

비틀림 댐퍼를 이용한 PTO 전동 라인의 치타음 감소

박영준 김경욱

Reduction of the Rattle Noise of PTO Driveline using a Torsional Damper

Y. J. Park K. U. Kim

Abstract

A torsional damper comprised of two stage pre-dampers was used to reduce the rattle noise generated in the PTO gear box of a direct engine-PTO driveline of agricultural tractors. It was designed and mounted to the engine flywheel to reduce the torque fluctuation-induced speed variations at the driving gears in the PTO gearbox, which were found to be main cause of the rattle noise. The effects of a hysteresis torque and a torsional stiffness of the damper on the speed variation were analyzed using an 11 degree of freedom non-linear model of the damped PTO driveline. The torsional damper was represented by a single degree of freedom model with 7 parameters. Under a constant hysteresis torque, velocity variation was reduced with decrease in the torsional stiffness of the damper. The velocity variation was also decreased with decrease in the hysteresis torque under a constant torsional stiffness. Optimum values of the torsional stiffness and hysteresis torque were obtained by the model simulation for the PTO driveline under the study. When the optimum values of the damper were used, the sound pressure level of the rattle noise was reduced by 81%, resulting in a reduction of 15 dB(A). The optimum damper also reduced the engine speed variation, resulting in a reduction of 80% at the driving gears in the PTO gearbox. The torsional damper showed a good performance in reducing the rattle noise caused by the speed variation in the direct engine-PTO driveline.

Keywords : Rattle noise, Torsional damper, Mathematical model, Optimal design

1. 서론

엔진 직결식 PTO 전동 라인의 PTO 변속부에서 발생하는 치타음의 원인은 공회전시 엔진의 토크 변동에 의하여 PTO 변속부의 구동 기어와 피동 기어가 서로 충돌하기 때문인 것으로 밝혀졌다. 즉, 구동 기어와 피동 기어 사이의 상대 각변위와 각속도가 변하기 때문인 것으로 밝혀졌다(박, 2006). 따라서 치타음을 줄이기 위해서는 두 기어 사이의 상대 각변위와 각속도 변동을 감소시켜야 한다. 기존 전동 라인의 구조를 변경하지 않는 범위에서 상대 각변위와 각속도 변동을 감소시키기 위해서는 엔진에서 PTO 전동 라인으로 전달되는 토

크 변동을 감소시켜야 한다. 즉, 엔진에서 PTO 변속부의 구동 기어로 전달되는 각속도 변동을 감소시켜야 한다.

PTO 변속부의 구동 기어로 전달되는 각속도 변동을 줄일 수 있는 방안에는 엔진 플라이휠의 질량 관성 모멘트 증가, 엔진의 공회전 속도 증가, 비틀림 댐퍼(torsional damper)의 설치 등이 있다. 그러나 플라이휠의 질량 관성 모멘트는 엔진 성능과 트랙터 성능에 직접적인 영향을 미치지 때문에 임의로 가감하기 어렵다. 또한 공회전시 엔진 속도의 증가는 연료 소비를 증가시키는 단점이 있다. 이에 비하여, 비틀림 댐퍼의 설치는 비교적 문제점이 적고 용이하게 적용할 수 있다는 장점이 있다. 즉, PTO 전동 라인에 적절한 비틀림 댐퍼를 설치

This study was supported financially by the Agricultural A&D Promotion Center (ARPC). This article was submitted for publication in May 2006, reviewed and approved for publication by the editorial board of KSAM in July 2006. The authors are Y. J. Park, KSAM member, Post-Doctoral Researcher and K. U. Kim, KSAM member, Professor, Seoul National University. The corresponding author is Y. J. Park, Post-Doctoral Researcher, Department of Biosystems and Biomaterial Science and Engineering, Seoul National University, Seoul, 151-742, Korea; Fax: 82-2-873-2049; E-mail: <pyj7277@hanmail.net>

하는 것이 PTO 변속부의 치타음을 가장 효과적으로 감소시킬 수 있는 방안으로 판단된다(박, 2006).

본 연구에서는 기존 연구(박, 2006)의 후속 연구로서 비틀림 댐퍼를 포함한 11 자유도의 PTO 전동 라인 모형을 개발하고, 이를 이용하여 비틀림 댐퍼의 설계 변수가 PTO 전동 라인의 치타음에 미치는 영향을 구명하였다. 또한 PTO 변속부의 각속도 변동을 최소화할 수 있는 비틀림 댐퍼의 최적 설계 변수를 구하였다.

2. 감쇠 PTO 전동 라인의 모형화

가. 비틀림 댐퍼의 모형화

본 연구에서 사용한 비틀림 댐퍼는 2단 스프링으로 구성된 클러치 디스크로서, 프리 댐퍼(pre-damper)인 1단 스프링은 전동 토크가 작은 경우에, 메인 댐퍼(main-damper)인 2단 스프링은 전동 토크가 큰 경우에, 무부하 공회전 상태에서 토크 변동을 흡수할 수 있도록 설계된 것이다.

그림 1은 클러치 디스크를 비틀림 댐퍼로 모형화한 것이다. 모형은 비틀림 강성, 히스테리시스 토크, 작동각이 각각 다른 2개의 스프링으로 구성하였다. 모형의 변수는 클러치의 질량 관성 모멘트, 1단 스프링의 작동각, 비틀림 강성, 히스테리시스 토크와 2단 스프링의 작동각, 비틀림 강성, 히스테리시스 토크로서 모두 7개로 하였으며, 자유도는 1로 하였다(홍 등, 1994).

비틀림 댐퍼는 먼저, 프리 댐퍼인 1단 스프링이 작동하고, 작용 토크가 특정한 값을 초과하면 메인 댐퍼인 2단 스프링이 작동하도록 하였다. 일반적으로 2단 스프링의 비틀림 강성과 히스테리시스 토크는 1단 스프링보다 크다(홍 등, 1995). 그림 2는 비틀림 댐퍼로 사용된 클러치 디스크의 특성을 작동각에 따라 나타낸 것이다.

그림 2에서 비틀림 강성에 의한 토크, $f(\theta_{fd})$ 는 작동 범위에 따라 식 (1)에서와 같이 표현할 수 있다.

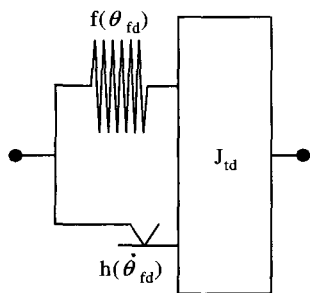


Fig. 1 Torsional damper model.

$$f(\theta_{fd}) = \begin{cases} k_{td3}\theta_{fd} + (k_{td3} - k_{td1})\phi_3 & \text{if } -\phi_4 \leq \theta_{fd} < -\phi_3 \\ k_{td1}\theta_{fd} & \text{if } -\phi_3 \leq \theta_{fd} \leq \phi_1 \\ k_{td2}\theta_{fd} - (k_{td2} - k_{td1})\phi_1 & \text{if } \phi_1 < \theta_{fd} \leq \phi_2 \end{cases} \quad (1)$$

여기서, k_{td1} = 1단 스프링의 비틀림 강성,
 k_{td2} = 2단 스프링의 +비틀림 강성,
 k_{td3} = 2단 스프링의 -비틀림 강성,
 θ_{fd} = 플라이휠과 댐퍼 사이의 상대 각변위,
 ϕ_i = 댐퍼의 작동각.

또한, 히스테리시스 토크, $h(\dot{\theta}_{fd})$ 는 식 (2)에서와 같이 표현할 수 있다. 본 연구에서 히스테리시스 토크는 건마찰 히스테리시스에 의한 것으로 가정하였다.

$$\begin{aligned} & \text{when } \dot{\theta}_{fd} > 0 \\ & h(\dot{\theta}_{fd}) = \begin{cases} h_{td3}/2 & \text{if } -\phi_4 \leq \theta_{fd} < -\phi_3 \\ h_{td1}/2 & \text{if } -\phi_3 \leq \theta_{fd} \leq \phi_1 \\ h_{td2}/2 & \text{if } \phi_1 < \theta_{fd} \leq \phi_2 \end{cases} \\ & \text{when } \dot{\theta}_{fd} < 0 \\ & h(\dot{\theta}_{fd}) = \begin{cases} -h_{td3}/2 & \text{if } -\phi_4 \leq \theta_{fd} < -\phi_3 \\ -h_{td1}/2 & \text{if } -\phi_3 \leq \theta_{fd} \leq \phi_1 \\ -h_{td2}/2 & \text{if } \phi_1 < \theta_{fd} \leq \phi_2 \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, h_{td1} = 1단 스프링의 히스테리시스 토크,
 h_{td2} = 2단 스프링의 +히스테리시스 토크,
 h_{td3} = 2단 스프링의 -히스테리시스 토크,
 $\dot{\theta}_{fd}$ = 플라이휠과 댐퍼 사이의 상대 각속도.

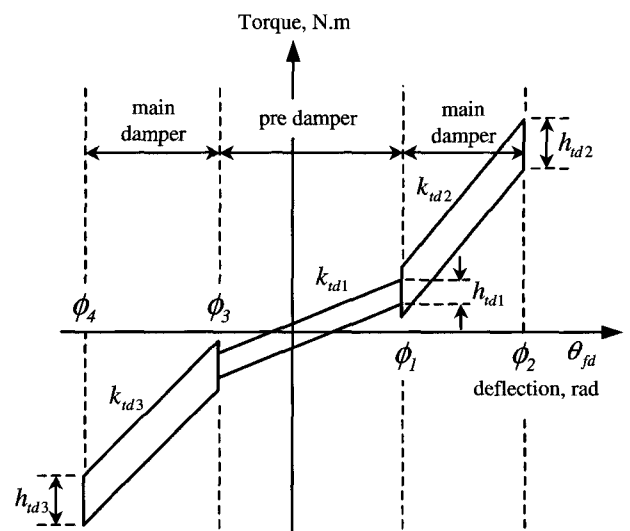


Fig. 2 Characteristic of torsional stiffness and hysteresis torque of damper.

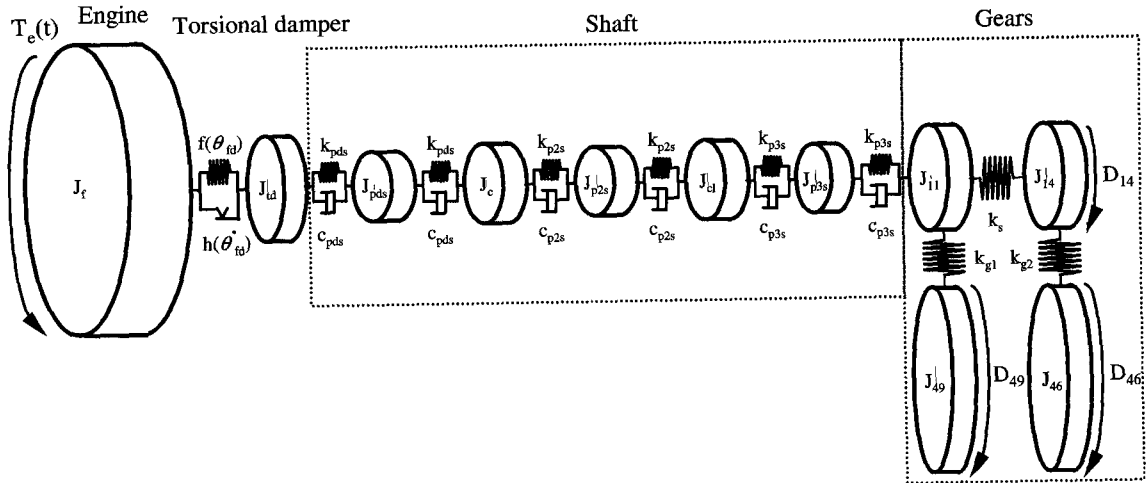


Fig. 3 Modeling of damped PTO driveline.

Table 1 Parameter value of damped PTO driveline

Torsional stiffness, N.m/rad		Torsional damping coefficient, N.m.sec/rad	
k_{pds}	8361.2	c_{pds}	2.7918
k_{p2s}	19645.8	c_{p2s}	1.8398
k_{p3s}	17836.6	c_{p3s}	2.8634
k_s	483859.4		

나. 감쇠 PTO 전동 라인의 모형화

감쇠 PTO 전동 라인은 먼저 개발한 PTO 전동 라인 모형 (박, 2006, 박과 김, 2006)에 비틀림 댐퍼를 추가하는 방법으로 모형화하였다(Wang, 1997, Padmanabhan, 1995). 비틀림 댐퍼는 엔진의 플라이휠에 결합하였다. 모형은 27개의 요소로 구성하였으며 자유도는 11로 하였다. 그림 3은 비틀림 댐퍼를 포함한 감쇠 PTO 전동 라인의 모형을 나타낸 것이다. 비틀림 댐퍼를 제외한 전동 라인의 구성 부품과 각 부품의 모형 및 각 모형의 속성값은 모두 선행 연구에서 수행한 결과 (박, 2006, 박과 김, 2006)를 이용하였으며, 표 1에서와 같다.

다. 감쇠 PTO 전동 라인의 운동 방정식

감쇠 전동 라인의 운동 방정식을 행렬로 표현하면 식 (3)에서와 같다.

$$[J]\{\ddot{\theta}\} + [C]\{\dot{\theta}\} + [K]\{\theta\} = \{T\} \quad (3)$$

여기서, $[J]$ 은 질량 관성 모멘트 행렬, $[C]$ 은 비틀림 감쇠 계수 행렬, $[K]$ 은 비틀림 강성 행렬, $\{\theta\}$ 은 각 요소의 각변위 벡터, $\{T\}$ 는 토크 벡터를 나타낸다(Singh et al., 1989, Szadkowski, 1991). 계수 행렬 $[J]$, $[C]$, $[K]$ 및 벡터 $\{\theta\}$,

$\{T\}$ 의 구성 요소는 부록에 수록하였다.

감쇠 PTO 전동 라인의 운동 방정식은 MATLAB(Mathworks, 2000)을 이용하여 풀었다. 전동 라인의 운동 방정식에는 많은 비선형 변수가 포함되어 있기 때문에 해가 수렴할 수 있도록 수치 해석의 시간 간격(step size)을 10^{-5} 초로 하였다.

3. 감쇠 PTO 전동 라인 모형의 검증

모형의 유효성은 4사이클 3기통 디젤 엔진을 장착한 시험 트랙터의 PTO 전동 라인에서 측정한 엔진의 플라이휠, PTO 변속부 구동 기 어와 피동 기어의 각속도 변동과, 모형으로 예측한 이들의 각속도 변동을 비교하는 방법으로 수행하였다. 각속도 변동은 기어 충돌의 직접적인 원인이 될 뿐만 아니라 측정이 용이하고, 특성에 일관성이 있었기 때문에 적절한 검증 변수로 사용하였다.

각속도 측정은 치타음이 가장 크게 발생하는 조건에서 실시하였으며, 엔진은 무부하 공회전 상태로, PTO 변속은 중립으로 하였다. 오일 온도가 저항 토크에 미치는 영향을 최소화하기 위하여 측정은 엔진을 시동하고 20분이 지난 후부터 실시하였다.

그림 4는 시험 PTO 전동 라인에서 측정한 플라이휠, 구동 기어 14T, 피동 기어 46T의 각속도와 모형으로써 예측한 각속도를 비교하여 나타낸 것이다. 측정한 각속도와 예측한 각속도는 모두 유사한 경향을 나타내었으며, 각속도의 변동 주기와 변동 폭도 대체로 일치하는 것으로 나타났다. 또한 변동 폭의 최대값과 최소값의 위상차도 크게 나타나지 않았다.

측정과 예측 각속도 변동을 정량적으로 비교하기 위하여 각속도 신호를 주파수 영역에서 분석하였다. 표 2는 플라이

휠, 구동 기어 14T, 피동 기어 46T의 각속도에 대한 주파수 분석 결과를 나타낸 것이다. 1.5차 및 3차 각속도 성분의 % 오차는 최대 11.9%, 최소 0%이었다. 1.5차 조화 성분의 % 오차가 큰 것은 모형에서 기어의 정밀도, 치면 거칠기, 백래

시 등을 고려하지 못했기 때문인 것으로 판단된다.

전체적으로, 예측한 각속도의 변동 폭이 측정된 각속도의 변동 폭보다 작게 나타났으나 측정 오차를 고려하면 개발된 감쇠 PTO 전동 라인 모형은 비틀림 댐퍼가 치타음에 미치는 영향을 시뮬레이션하는 데는 충분한 것으로 판단하였다.

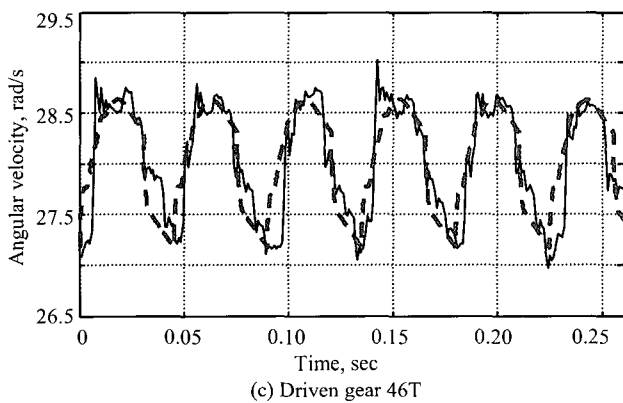
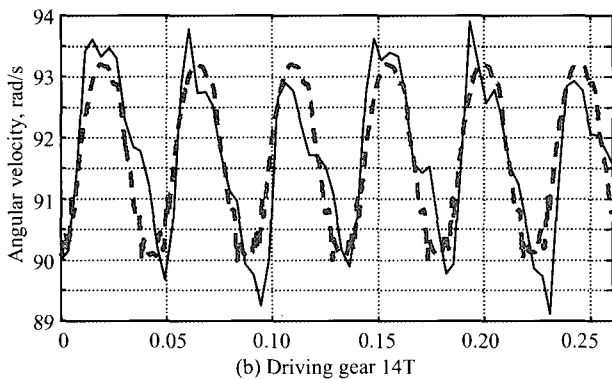
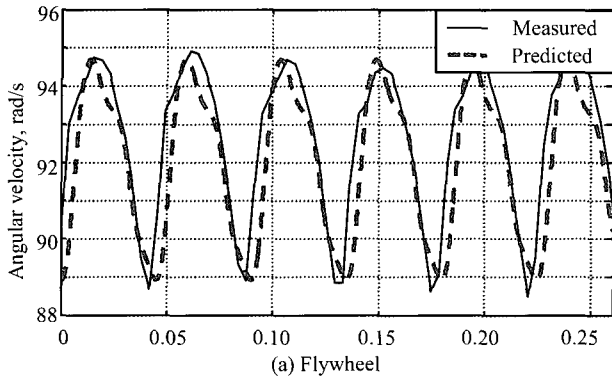


Fig. 4 Predicted and measured angular velocities in time domain.

Table 2 Model verification in frequency domain.

Component	Order	Angular velocity, r/s		Error, %
		Measured	Predicted	
Flywheel	1.5	1.99	2.00	0.5
	3.0	0.59	0.52	11.9
Driving gear 14T	1.5	1.15	1.16	0.5
	3.0	0.34	0.31	8.8
Driven gear 46T	1.5	0.51	0.50	2.0
	3.0	0.09	0.08	11.1

4. 비틀림 댐퍼의 요인별 영향 분석

치타음을 감소시키기 위한 비틀림 댐퍼의 주요 설계 변수는 1단 스프링의 비틀림 강성과 히스테리시스 토크이다. 설계 변수의 최적값을 구하기 위하여 클러치 디스크의 작동 범위에서, 1단 스프링의 비틀림 강성과 히스테리시스 토크를 변화시키며 플라이휠과 PTO 변속부 구동 기어의 각속도 변동을 시뮬레이션하였다. 클러치 디스크에서 1단 스프링의 작동 범위는 일반적으로 사용되는 $-3^{\circ} \sim 6^{\circ}$ 로, 2단 스프링의 작동 범위는 $-10^{\circ} \sim -3^{\circ}$, $6^{\circ} \sim 14^{\circ}$ 로 하였다. 또한, 2단 스프링의 +비틀림 강성, -비틀림 강성, +히스테리시스 토크와 -히스테리시스 토크는 각각 573, 286 N.m/rad, 5, 5 N.m로 하였다.

그림 5는 1단 스프링의 히스테리시스 토크 h_{td1} 을 0.4 N.m로 고정하고 비틀림 강성 k_{td1} 을 5, 10, 20, 40, 60, 80 N.m/rad로 변화시켰을 때 플라이휠과 구동 기어 14T의 각속도 변동을 시뮬레이션한 결과이다. 그림 5에서와 같이 구동

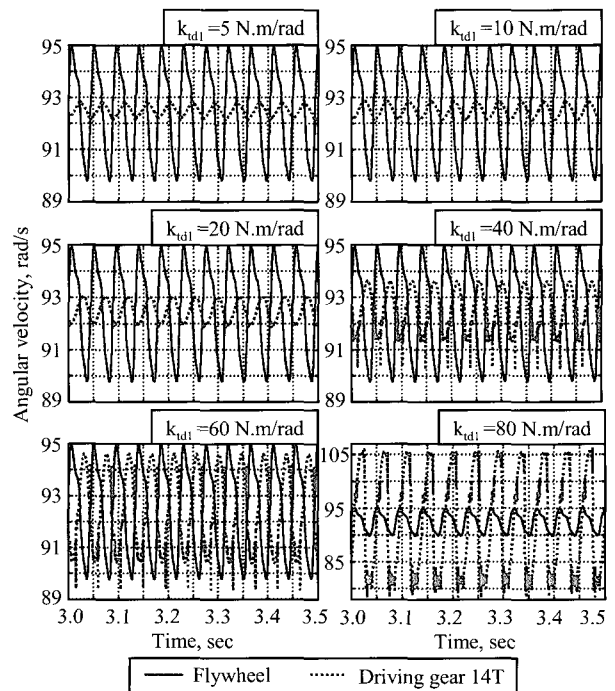


Fig. 5 Reduced velocity variation of driving gear 14T by torsional stiffness of pre-damper.

기어의 각속도 변동은 비틀림 강성이 작을수록 작았다. 비틀림 강성이 60 N.m/rad 이하일 때는 플라이휠의 각속도를 기준으로 한 구동 기어의 각속도 전달율이 1보다 작았다. 즉, 스프링이 구동 기어로 전달되는 플라이휠의 각속도 변동을 감소시켰다. 그러나 비틀림 강성이 70 N.m/rad 이상일 때는 각속도 전달율이 5 정도로서 각속도 변동을 줄이는 데는 효과가 없는 것으로 나타났다.

그림 6은 비틀림 강성에 따라 각속도 전달율을 1.5차 조화 성분의 크기비로 나타낸 것이다. 그림 6에서와 같이 히스테리시스 토크가 0.6 N.m 이하일 때는 강성에 따라 일정 한계가

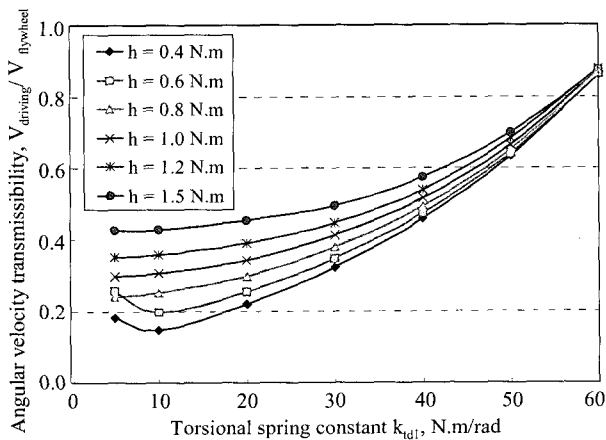


Fig. 6 Effect on angular velocity transmissibility of torsional stiffness of damper.

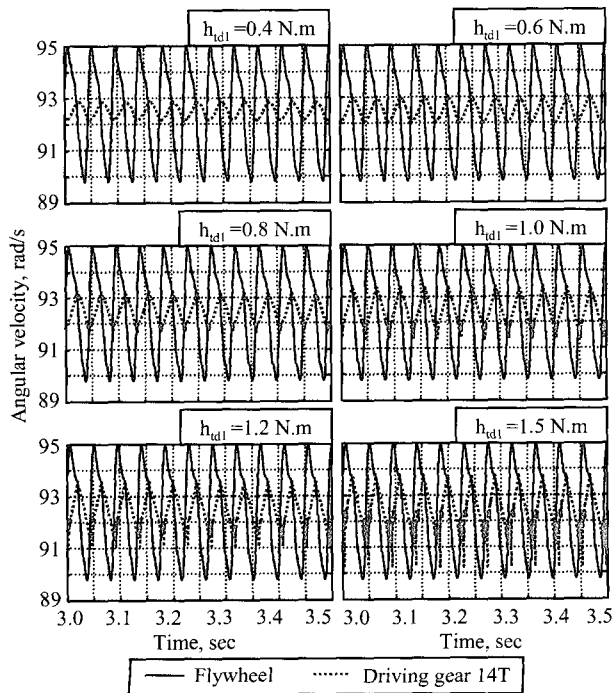


Fig. 7 Variation in angular velocities of flywheel and driving gear 14T by hysteresis torque of damper.

지 전달율이 감소하였으나 일정 한계를 지나면 다시 증가하였다. 그러나 히스테리시스 토크의 범위가 0.8~1.5 N.m일 때는 강성이 증가할수록 전달율도 증가하였다.

그림 7은 1단 스프링의 비틀림 강성 k_{dtl} 을 10 N.m/rad로 고정하고 히스테리시스 토크 h_{dtl} 를 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.5 N.m로 변화시켰을 때 플라이휠과 PTO 변속부 구동 기어 14T의 각속도 변동을 나타낸 것이다. 그림 7에서와 같이 구동 기어의 각속도 변동 폭은 히스테리시스 토크가 작을수록 작았다. 비틀림 강성이 60 N.m/rad이고 히스테리시스 토크가 0.4~1.5 N.m일 때 각속도 전달율은 1 이하이었으며 구동 기어에서 각속도 변동이 감소하는 효과가 나타났다.

그림 8은 히스테리시스 토크에 따라 각속도 전달율을 1.5차 조화 성분의 크기비로 나타낸 것이다. 그림 8에서와 같이 비틀림 강성이 작은 경우에는 히스테리시스 토크가 증가함에 따라 전달율도 증가하였으나 비틀림 강성이 큰 경우에는 히스테리시스 토크에 관계없이 전달율은 항상 일정하였다.

이상의 시뮬레이션 결과에 의하면 그림 6과 8에서와 같이 플라이휠에서 PTO 변속부의 구동 기어로 전달되는 각속도 변동을 최소화할 수 있는 1단 스프링의 비틀림 강성과 히스테리시스 토크는 각각 10 N.m/rad, 0.4 N.m이었다. 1단 스프링의 비틀림 강성이 10 N.m/rad이고 히스테리시스 토크가 0.4 N.m일 때 각속도 전달율은 0.16이었으며, 이 전달율은 치타음을 줄이는 데 충분한 것으로 판단되었다.

5. 비틀림 댐퍼의 적용

시뮬레이션의 결과를 이용하여 결정한 1단 스프링의 최적 비틀림 강성 10 N.m/rad와 히스테리시스 토크 0.4 N.m를 가

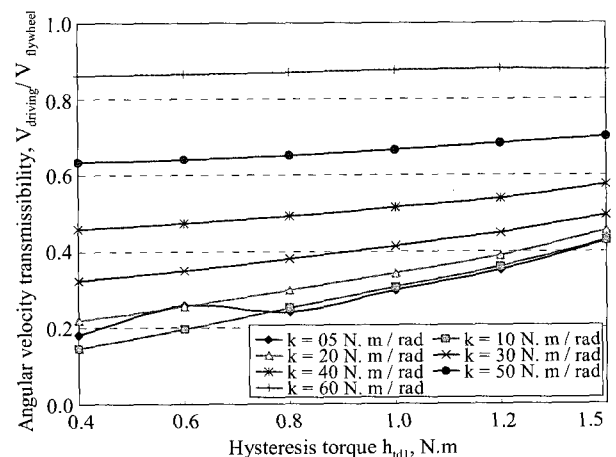


Fig. 8 Effect on angular velocity transmissibility of hysteresis torque of damper.

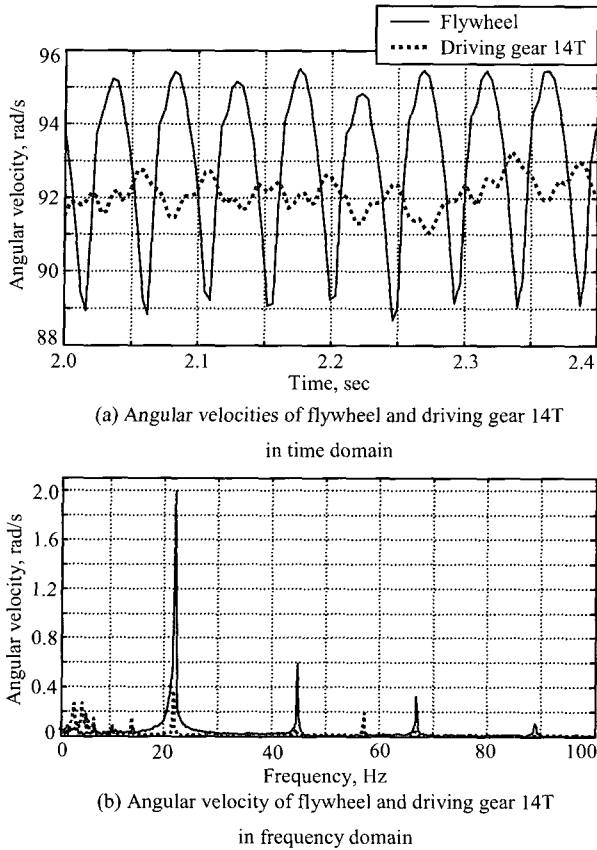


Fig. 9 Angular velocities of flywheel and driving gear 14T with a torsional damper.

진 비틀림 댐퍼를 실험 전동 장치에 설치하고 플라이휠과 PTO 변속부 구동 기어 14T의 각속도 및 PTO 변속부의 치타음을 측정하였다.

그림 9는 비틀림 댐퍼를 설치하였을 때 플라이휠과 구동 기어의 각속도 변화를 시간 영역과 주파수 영역으로 나타낸 것이다. 시간 영역에서 플라이휠의 각속도 변동 폭은 6.0 rad/s, 구동 기어의 각속도 변동 폭은 1.0 rad/s로서 전달율은 0.17이었다. 주파수 영역에서는 플라이휠 각속도의 1.5차 조화 성분은 2.0 rad/s, 구동 기어 각속도의 1.5차 조화 성분은 0.38 rad/s로서 전달율은 0.19이었다. 전달율 0.19는 비틀림 댐퍼의 1단 스프링의 비틀림 강성이 10 N.m/rad이고 히스테리시스 토크가 0.4 N.m일 때의 시뮬레이션을 이용하여 얻은 각속도 전달율인 0.16과 유사한 수준이었다.

비틀림 댐퍼에 의한 PTO 전동 라인의 치타음 감소 효과를 평가하기 위하여 전동 라인에 최적 비틀림 댐퍼를 설치하였을 때와 설치하지 않았을 때 PTO 변속부의 음압을 측정하였다.

그림 10은 댐퍼의 유무에 따라 측정된 PTO 변속부의 치타음을 시간 영역과 주파수 영역으로 나타낸 것이다. 그림

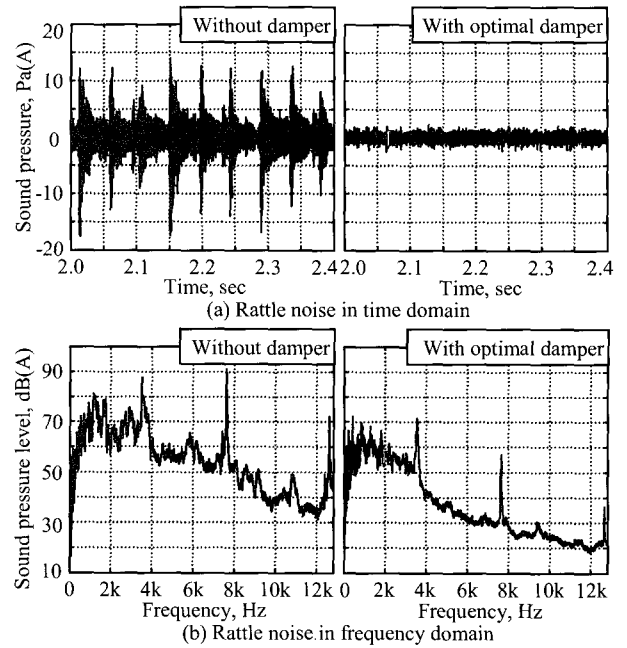


Fig. 10 Rattle noise with and without torsional damper in the PTO driveline.

10(a)에서와 같이 최적의 비틀림 댐퍼를 설치한 경우, 치타음의 원인이 되는 대부분의 피크가 사라졌다. 주파수 영역에서도 그림 10(b)에서와 같이 치타음을 구성하는 주파수 성분의 음압이 크게 낮아졌다. 댐퍼가 없을 때 큰 음압이 나타난 3,490 Hz, 7,600 Hz, 12,600 Hz는 피동 기어의 고유 진동수와 일치하였다(박, 2006). 즉, 엔진의 토크 변동에 의하여 구동 기어와 피동 기어의 상대 각속도가 증가하여 두 기어 사이에서 충돌이 일어나고, 이 때 구동 기어가 피동 기어로 전달하는 큰 충격력이 피동 기어의 고유 진동수를 가진하여 피동 기어의 고유 진동수에서 음압이 크게 나타난 것으로 판단된다. 댐퍼를 설치하였을 때는 엔진의 토크 변동이 감소하여 구동 기어와 피동 기어의 상대 각속도가 감소하므로 구동 기어가 피동 기어로 전달하는 충격력도 감소하여 피동 기어의 고유 진동수에서 발생하는 음압도 감소되었다. 비틀림 댐퍼가 없을 때 전동 라인의 치타음 수준은 105 dB(A)이었으며 댐퍼를 설치한 경우에는 90 dB(A)로서 15 dB(A)가 감소하였다.

6. 요약 및 결론

본 연구에서는 비틀림 댐퍼를 이용하여 공회전시 엔진 직결식 PTO 전동 라인에서 발생하는 치타음을 줄이기 위한 연구를 수행하였다. 2단 스프링으로 구성된 비틀림 댐퍼를 포함한 감쇠 PTO 전동 라인의 모형을 개발하고 검증하였으

원 조 문 헌

며, 검증된 모형을 이용하여 비틀림 댐퍼의 최적 설계 변수의 값을 구하였다. 비틀림 댐퍼의 1단 스프링에 대한 비틀림 강성과 히스테리시스 토크의 최적치는 클러치의 작동각 범위가 $-3^{\circ} \sim 6^{\circ}$ 일 때 각각 10 N.m/rad, 0.4 N.m인 것으로 나타났다.

최적의 비틀림 강성과 히스테리시스 토크를 가진 비틀림 댐퍼를 PTO 전동 라인에 설치하고 PTO 변속부에서 치타음을 측정하였다. 댐퍼를 설치한 PTO 전동 라인에서 측정된 음압의 변동 폭은 5 Pa(A)로서 댐퍼가 없는 경우에 비하여 21 Pa(A)가 감소하였다. 즉, PTO 전동 라인에 비틀림 댐퍼를 설치하여 15 dB(A)의 치타음이 감소하였다. 최적화된 비틀림 댐퍼의 치타음 감소 효과는 매우 큰 것으로 나타났다.

1. 박영준. 2006. 엔진 직결식 트랙터 PTO 전동라인의 치타음 분석 및 감소에 관한 연구. 서울대학교 대학원 박사학위논문.
2. 박영준, 김경욱. 2006. 엔진 직결식 PTO 전동 라인의 주요 설계 변수가 PTO 변속부의 치타음에 미치는 영향. 바이오시스템공학. 4(3): 319-325.
3. 홍동표, 정태진, 김상수, 태신호. 1994. 공회전시 비틀림 진동 저감을 위한 클러치 비틀림 특성 연구. 한국소음진동공학회지. 4(3): 319-325.
4. 홍동표, 정태진, 태신호. 1995. 자동차 공회전시 기어 래틀과 클러치 비틀림 특성에 대한 연구. 한국자동차공학회논문집. 3(2): 30-41.
5. Padmanabhan, C., R. C. Barlow, T. E. Rook and R. Singh. 1995. Computational Issues associated with gear rattle analysis. Journal of mechanical design. Vol. 117 (March): 185-192.
6. Singh, R., H. Xie and R. J. Comparin. 1989. Analysis of automotive neutral gear rattle. Journal of Sound and Vibration 131(2): 177-196.
7. Szadkowski, A. 1991. Mathematical model and computer simulation of idle gear rattle. SAE Technical paper series No. 910641.
8. The MathWorks. 2000. Using MATLAB. USA.
9. Wang, Y. 1997. Modeling and analysis of automotive transmission rattle. SAE Technical paper series No. 972054.

[부 록]

$$[J] = \begin{bmatrix} J_f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{td} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{pds} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{p2s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{cl} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{p3s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{49} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{46} \end{bmatrix}$$

$$[K] = \left[\begin{array}{c|c} [K_1] & [K_2] \\ \hline (11 \times 6) & (11 \times 5) \end{array} \right]$$

$$[K_1] = \begin{bmatrix} k_{td1} & -k_{td1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{td1} & k_{td1} + k_{pds} & -k_{pds} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_{pds} & 2k_{pds} & -k_{pds} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{pds} & k_{pds} + k_{p2s} & -k_{p2s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{p2s} & 2k_{p2s} & -k_{p2s} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{p2s} & k_{p2s} + k_{p3s} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{p3s} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{\theta\} = \begin{bmatrix} \theta_f \\ \theta_{td} \\ \theta_{pds} \\ \theta_c \\ \theta_{p2s} \\ \theta_{cl} \\ \theta_{p3s} \\ \theta_{11} \\ \theta_{14} \\ \theta_{49} \\ \theta_{46} \end{bmatrix}$$

$$\{T\} = \begin{bmatrix} T_e - h_{td1} / 2 \\ h_{td1} / 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_{g1} R_{11} \varepsilon \\ k_{g2} R_{14} \varepsilon - D_{14} \\ -k_{g1} R_{49} \varepsilon - D_{49} \\ -k_{g2} R_{46} \varepsilon - D_{46} \end{bmatrix}$$

$$[K_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{p3s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2k_{p3s} & -k_{p3s} & 0 & 0 & 0 \\ -k_{p3s} & k_{p3s} + k_s + k_{g1} R_{11}^2 & -k_s & -k_{g1} R_{11} R_{49} & 0 \\ 0 & -k_s & k_s + k_{g2} R_{14}^2 & 0 & -k_{g2} R_{14} R_{46} \\ 0 & -k_{g1} R_{11} R_{49} & 0 & k_{g1} R_{49}^2 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{g2} R_{14} R_{46} & 0 & k_{g2} R_{46}^2 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{pds} & -c_{pds} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{pds} & 2c_{pds} & -c_{pds} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_{pds} & c_{pds} + c_{p2s} & -c_{p2s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{p2s} & 2c_{p2s} & -c_{p2s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{p2s} & c_{p2s} + c_{p3s} & -c_{p3s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{p3s} & 2c_{p3s} & -c_{p3s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{p3s} & c_{p3s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$