 그래프의 망 척도 비교

종류	노드 개수	분지수	지름	망 비용
행렬-스타 그래프 $MS_{2,n}$	$(2n)!$	$n+1$	$3.5n+2$	$\approx 3.5n^2$
펜케익 그래프 P_{2n}	$(2n)!$	$2n-1$	$3n+3$	$\approx 6n^2$
RFM_{2n}	$(2n)!$	$4n-3$	$2n-1$	$\approx 8n^2$

3. 임베딩 분석

그래프의 임베딩(embedding)은 어떤 그래프 G 가 다른 그래프 H 구조에 포함 혹은 어떻게 연관되어 있는지를 알아보기 위해 어떤 특정한 그래프를 다른 그래프에 사상(mapping)하는 것이다. 그래프 G 의 그래프 H 에 대한 임베딩 f 는 다음과 같이 정의되는 함수의 쌍 (θ, ρ) 을 말한다. θ 는 G 의 정점 집합 $V(G)$ 를 H 의 정점 집합 $V(H)$ 에 대응시키는 함수이고, ρ 는 G 의 에지 $e=(v,w)$ 에서 $\theta(v)$ 와 $\theta(w)$ 를 잇는 H 상의 경로로 대응시키는 함수이다. 임베딩의 비용을 나타내는 척도는 연장율(dilation), 밀집율(congestion), 확장율(expansion)이 사용되고 있다. 그래프 G 의 에지 e 의 연장율은 H 상에서의 경로 $\rho(e)$ 의 길이를 말하고, 임베딩 f 의 연장율은 G 의 모든 에지의 연장율 중 최대값이다. 그래프 H 의 에지 e' 의 밀집율은 e' 에 포함되는 $\rho(e)$ 의 개수를 말하고, 임베딩 f 의 밀집율은 H 의 모든 에지의 밀집율 중 최대값이다. 임베딩 f 의 확장율은 G 의 정점의 개수에 대한 H 의 정점의 개수의 비를 말한다. 예를 들어 (그림 5)에서 그래프 G_1 를 그래프 G_2 로 동일한 노드 번호를 갖는 노드들로 사상

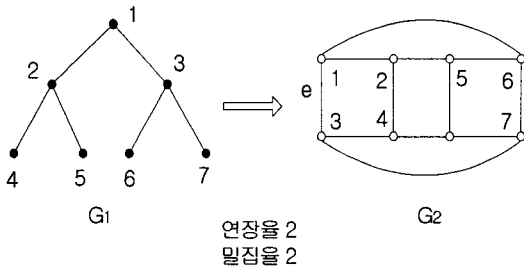


그림 5. 그래프 G_1 을 G_2 로 사상한 예제

하였다고 가정하자. 그래프 G_1 에서 노드 3과 6을 연결하는 에지를 그래프 G_2 에서 가장 짧은 경로로 사상하면 에지 $\{(3,1)$ 과 $(1,6)\}$ 또는 $\{(3,7)$ 과 $(7,6)\}$ 으로 사상되므로 연장율은 2이다. 이때 그래프 G_1 에서 노드 3과 6을 연결하는 에지가 그래프 G_2 에서 에지 $\{(3,1)$ 과 $(1,6)\}$ 으로 사상되었다고 가정할 때 임베딩의 밀집율은 그래프 G_2 에서 노드 1과 3을 연결하는 에지 e 를 그래프 G_1 의 2개의 에지 $(1,3)$ 과 $(3,6)$ 이 각각 경유하므로 밀집율이 2임을 알 수 있고, 확장율은 $8/7$ 임을 알 수 있다.

팬케익그래프 P_n 의 노드 $P(=p_1p_2\dots p_i\dots p_n)$ 에서 심볼 p_i 부터 첫 번째 심볼 p_1 까지 역순으로 생성된 순열 $p_i p_{i-1} p_{i-2} \dots p_1 p_{i+1} \dots p_n$ 을 연결하는 에지를 i -차원에지라 하고, 노드 P 와 i -차원에지에 의해 인접한 노드를 $P^i, 2 \leq i \leq n$ 으로 표현한다. 버블정렬그래프 B_n 의 노드 $B(=b_1 b_2 \dots b_i b_{i+1} \dots b_n)$ 에서 인접한 2개의 심볼 b_i 과 b_{i+1} 이 교환된 순열 $b_1 b_2 \dots b_{i-1} b_i \dots b_{i+1} \dots b_n$ 을 연결하는 에지를 i -차원에지라 하고, 노드 B 와 i -차원에지에 의해 인접한 노드를 $B^i, 1 \leq i \leq n-1$ 로 표현한다. 팬케익그래프 P_n 의 임의의 노드 $P(=p_1 p_2 \dots p_i \dots p_j \dots p_k \dots p_n)$ 에서 i -차원에지에 인접한 노드를 V 라 할 때, 노드 V 는 $P^i(P)$ 즉, $V=P^i(P)$ 로 표현한다. 또한, 노드 P 에서 팬케익그래프 P_n 의 차원에지 $\langle P^i, P^j, P^k \rangle$ 를 순차적으로 적용하여 도달한 노드를 V 라 할 때, 차원에지를 순차적으로 적용한다는 것은 노드 P 에서 다음과 같이 차원에지를 적용하여 노드 V 의 순열을 생성함을 의미한다. 첫 번째 단위시간에는 노드 P 에서 차원에지 P^i 에 의해 인접한 노드 $P^i(P)$ 의 순열 $p_i p_{i-1} p_{i-2} \dots p_2 p_1 p_{i+1} \dots p_j \dots p_k \dots p_n$ 을 생성함을 의미하고, 두 번째 단위시간에는 노드 $P^i(P)$ 에서 차원에지 P^j 에 인접한 노드 $P^j(P^i(P))$ 즉, 노드 $P^j(P^i(P))$ 의 순열은 $p_j p_{j-1} p_{j-2} \dots p_{i-1} p_i p_{i-2} \dots p_{i-2} p_{i-1} p_{i-1} p_{i-1} p_{i-2} \dots p_k \dots p_n$ 를 의미한다. 세 번째 단위시간에는 순열 $P^k(P^j(P^i(P)))$ 에서 차원에지 P^k

에 인접한 노드 $P^k(P^j(P^i(P)))$ 즉, 노드 $P^k(P^j(P^i(P)))$ 의 순열 $p_k p_{k-1} p_{k-2} \dots p_{j+2} p_{j+1} p_j \dots p_{j-2} p_{j-1} p_i p_{i-1} p_{i-2} \dots p_n$ 에 도달함을 의미하고, 노드 $V=P^k(P^j(P^i(P)))$ 이다. 이와 같이 노드 P 에 차원에지 P^i, P^j, P^k 를 순차적으로 적용하여 도달한 노드 $V=P^k(P^j(P^i(P)))$ 로 표현하고, 노드 $P^k(P^j(P^i(P)))$ 는 간단히 $P^k P^j P^i(P)$ 로 표기한다. 노드 P 에 순차적으로 적용된 차원에지를 차원에지 시퀀스 $\langle P^i, P^j, P^k \rangle$ 로 나타낸다. 위의 차원에지와 차원에지 시퀀스는 팬케익그래프 P_{2n} , 버블정렬그래프 B_{2n} , 그리고 행렬-스타그래프 MS_{2n} 에서 동일하게 적용된다.

본 연구에서 적용하는 임베딩의 기본 방법은 동일한 노드 개수를 갖는 상호연결망에 대해 다음과 같이 적용한다. 행렬-스타그래프 MS_{2n} 의 노드는 2행 n 열 형태로 표현되어 있고, 팬케익그래프 P_{2n} 와 버블정렬그래프 B_{2n} 은 1행 $2n$ 열 형태로 되어 있으므로 행렬-스타그래프 MS_{2n} 의 2행 n 열 형태의 노드를 1행 $2n$ 열 형태로 변환하여 표현한다. 노드의 행렬 변환방법은 2행 n 열의 행렬 $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_j & \dots & x_{2n} \end{bmatrix}$ 에서 1행 n 열의 원소 다음에 2행의 n 개 심볼 전체를 접합(concatenation)하는 방법을 적용한다. 또한, 그래프 간의 노드 사상은 동일한 주소를 갖는 노드로 일대일 사상한다. 사상할 그래프의 인접한 두 노드 (U, V) 를 연결하는 차원에지는 사상된 그래프의 에지 정의를 이용하여 $\partial(U)$ 와 $\partial(V)$ 를 연결하는 최단경로(shortest path)의 차원에지 시퀀스로 나타내고, 임베딩의 연장율은 차원에지 시퀀스의 개수로 나타낸다.

정리 1 행렬-스타그래프 MS_{2n} 은 팬케익그래프 P_{2n} 에 연장율 4, 확장율 1에 임베딩 가능하다.

증명 행렬-스타그래프 MS_{2n} 의 정의에 의해 노드 $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_j & \dots & x_{2n} \end{bmatrix}$ 에서 차원에지 C_i , 에지 R , 에지 E 에 의해 인접한 각각의 노드는 $C_i(X), R(X), E(X)$ 로 표현하고, 노드 X 와 인접한 노드를 노드 X' 라 하자. 팬케익그래프 P_{2n} 의 임의의 노드 P 의 순열을 $p_1 p_2 \dots p_i \dots p_n p_{n+1} \dots p_{n+i} \dots p_{2n}$ 이라 할 때, 노드 P 와 i -차원에지에 의해 인접한 노드 $P^i(P)$ 를 노드 P' 라 하자. 행렬-스타그래프 MS_{2n} 의 노드 X 를 팬케익그래프 P_{2n} 의 노드 P 로 사상하고, 노드 X 와 인접한 노드 X' 를 팬케익그래프의 노드 P' 로 사상할 때, 팬케익그래프의 에지 정의에 의해 노드 P 로부터 노드 P' 로 이동하는 최단 경로의 차원에지 시퀀스 개수를 통해

임베딩의 연장율을 알아본다. 행렬-스타그래프 MS_{2n} 의 노드를 연결하는 에지에 따라 3가지 경우로 나누어 증명한다.

경우1. 에지 C_i ,

에지 C_i 는 $n-1$ 개 에지가 있고, i 의 값에 따라서 2가지로 나눈다.

첫째, $2 \leq i \leq 3$ 인 경우

행렬-스타그래프 $MS_{2,n}$ 의 노드 $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & x_{n+3} & \dots & x_{n+i} & \dots & x_{2n} \end{bmatrix}$ 에서 에지 C_2 에 의해 인접한 노드 $C_2(X)$ 의 순열은 $\begin{bmatrix} x_2 & x_1 & x_3 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & x_{n+3} & \dots & x_{n+i} & \dots & x_{2n} \end{bmatrix}$ 이고, 에지 C_3 에 의해 인접한 노드 $C_3(X)$ 의 순열은 $\begin{bmatrix} x_3 & x_2 & x_1 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & x_{n+3} & \dots & x_{n+i} & \dots & x_{2n} \end{bmatrix}$ 이다. 행렬-스타그래프 MS_{2n} 의 노드 X 에서 에지 C_2 에 의해 인접한 노드 $C_2(X)$ 는 팬케익그래프 P_{2n} 의 노드 P 와 2-차원에지에 의해 인접한 노드 P^2 즉, $p_2p_1p_3\dots p_{i-1}p_{2n}$ 와 동일하고, 에지 C_3 에 의해 인접한 노드 $C_3(X)$ 는 팬케익그래프 P_{2n} 의 노드 P 와 3-차원에지에 의해 인접한 노드 P^3 와 즉, $p_3p_2p_1\dots p_{i-1}p_{2n}$ 와 동일한 노드임을 쉽게 알 수 있다. 따라서 행렬-스타그래프 MS_{2n} 의 노드 X 와 에지 C_2 및 C_3 에 인접한 노드는 팬케익그래프 P_{2n} 에 연장율 1에 사상 가능하다.

둘째, $i \geq 4$ 인 경우

행렬-스타그래프 $MS_{2,n}$ 의 노드 $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_{n+i} & \dots & x_{2n} \end{bmatrix}$ 에서 에지 $C_i(X)$, ($i \geq 4$)에 의해 인접한 노드 $C_i(X)$ 의 순열은 $\begin{bmatrix} x_i & x_2 & \dots & x_1 & \dots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_{n+i} & \dots & x_{2n} \end{bmatrix}$ 이다. 행렬-스타그래프 MS_{2n} 의 노드 X 와 X' 를 팬케익그래프의 노드 P 와 P' 로 각각 사상하면, 팬케익그래프 P_{2n} 의 노드 P 의 순열은 $p_1p_2\dots p_{i-1}p_i p_{i-1}\dots p_{2n}$ 이고 노드 P' 의 순열은 $p_i p_2\dots p_{i-1}p_1 p_{i-1}\dots p_{2n}$ 이므로 노드 P 와 P' 는 서로 인접하지 않다. 팬케익그래프 P_{2n} 의 노드 P 에서 노드 P' 로 최단경로 라우팅을 위한 차원에지 시퀀스는 $\langle P^i, P^{i-1}, P^{i-2}, P^{i-1} \rangle$ 이다. 노드 P 에서 차원에지 시퀀스를 순차적으로 적용하여 노드 P' 로 도달 가능함을 살펴보자. 첫째, 노드 P 에 차원에지 $\langle P^i \rangle$ 를 적용한 노드는 $P^i(P)$ 이고 순열은 $p_i p_{i-1}\dots p_3 p_2 p_1 p_{i-1}\dots p_{2n}$ 이고, 둘째, 노드 $P^i(P)$ 에 차원에지 시퀀스 $\langle P^{i-1} \rangle$ 을 적용한 노드는 $P^{i-1}(P^i(P))$ 이고 순열은 $p_2 p_3 \dots p_{i-1} p_i p_1 p_{i-1}\dots p_{2n}$ 이다. 셋째, 노드 $P^{i-1}(P^i(P))$ 에 차원에지 시퀀스 $\langle P^{i-2} \rangle$ 를 적용한 노드는 $P^{i-2}(P^{i-1}(P^i(P)))$ 이고 순열은 $p_{i-1}\dots p_3 p_2 p_i p_1 p_{i-1}\dots p_{2n}$ 이고, 넷째, 노드는 $P^{i-2}(P^{i-1}(P^i(P)))$ 에 차원에지 시퀀스

$\langle P^{i-1} \rangle$ 를 적용한 노드는 $P^{i-1}(P^{i-2}(P^{i-1}(P^i(P))))$ 이고 순열은 $p_i p_2 \dots p_{i-1} p_1 p_{i-1}\dots p_{2n}$ 이다. 팬케익그래프의 노드 P 에서 차원에지 시퀀스 $\langle P^i, P^{i-1}, P^{i-2}, P^{i-1} \rangle$ 를 적용한 노드 $P^{i-1}(P^{i-2}(P^{i-1}(P^i(P))))$ 의 순열은 행렬-스타그래프 $MS_{2,n}$ 의 노드 $C_i(X)$ 의 순열 $\begin{bmatrix} x_i & x_2 & \dots & x_1 & \dots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_{n+i} & \dots & x_{2n} \end{bmatrix}$ 과 동일한 주소임을 알 수 있다. 따라서 팬케익그래프의 노드 P 에서 노드 P' 까지 최단경로 라우팅을 위해 적용해야 할 차원에지 개수는 4개 이므로 연장율 4임을 알 수 있다.

경우2. 에지 R

행렬-스타그래프 $MS_{2,n}$ 의 노드 $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_{n+i} & \dots & x_{2n} \end{bmatrix}$ 에서 에지 R 에 의해 인접한 노드 $R(X)$ 의 행렬은 $\begin{bmatrix} x_{n+1} & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ x_1 & x_{n+2} & \dots & x_{n+i} & \dots & x_{2n} \end{bmatrix}$ 이고, 노드 $R(X)$ 를 $1 \times 2n$ 행렬 형태로 변환한 순열은 $x_{n+1}x_2x_3\dots x_i\dots x_n x_1 x_{n+2}\dots x_{n+i}\dots x_{2n}$ 이다. 행렬-스타그래프 MS_{2n} 의 노드 X 와 X' 를 팬케익그래프 P_{2n} 의 노드 P 와 P' 로 사상하면, 노드 P 의 순열은 $p_1 p_2 \dots p_{i-1} p_i p_{i-1} \dots p_{2n}$ 이고 노드 P' 의 순열은 $p_{n+1} p_2 \dots p_{i-1} p_n p_1 \dots p_{2n}$ 이므로 노드 P 와 P' 는 서로 인접하지 않다. 팬케익그래프 P_{2n} 의 노드 P 에서 노드 P' 로 최단경로 라우팅을 위한 차원에지 시퀀스는 $\langle P^i, P^{i-1}, P^{i-2}, P^{i-1} \rangle$ 이다. 노드 P 에서 차원에지 시퀀스를 순차적으로 적용하여 노드 P' 로 도달 가능함을 살펴보자. 첫째, 노드 P 에 차원에지 $\langle P^i \rangle$ 를 적용한 노드는 $P^i(P)$ 이고 순열은 $p_i p_{i-1}\dots p_3 p_2 p_1 p_{i-1}\dots p_{2n}$ 이다. 둘째, 노드 $P^i(P)$ 에 차원에지 시퀀스 $\langle P^{i-1} \rangle$ 을 적용한 노드는 $P^{i-1}(P^i(P))$ 이고 순열은 $p_2 p_3 \dots p_{i-1} p_i p_1 p_{i-1}\dots p_{2n}$ 이다. 셋째, 노드 $P^{i-1}(P^i(P))$ 에 차원에지 시퀀스 $\langle P^{i-2} \rangle$ 를 적용한 노드는 $P^{i-2}(P^{i-1}(P^i(P)))$ 이고, 순열은 $p_{i-1}\dots p_3 p_2 p_i p_1 p_{i-1}\dots p_{2n}$ 이다. 넷째, 노드 $P^{i-2}(P^{i-1}(P^i(P)))$ 에 차원에지 시퀀스 $\langle P^{i-1} \rangle$ 를 적용한 노드는 $P^{i-1}(P^{i-2}(P^{i-1}(P^i(P))))$ 이고, 순열은 $p_i p_2 \dots p_{i-1} p_1 p_{i-1}\dots p_{2n}$ 이다. 따라서 팬케익그래프의 노드 P 에서 노드 P' 까지 최단경로 라우팅을 위해 적용해야 할 차원에지 개수는 4개이므로 연장율 4임을 알 수 있다.

경우3. 에지 E

행렬-스타그래프 $MS_{2,n}$ 의 노드 $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_{n+i} & \dots & x_{2n} \end{bmatrix}$ 에서 에지 E 에 의해 인접한 노드 $E(X) = \begin{bmatrix} x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_{n+i} & \dots & x_{2n} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_n \end{bmatrix}$ 이고, 노드 $E(X)$ 를 $1 \times 2n$ 행렬 형태로 변환하면 $x_{n+1}x_{n+2}\dots x_{n+i}\dots x_{2n}x_1x_2x_3\dots$

$x_i \dots x_n$ 이다. 행렬-스타그래프 MS_{2n} 의 노드 X 와 X' 를 팬케익그래프 P_{2n} 의 노드 P 와 P' 로 각각 사상하면, 노드 P 의 순열은 $p_1 p_2 \dots p_i \dots p_n p_{n+1} \dots p_{2n}$ 이고 노드 P' 의 순열은 $p_n p_{n+1} \dots p_{2n} p_1 p_2 \dots p_i \dots p_n$ 이므로 노드 P 와 P' 는 서로 인접하지 않다. 팬케익그래프 P_{2n} 의 노드 P 에서 노드 P' 로 최단경로 라우팅을 위한 차원에지 시퀀스는 $\langle P^n, P^{2n}, P^n \rangle$ 이다. 노드 P 에서 차원에지 시퀀스를 순차적으로 적용하여 노드 P' 로 도달 가능함을 살펴보자. 첫째, 노드 P 에 차원에지 $\langle P^n \rangle$ 를 적용한 노드는 $P^n(P)$ 이고 순열은 $p_n p_{n+1} \dots p_i \dots p_{2n} p_1 p_{n+1} \dots p_{2n}$ 이다. 둘째, 노드 $P^n(P)$ 에 차원에지 시퀀스 $\langle P^{2n} \rangle$ 를 적용한 노드는 $P^{2n}(P^n(P))$ 이고 순열은 $p_{2n} p_{2n-1} \dots p_{n+i} \dots p_{n-1} p_1 p_2 \dots p_i \dots p_n p_n$ 이다. 셋째, 노드 $P^{2n}(P^n(P))$ 에 차원에지 시퀀스 $\langle P^n \rangle$ 를 적용한 노드는 $P^n(P^{2n}(P^n(P)))$ 이고, 순열은 $p_{n+1} p_{n+2} \dots p_{n+i} \dots p_{2n-1} p_{2n} p_1 p_2 \dots p_i \dots p_{n-1} p_n$ 이다. 따라서 팬케익그래프의 노드 P 에서 노드 P' 까지 최단경로 라우팅을 위해 적용해야 할 차원에지 개수는 3개 이므로 연장울 3임을 알 수 있다. 따라서 행렬-스타그래프 MS_{2n} 의 노드 X 와 인접한 노드 X' 를 팬케익그래프 P_{2n} 의 노드 P 와 노드 P' 로 각각 사상했을 때 최대 연장울은 4임을 알 수 있다.

정리 2 행렬-스타그래프 MS_{2n} 을 RFM_{2n} 으로 임베딩하는 연장울은 n 이다.

증명 행렬-스타그래프 MS_{2n} 의 노드 X 를 RFM_{2n} 그래프의 노드 R 로 사상하고, 노드 X 와 인접한 노드 $C_i(X), R(X), E(X)$ 를 RFM_{2n} 그래프의 동일한 주소를 갖는 노드 R' 로 각각 사상할 때, RFM_{2n} 그래프의 노드 R 의 순열을 노드 R' 의 순열로 변환하는데 사용하는 가장 적은 개수의 차원에지를 통해 연장울을 분석한다. 행렬-스타그래프 MS_{2n} 의 노드를 연결하는 차원에지에 따라 3가지 경우로 나누어 증명한다.

경우1. 예지 $C_i, (2 \leq i \leq n)$

행렬-스타그래프 MS_{2n} 의 노드 X 와 차원에지 C_i 에 의해 인접한 노드 X' 는 1행 1열의 원소와 1행 1열의 원소가 서로 교환된 순열 즉, 노드 $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_{n+i} & \dots & x_{2n} \end{bmatrix}$ 이고, 노드 $X' = \begin{bmatrix} x_i & x_2 & \dots & x_1 & \dots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_{n+i} & \dots & x_{2n} \end{bmatrix}$ 이다. 노드 X 와 노드 X' 를 RFM_{2n} 그래프의 노드 R 과 노드 R' 로 각각 사상하면, 노드 $R (=r_1 r_2 \dots r_{i-1} r_i r_{i+1} \dots r_n r_{n+1} \dots r_{n+i} \dots r_{2n})$ 과 노드 R'

$(=r_i r_2 \dots r_{i-1} r_i r_{i+1} \dots r_n r_{n+1} \dots r_{n+i} \dots r_{2n})$ 는 서로 인접하지 않는다. RFM_{2n} 그래프의 노드 R 에서 노드 R' 로 순열을 변환하기 위해 적용할 차원에지 시퀀스는 $\langle R^i, F^{i-1} \rangle$ 이다. 노드 R 에서 차원에지 시퀀스를 순차적으로 적용하여 노드 R' 로 도달 가능함을 살펴보자. 첫째, 노드 R 에 차원에지 $\langle R^i \rangle$ 를 적용한 노드는 $R^i(R)$ 이고, $R^i(R)$ 의 순열은 $r_2 \dots r_{i-1} r_i r_1 r_{i+1} \dots r_n r_{n+1} \dots r_{n+i} \dots r_{2n}$ 이다. 둘째, 노드 $R^i(R)$ 에서 차원에지 시퀀스 $\langle F^{i-1} \rangle$ 을 적용한 노드는 $F^{i-1}(R^i(R))$ 이고 순열은 $r_1 r_2 \dots r_{i-1} r_i r_{i+1} \dots r_n r_{n+1} \dots r_{n+i} \dots r_{2n}$ 이다. 따라서 RFM_{2n} 그래프의 노드 R 에서 노드 R' 로 라우팅을 위해 적용한 차원에지의 개수는 2개이므로, 행렬-스타그래프 MS_{2n} 의 노드 X 와 노드 X' 를 사상하는 연장울은 2이다.

경우2. 예지 R

행렬-스타그래프 MS_{2n} 의 노드 $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_{n+i} & \dots & x_{2n} \end{bmatrix}$ 에서 예지 R 에 의해 인접한 노드 $R(X)$ 의 행렬은 $\begin{bmatrix} x_{n+1} & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ x_1 & x_{n+2} & \dots & x_{n+i} & \dots & x_{2n} \end{bmatrix}$ 이다. 행렬-스타그래프 MS_{2n} 의 노드 X 와 X' 를 RFM_{2n} 그래프의 노드 R 과 노드 R' 로 각각 사상하면, 노드 $R (=r_1 r_2 \dots r_{i-1} r_i r_{i+1} \dots r_n r_{n+1} \dots r_{n+i} \dots r_{2n})$ 과 노드 $R' (=r_{n+1} r_2 \dots r_i \dots r_n r_1 r_{n+2} \dots r_{n+i} \dots r_{2n})$ 는 서로 인접하지 않는다. RFM_{2n} 그래프의 노드 R 에서 노드 R' 로 순열을 변환하기 위해 적용할 차원에지 시퀀스는 $\langle R^{n+1}, F^n \rangle$ 이다. 순열의 변환 과정은 위의 경우 1과 동일하다. 따라서 RFM_{2n} 그래프의 노드 R 에서 노드 R' 로 라우팅을 위해 적용한 차원에지의 개수는 2개이므로, 행렬-스타그래프 MS_{2n} 의 노드 X 와 노드 X' 를 사상하는 연장울은 2이다.

경우3. 예지 E

행렬-스타그래프 $MS_{2,n}$ 의 노드 $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_{n+i} & \dots & x_{2n} \end{bmatrix}$ 에서 예지 E 에 의해 인접한 노드 $E(X) = \begin{bmatrix} x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_{n+i} & \dots & x_{2n} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_n \end{bmatrix}$ 이고, 노드 $E(X)$ 를 $1 \times 2n$ 행렬 형태로 변환하면 $x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{n+i} \dots x_{2n} x_1 x_2 x_3 \dots x_i \dots x_n$ 이다. 행렬-스타그래프 MS_{2n} 의 노드 X 와 X' 를 RFM_{2n} 그래프의 노드 R 과 노드 R' 로 각각 사상하면, 노드 $R (=r_1 r_2 \dots r_i \dots r_n r_{n+1} \dots r_{n+i} \dots r_{2n})$ 과 노드 $R' (=r_{n+1} r_{n+2} \dots r_{n+i} \dots r_{2n} r_1 r_2 \dots r_i \dots r_n)$ 는 서로 인접하지 않는다. RFM_{2n} 그래프의 노드 R 에서 노드 R' 로 순열을 변환하기 위해 적용할 차원에지 시퀀스는 $\langle R^{2n}, R^{2n}, \dots, R^{2n} \rangle$ 으로

R^{2n} 연산을 n 번 수행한다. 순열의 변환 과정은 다음과 같다. 첫째, 노드 R 에서 차원예지 시퀀스 R^{2n} 에 의해 인접한 노드 $R^{2n}(R)$ 의 순열은 $r_2r_3...r_i...r_n r_{n-1}...r_{n+i}...r_{2n}r_1$ 이다. 둘째, 노드 $R^{2n}(R)$ 에서 차원예지 시퀀스 R^{2n} 에 의해 인접한 노드 $R^{2n}(R^{2n}(R))$ 의 순열은 $r_3r_4...r_i...r_n r_{n-1}...r_{n+i}...r_{2n}r_1r_2$ 이다. 위와 동일한 방법으로 차원예지 시퀀스 R^{2n} 를 셋째, 넷째, ..., n 번째까지 순차적으로 적용한 순열은 $r_{n+1}r_{n+2}...r_{n+i}...r_{2n}r_1r_2...r_i...r_n$ 이 됨을 알 수 있다. 따라서 RFM_{2n} 그래프의 노드 R 에서 노드 R' 로 라우팅을 위해 적용한 차원예지의 개수는 n 개이므로, 행렬-스타그래프 MS_{2n} 의 노드 X 와 차원예지 E 에 의해 인접한 노드 X' 를 사상하는 연장율은 n 이다. 따라서 행렬-스타그래프 MS_{2n} 의 노드 X 와 인접한 노드 X' 를 RFM_{2n} 그래프의 노드 R 에서 노드 R' 로 각각 사상했을 때 최대 연장율은 n 임을 알 수 있다.

따름정리 3 행렬-스타그래프 MS_{2n} 을 RFM_{2n} 으로 임베딩하는 평균연장율은 3이다.

증명 행렬-스타그래프 MS_{2n} 의 정의에 의한 예지는 예지 C_i ($2 \leq i \leq n$)가 $n-1$ 개, 예지 R 은 1개, 예지 E 는 1개이므로 전체 예지 개수는 $n+1$ 개이다. 평균연장율은 위의 정리 3에 의해 각 예지의 연장율 합을 구한 후 전체 예지 개수로 나누어 계산하므로, $\{(n-1) \times 2 + 1 \times 2 + 1 \times n\} / (n+1)$ 이다. 따라서 임베딩의 평균연장율은 3 이하임을 알 수 있다.

정리 4 RFM_{2n} 을 행렬-스타그래프 MS_{2n} 으로 임베딩하는 연장율은 $O(n)$ 이다.

증명 RFM_{2n} 그래프의 예지는 예지발생기 R^i 와 F^i 로 구성되어 있다. 예지발생기 R^i 는 순열의 첫 번째 원소를 i 번째 위치로 삽입하는 연산으로 $(123...i...2n) \rightarrow (23...i1...2n)$, $2 \leq i \leq 2n$ 이고, 예지발생기 F^i 는 순열의 i 번째 원소를 첫 번째 위치로 삽입하는 연산으로 $(123...i-1ii+1...2n) \rightarrow (i123...i-1i+1...2n)$, $2 \leq i \leq 2n$ 이다. RFM_{2n} 그래프의 노드 $R(=r_1r_2...r_{i-1}r_i r_{i+1}...r_{2n})$ 과 노드 R 에서 예지발생기 R^i 와 F^i 에 의해 인접한 노드 R' 를 행렬-스타그래프 MS_{2n} 의 노드 X 와 X' 로 각각 사상할 때, 행렬-스타그래프 MS_{2n} 의 예지 정의에 의해 노드 X 의 순열에서 노드 X' 의 순열로 변환하는 가장 적은 수의 예지 개수를 통해 연장율을 분석한다. RFM_{2n} 그래프의 예지발생기는 R^i 와 F^i 이 있지만 본

연구에서는 예지발생기 R^i , $2 \leq i \leq 2n$ 의 경우를 통해 임베딩의 연장율 비용이 $O(n)$ 임을 보이도록 한다.

RFM_{2n} 그래프의 노드 $R(=r_1r_2...r_{i-1}r_i r_{i+1}...r_{2n})$ 에서 예지발생기 R^i 와 인접한 노드 $R^i(R)(=r_2r_3...r_{i-1}r_i r_{i+1}...r_{2n})$ 를 행렬-스타그래프 MS_{2n} 의 노드 $X(=x_1x_2...x_{i-1}x_i x_{i+1}...x_{2n})$ 와 $X'(=x_2x_3...x_{i-1}x_i x_{i+1}...x_{2n})$ 로 각각 사상하면 노드 X 와 노드 X' 는 서로 인접하지 않는다. 행렬-스타그래프 MS_{2n} 의 노드 $X(=x_1x_2...x_{i-1}x_i x_{i+1}...x_{2n})$ 에서 노드 $X'(=x_2x_3...x_{i-1}x_i x_{i+1}...x_{2n})$ 로 라우팅을 위한 최단경로의 차원예지 시퀀스는 $\langle C_i, C_{i-1}, C_{i-2}, \dots, C_2 \rangle$ 이다 ($2 \leq i \leq 2n$). 행렬-스타그래프 MS_{2n} 의 노드 $X(=x_1x_2...x_{i-1}x_i x_{i+1}...x_{2n})$ 에서 차원예지 시퀀스를 적용하여 노드 $X'(=x_2x_3...x_{i-1}x_i x_{i+1}...x_{2n})$ 를 생성하는 과정을 알아보자. 노드 $X(=x_1x_2...x_{i-1}x_i x_{i+1}...x_{2n})$ 에서 차원예지 C_i 에 인접한 노드 $C_i(X)$ 의 순열은 $x_i x_2...x_{i-1}x_1 x_{i+1}...x_{2n}$ 이고, 노드 $C_i(X)$ 의 순열에서 차원예지 C_{i-1} 에 인접한 노드 $C_{i-1}(C_i(X))$ 의 순열은 $x_i-1x_2...x_i-2x_1 x_{i+1}...x_{2n}$ 이다. 노드 $C_{i-1}(C_i(X))$ 의 순열에서 차원예지 C_{i-2} 에 인접한 노드 $C_{i-2}(C_{i-1}(C_i(X)))$ 의 순열은 $x_{i-2}x_2...x_{i-1}x_i x_{i+1}...x_{2n}$ 이다. 위와 동일한 방법으로 차원예지 시퀀스 $\langle C_{i-3}, C_{i-4}, C_{i-5}, \dots, C_2 \rangle$ 를 순차적으로 적용하여 생성한 노드 $C_2(C_3(\dots(C_{i-2}(C_{i-1}(C_i(X))))))$ 의 순열은 $x_2x_3...x_{i-1}x_i x_{i+1}...x_{2n}$ 으로서 노드 X' 와 동일한 순열임을 알 수 있다. 이때 차원예지 시퀀스 C_i 에서 i 의 최대 값은 $2n$ 이므로 차원예지 시퀀스의 개수는 $2n-1$ 개임을 알 수 있다. 따라서 RFM_{2n} 그래프의 노드 R 과 예지발생기 R_i 에 의해 인접한 노드 R' 는 행렬-스타그래프 MS_{2n} 의 노드 X 와 X' 로 연장율 $2n-1$ 에 각각 사상 가능하므로 임베딩의 연장율 비용은 $O(n)$ 이다.

정리 5 RFM_n 그래프는 팬케익그래프 P_n 에 연장율 2에 임베딩 가능하다.

증명 RFM_n 그래프의 노드 $R(=r_1r_2...r_{i-1}r_i r_{i+1}...r_n)$ 에서 예지발생기 R^i 와 F^i 에 의해 인접한 노드 R' 를 팬케익그래프 P_n 의 노드 P 와 P' 로 각각 사상할 때, 팬케익그래프 P_n 의 예지 정의에 의해 노드 P 의 순열에서 노드 P' 의 순열로 변환하는 가장 적은 수의 예지 개수를 통해 연장율을 분석한다. RFM_n 그래프의 예지는 예지 발생기 즉, 차원예지 R^i 와 F^i 로 구성되어 있다. 차원예지 R^i 는 순열의 첫 번째 원소를 i 번째로 삽입하는 연산으로 $(123...i...n) \rightarrow (23...i1...n)$, $2 \leq i \leq n$

이고, 차원에지 F^i 는 순열의 i 번째 원소를 첫 번째 원소로 삽입하는 연산으로 $(123\dots i-1ii+1\dots n) \rightarrow (i123\dots i-1i+1\dots n)$, $2 \leq i \leq n$ 이다. RFM_n 그래프의 차원에지 R^i 와 F^i 의 경우로 나누어 증명한다.

경우1. 에지 발생기 R^i , $2 \leq i \leq n$

RFM_n 그래프의 노드 $R(=r_1r_2\dots r_{i-1}r_i r_{i+1}\dots r_n)$ 에서 차원에지 R^i 와 인접한 노드 $R^i(R)(=r_2r_3\dots r_{i-1}r_i r_{i+1}\dots r_n)$ 를 팬케익그래프 P_n 의 노드 $P(=p_1p_2\dots p_{i-1}p_i p_{i+1}\dots p_n)$ 와 $P'(=p_2p_3\dots p_{i-1}p_i p_{i+1}\dots p_n)$ 로 각각 사상하면 노드 P 와 노드 $P'(=p_2p_3\dots p_{i-1}p_i p_{i+1}\dots p_n)$ 는 서로 인접하지 않는다. 팬케익그래프 P_n 의 노드 $P(=p_1p_2\dots p_{i-1}p_i p_{i+1}\dots p_n)$ 에서 P' 로 순열을 변환하기 위해 적용할 차원에지 시퀀스는 $\langle P^i, P^{i-1} \rangle$ 이다. 노드 P 에서 차원에지 시퀀스를 순차적으로 적용하여 노드 P' 로 도달 가능함을 살펴보자. 첫째, 노드 P 에 차원에지 $\langle P^i \rangle$ 를 적용한 노드는 $P^i(P)$ 이고, $P^i(P)$ 의 순열은 $p_i p_{i-1}\dots p_2 p_1 p_{i+1}\dots p_n$ 이다. 둘째, 노드 $P^i(P)$ 에서 차원에지 시퀀스 $\langle P^{i-1} \rangle$ 을 적용한 노드는 $P^{i-1}(P^i(P))$ 이고 순열은 $p_2\dots p_{i-1} p_i p_{i+1}\dots p_n$ 이다. 따라서 팬케익그래프 P_n 의 노드 P 에서 에지 R^i 에 의해 인접한 노드 P' 로 라우팅을 위해 적용한 차원에지의 개수는 2개이므로 RFM_n 그래프의 노드 R 와 노드 R' 를 사상하는 연장은 2이다.

경우2. 차원에지 F^i , $2 \leq i \leq n$

RFM_n 그래프의 노드 $R(=r_1r_2\dots r_{i-1}r_i r_{i+1}\dots r_n)$ 에서 차원에지 F^i 와 인접한 노드 $F_i(R)(=r_1r_2\dots r_{i-1}r_i+1\dots r_n)$ 를 팬케익그래프 P_n 의 노드 $P(=p_1p_2\dots p_{i-1}p_i p_{i+1}\dots p_n)$ 와 $P'(=p_1p_2p_3\dots p_{i-1}p_i p_{i+1}\dots p_n)$ 로 각각 사상하면 노드 P 와 노드 $P'(=p_1p_2p_3\dots p_{i-1}p_i p_{i+1}\dots p_n)$ 는 서로 인접하지 않는다. 팬케익그래프 P_n 의 노드 $P(=p_1p_2\dots p_{i-1}p_i p_{i+1}\dots p_n)$ 에서 P' 로 순열을 변환하기 위해 적용할 차원에지 시퀀스는 $\langle P^{i-1}, P^i \rangle$ 이다. 팬케익그래프 P_n 의 노드 P 에서 차원에지 시퀀스를 순차적으로 적용하여 노드 P' 로 도달 가능함을 살펴보자. 첫째, 노드 P 에 차원에지 $\langle P^{i-1} \rangle$ 를 적용한 노드는 $P^{i-1}(P)$ 이고, $P^{i-1}(P)$ 의 순열은 $p_i p_{i-1} p_{i-2}\dots p_2 p_1 p_{i+1}\dots p_n$ 이다. 둘째, 노드 $P^{i-1}(P)$ 에서 차원에지 시퀀스 $\langle P^i \rangle$ 을 적용한 노드는 $P^i(P^{i-1}(P))$ 이고 순열은 $p_i p_1 p_2 p_3\dots p_{i-1} p_i p_{i+1}\dots p_n$ 이다. 따라서 팬케익그래프 P_n 의 노드 P 에서 에지 F^i 에 의해 인접한 노드 P' 로 라우팅을 위해 적용한

차원에지의 개수는 2개이므로, RFM_n 그래프의 노드 R 와 노드 R' 를 사상하는 연장은 2이다.

따라서 RFM_n 그래프의 노드 R 에서 에지 발생기 R^i 와 F^i 에 의해 인접한 노드 R' 를 팬케익그래프 P_n 의 노드 P 와 P' 로 각각 사상하는 연장은 2이다.

정리 6 팬케익그래프 P_n 을 RFM_n 으로 임베딩하는 연장은 $n-1$ 이다.

증명 팬케익그래프 P_n 의 노드 $P(=p_1p_2\dots p_{i-1}p_i p_{i+1}\dots p_n)$ 와 i -차원 에지에 의해 인접한 노드 P^i , $2 \leq i \leq n$ 에서 가장 큰 연장을 값을 갖는 경우는 n -차원 에지에 의해 인접한 노드 P^n 이고, 노드 P^n 의 순열은 $p_n p_{n-1} p_{n-2}\dots p_{i+1} p_i p_{i-1}\dots p_2 p_1$ 이다. 팬케익그래프 P_n 의 노드 P 와 노드 P^n 을 RFM_n 의 노드 $R(=r_1r_2\dots r_{i-1}r_i r_{i+1}\dots r_n)$ 과 $R^i(=r_n r_{n-1}\dots r_{i+1} r_i r_{i-1}\dots r_2 r_1)$ 로 각각 사상했을 때, 노드 R 에서 노드 R' 까지 최단경로 라우팅을 위한 차원에지 시퀀스는 $\langle R^n, R^{n-1}, R^{n-2}, \dots, R^i, \dots, R^3, R^2 \rangle$ 이다. RFM_n 그래프의 노드 R 에서 차원에지 시퀀스를 순차적으로 적용하여 노드 R' 로 도달 가능함을 살펴보자. 첫째, 노드 R 에 차원에지 $\langle R^n \rangle$ 를 적용한 노드는 $R^n(R)$ 이고, 노드 $R^n(R)$ 의 순열은 $r_2 r_3\dots r_{i-1} r_i r_{i+1}\dots r_n r_1$ 이다. 둘째, 노드 $R^n(R)$ 에서 차원에지 시퀀스 $\langle R^{n-1} \rangle$ 을 적용한 노드는 $R^{n-1}(R^n(R))$ 이고 순열은 $r_3 r_4\dots r_{i-1} r_i r_{i+1}\dots r_n r_2 r_1$ 이다. 위와 동일한 방법으로 차원에지 시퀀스 $\langle R^i \rangle$ 까지 적용한 노드는 $R^i\dots R^{n-1} R^n(R)$ 이고 순열은 $r_{i+1} r_{i+2}\dots r_n r_{i-1} r_i r_{i+1}\dots r_{i-2}\dots r_2 r_1$ 이고, 차원에지 시퀀스 $\langle R^2 \rangle$ 까지 적용한 노드는 $R^2\dots R^i\dots R^{n-1} R^n(R)$ 이고 순열은 $r_n r_{n-1}\dots r_{i+1} r_i r_{i-1}\dots r_2 r_1$ 이다. RFM_n 의 노드 $R(=r_1r_2\dots r_{i-1}r_i r_{i+1}\dots r_n)$ 에서 $R^i(=r_n r_{n-1}\dots r_{i+1} r_i r_{i-1}\dots r_2 r_1)$ 까지 라우팅을 위해 적용한 차원에지의 개수는 $n-1$ 개이다. 따라서 팬케익그래프 P_n 의 노드 P 와 n -차원 에지에 의해 인접한 노드 P^n 을 RFM_n 의 노드 R 과 R' 로 각각 사상하는 연장은 $n-1$ 임을 알 수 있다.

4. 결론

병렬 컴퓨터의 위상으로 잘 알려진 스타그래프는 짧은 지름, 노드 대칭성, 계층적 구조와 최대 고장 허용도 등을 갖는 상호 연결망이다. 본 논문에서는 스타그래프가 갖는 상호 연결망의 중요한 성질을 가지면서 망 비용이 개선된 행렬-스타그래프와 팬케익

그래프, 그리고 RFM 그래프 사이의 임베딩을 분석하였다. 본 연구의 임베딩 방법은 각 그래프가 동일한 노드 수를 가질 때 그래프의 에지 정의 즉, 에지 생성 규칙을 통해 인접한 두 노드를 사상하고자하는 대상 그래프에서 사용되는 가장 적은 수의 에지 정의로 표현하였다. 이때 적용된 에지의 수를 통해 임베딩에 대한 연장율을 분석하였다. 그래프 정의를 통해 임베딩 분석이 가능한 이유는 행렬-스타그래프, 팬케익그래프, RFM 그래프가 노드 대칭적인 성질이 있기 때문이다.

본 논문의 연구 결과는 행렬-스타그래프 MS_{2n} 은 팬케익그래프 P_{2n} 에 연장율 4, 확장율 1에 임베딩 가능하고, RFM_n 그래프는 팬케익그래프 P_n 에 연장율 2, 확장율 1에 임베딩 가능함을 보였다. 또한, 행렬-스타그래프 MS_{2n} 을 RFM_{2n} 으로 임베딩하는 연장율은 n 이고, 평균연장율 3에 임베딩 가능하고, 팬케익그래프 P_n 을 RFM_n 으로 임베딩 하는 연장율은 $n-1$ 임을 보였다.

참 고 문 헌

- [1] T. Y. Feng, "A Survey of Interconnection Networks," *IEEE computer*, pp. 12-27, Dec. 1981.
- [2] H. Mohammad and I. Hal, "On the Diameter of Pancake Network," *Journal of Algorithms*, No. 25, pp. 67-94, 1997.
- [3] B. Parhami and M. Rakov, "Perfect Difference Networks and Related Interconnection Structures for Parallel and Distributed Systems," *IEEE Trans. Parallel and Distributed Syst.*, Vol. 16, No. 8, pp. 714-724, 2005.
- [4] K. Qiu and S. G. Akl, "Load Balancing and selection on the Star and Pancake Networks," *Proc. 26th Hawaii International Conference on System Sciences*, Vol. 2, pp. 235-242, Jan. 1993.
- [5] M. M. Azevedo, N. Bagherzaeh, and S. Latifi, "Low Expansion Packing and Embeddings of Hypercubes into Star Graphs: A Performance-Oriented Approach," *IEEE Parallel and Distributed Systems*, Vol. 9, No. 3, pp. 261-274, 1998.
- [6] J-S. Jwo, S. Lakshminarayanan, and S. K. Dhall, "Embedding of Cycles and Grids in Star Graphs," *Proc. of IEEE*, Vol. 5, pp. 540-547, 1990.
- [7] K. Day and A. Tripathi, "A Comparative Study of Topological Properties of Hypercubes and Star Graphs," *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems*, Vol. 5, No. 1, pp. 31-38, Jan. 1994.
- [8] A. K. Gupta and S. E. Hambruch, "Multiple Network Embeddings into Hypercubes," *J. Parallel and Distributed Computing*, Vol. 19, pp. 73-82, 1993.
- [9] S. B. Akers and B. Krishnamurthy, "A Group-Theoretic Model for Symmetric Interconnection Network," *IEEE Trans. Comput.*, Vol. 38, No. 4, pp. 555-565, 1989.
- [10] P. Berthome, A. Ferreira and S. Perennes, "Optimal Information Dissemination in Star and Pancake Networks," *IEEE Trans. on Parallel and Distributed Syst.*, Vol. 7, No. 12, pp. 1292-1300, 1996.
- [11] K. Qiu, H. Meijer and S. G. Akl, "Parallel Routing and Sorting on the Pancake Networks," In *Dehne, F., and Fiala, F. (Eds). Advances in Computing and Information-ICCI'91, Lecture Notes in Computer Science*, No. 497, Springer-Verlag, pp. 235-242, 1991.
- [12] K. Qiu, S. G. Akl, and H. Meuer, "On Some Properties and Algorithms for the Star and Pancake Interconnection Networks," *Journal of Parallel and Distributed Computing* 22, pp. 16-25, 1994.
- [13] P. F. Corbett, "Rotator Graphs: An Efficient Topology for Point-to-Point Multiprocessor Networks," *IEEE Trans. Parallel Distributed Syst.*, Vol. 3, No. 5, pp. 622-626, 1992.
- [14] 이형욱, 허영남, 임형식, "RFM Graphs: 그래프 결합을 이용한 새로운 상호연결망," 정보처리학회논문지 5권 10호, pp. 2615-2626, 1998.
- [15] V. Faber and J. W. Moore, "High-degree,

Low-diameter Interconnection Networks with Vertex Symmetry: The Directed Case," LA-UR-88-1051, LosAlmos National Lab., Los Almos, NM, 1988.

- [16] C. H. Yeh and E. A. Varvarigos, "Macro-Star Networks: Efficient Low-Degree Alternatives to Star Graphs," *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems*, Vol. 9, No. 10, pp. 987-1003, Oct. 1998.
- [17] H-O. Lee, J-S. Kim, and K-W. Park, "Matrix-star Graphs: A New Interconnection Network Based on Matrix Operations," *10th Asia-Pacific Conference, ACSAC 2005, Lecture Notes in Computer Science*, No. 3740, Springer, pp. 478-487, 2005.
- [18] 이형욱, 임형석, "행렬-스타 그래프: 행렬 연산에 기반한 새로운 상호연결망," *정보과학회논문지(A)*, 26권 4호, pp. 389-405, 1999.



이 형 욱

1994년 순천대학교 전산학과 (이학사)
 1996년 2월 전남대학교 전산통계학과(이학석사)
 1999년 2월 전남대학교 전산통계학과(이학박사)
 1999년 10월~2002년 2월 한국전

산원(선임연구원)

2002년 3월~현재 순천대학교 컴퓨터교육과 조교수
 관심분야 : 그래프이론, 병렬처리 알고리즘



전 영 국

1986년 수원대학교 수학과 (이학사)
 1990년 시카고주립대 수학과 (이학석사)
 1995년 Univ. of Illinois Urbana-Champaign(컴퓨터교육박사)

2001년 오스트리아 기호연산연구소(RISC) 방문교수
 현재 순천대학교 컴퓨터교육과 부교수
 관심분야 : 컴퓨터대수시스템, 지능형교수시스템, HCI