韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 20집 제 3호, 2006. 9. 443-467

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 20, No. 3, Sep. 2006. 443-467

초등학교 2학년 학생의 곱셈적 사고에 관한 연구

장 미 라 (서울정수초등학교)
박 만 구 (서울교육대학교)

2학년 학생들의 곱셈적 사고를 조사하여 공통적인 특성과 덧셈적으로 사고할 수 있는 학생과 곱셈적으로 사고할 수 있는 학생들의 차이점을 알아본 결과는 다음과 같았다. 곱셈적 사고를 하는 2학년 학생들은 '곱하기', '몇 개씩 몇 묶음' 등의 곱셈을 나타내는 용어를 사용하여 곱셈으로 문제를 해결하였다. 또한 곱셈적 사고를 하는 학생과 덧셈적 사고를 하는 학생으로 분류할 수 있었는데 가장 하위의 사고를 하는 학생은 모든 문제를 덧셈으로 해결하였고 가장 상위의 사고를 하는 학생은 모든 문제를 곱셈으로 해결하고 부분-전체 사고가 완전하였다.

I. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

우리의 일상생활에서 사칙연산을 포함한 간단한 연산은 꼭 필요한 기능이며, 학교 수학에서도 역시 중요하게 다루어지고 있다. 초등학교에서 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈은 매우 중요하면서도 학교 수학 전반에 걸쳐있는 많은 수학적 내용들에 있어서 핵심적인 개념이다. 일반적으로 아동이 초등학교에 입학하기 전 처음으로 접하게 되는 수학은 수세기와 간단한 연산이다. 기초적인 수세기와 셈하기는 학교 수학을 통한 형식화된 수학 학습이 아닌 생활 경험을 통한 비형식적 수학으로부터 출발한다. 하지만 학교 수학에서는 형식화된 지필 계산에 지나치게 의존하며, 표준화된 알고리즘을 강조하고 있다. National Council of Teachers of Mathematics(1989, 이하 NCTM)의 '학교 수학 교육과정과 평가의 새로운 방향 (Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics)'에서는 이에 대하여 경고를 하며 학생들 스스로 고안한 알고리즘에 의한 계산 학습, 훈련과 연습에 의한 기능 중심의 계산 학습에서 연산의 의미와 연산 감각 중심의 계산학습으로의 변화를 강조하고 있다.

풍부한 연산 능력의 획득을 위해서는 연산의 의미와 역할에 대한 이해와 함께, 개념적인 이해와 계산의 효율성이 관련을 맺으며 서로 균형을 이루어야 한다(NCTM, 2000). 연산의 올바른 개념적인 이해는 학생들이 수학적 아이디어나 알고리즘을 고안하는데 도움을 주며, 수학 학습의 의미를 깨닫

* ZDM 분류: D42
* MSC2000분류: 97D40
* 주제어 : 곱셈적 사고, 덧셈적 사고, 부분-전체 사고, 초등학교

게 해 준다. 개념적인 이해의 뒷받침은 큰 수로 확장된 연산을 쉽게 하여 계산의 효율성을 높이며, 계산의 효율성을 높이는 것은 문제 해결에 도움이 된다. 만약, 연산에 대한 개념적인 이해만 있고 계산을 전혀 할 수 없다면 그 학생은 문제는 이해하지만 해결할 수 없을 것이며, 반대로 개념적인 이해는 거의 없고 계산만 잘하는 학생이 있다면 문제 이해를 통해 연산을 선택하여 해결하는 것이 아니라 의미없는 지필 계산만 하거나 문제를 이해조차 할 수 없을 것이다.

현행 7차 수학과 교육과정과 교과서에서 곱셈은 묶어 세기와 뛰어 세기를 기초로 하여 2학년에 도입되고 있고, 외국에서도 곱셈을 일반적으로 동수누가로 다루어 2학년에서 도입하고 있는 것을 볼 수 있다. 비록 아동들 중에는 곱셈이 처음 도입될 때부터 그것을 잘 이해하지만, 초등학교 내내 곱셈을 어려워한다. 아동들은 곱하는 대신에 더하고, 곱셈 조합에서 결과를 모를 때, 자신들이 알고 있는 단서에서 그것을 이끌어 내지 못한다. 이러한 계산에 있어서 어려움이 없을지라도 곱셈의 의미에 대해 어려움을 겪는 아동을 종종 볼 수 있다.

아동들이 곱셈을 이렇게 제대로 이해하지 못하고 어려워하는 이유는 곱셈에 대한 동수누가 접근법에 있거나 곱셈이 가르쳐지는 시기에 있을 수 있다. 비록 곱셈이 일반적으로 동수누가로 생각되지만, 이런 관점을 면밀히 조사해볼 필요가 있다. 곱셈을 바라보는 관점에는 두 가지 접근법이 있다. 곱셈을 동수누가와 같은 것으로 보는 일반적인 관점과 다른 것으로 보는 구성주의적인 관점이 있다. 본 연구에서는 곱셈을 단순한 동수누가를 넘어선 좀더 고차원적인 상위의 사고를 포함하는 것으로 보려고 한다.

이를 종합하여 보면, 본 연구의 목적은 곱셈을 적절히 도입하여 가르치기 위해서 아동들의 사고 발달 과정에서 곱셈의 논리를 어느 정도로 구성하고 있는지를 확인하고 2학년 아동의 곱셈지도를 바람직한 방향으로 이끌기 위한 것에 있다.

2. 연구 문제

본 연구에서는 2학년들의 곱셈적 사고를 조사하여 공통적인 특성을 찾고 또한 덧셈적으로 사고할 수 있는 학생과 곱셈적으로 사고할 수 있는 학생의 차이점을 알아내서 이것이 곱셈을 가르치는 방법에 대한 논의를 형성하는데 기여하기 위하여 다음과 같은 연구 문제를 설정하였다.

가. 2학년 학생들의 곱셈적 사고는 어떠한 특성이 있는가?

가 - 1. 2학년 학생들의 곱셈적 사고의 공통적인 특성은 무엇인가?

가 - 2. 2학년 학생들의 곱셈적 사고의 각 수준의 특성은 무엇인가?

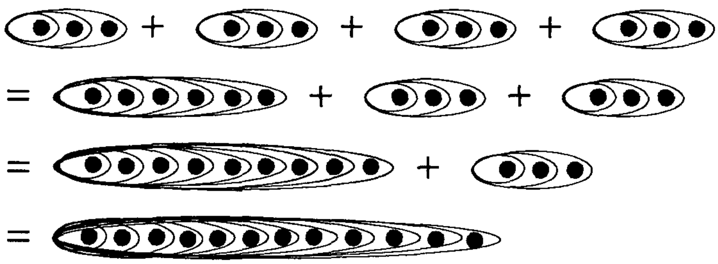
나. 2학년 수학 교과서에서는 곱셈을 어떻게 제시하고 있는가?

3. 용어의 정의

가. 곱셈적 사고와 덧셈적 사고

곱셈적 사고는 덧셈을 하는데 필요한 사고와 구별되는 곱셈의 이면에 있는 사고를 말한다. 덧셈적 사고가 한 수준에서 포함관계를 만들고, 일을 단위로 다루고, 일의 단위로 한 수준에서 연속적으로 생각하며, '몇 더'로 사고할 것을 요하는 반면에, 곱셈적 사고는 한 수준 이상에서 포함 관계를 만들고, 일 이상의 단위를 다루며, 이것을 동시에 사고하며, '몇 배'에 의해 사고할 필요가 있다. 예를 들어, 사과 3개씩 담을 수 있는 바구니 4개가 있다고 할 때, 바구니에 담을 수 있는 사과는 모두 12개이다(3×4=12의 상황). 곱셈적 사고를 하는 아동들은 '전체'는 12이고 '용기'는 4이며 용기 속에 넣어지는 '원소'가 3임을 한 번에 생각한다. 따라서 곱셈적으로 사고하는 아동들은 이 세 가지 수준 모두 간의 포함 관계를 형성하여 3의 4배라는 생각으로 사고한다. 본 연구에서는 이러한 사고 수준에 이른 아동들의 사고를 곱셈적 사고라고 한다.

이와 대조적으로 <그림 I - 1>과 같이 덧셈적 사고는 더해지는 각 단위가 일로 만들어진 단위로 이루어져 있으며 포함 관계 또한 1이 2로, 2가 3으로, 계속 해서 12까지 간다는 점에서 하나의 수준만으로 만들어지며 '몇 더'로 사고가 이루어진다.



<그림 I - 1> 3×4=12에 대한 덧셈적 사고 (Piaget, 1987, p. 78 수정)

곱셈적 사고와 덧셈적 사고를 구분하는 가장 큰 기준은 사고의 특징이 수직적인가 수평적인가에 달려있다. <그림 I - 1>에서도 볼 수 있듯이 곱셈적 사고는 여러 수준에서 포함관계를 만들고, 동시에 이것들을 생각할 수 있으며 '몇 배'로 사고한다. 그러나 덧셈적 사고는 한 수준에서 포함관계를 만들고, 이것이 수평적으로 증가하며 '몇 더'로 사고한다.

나. 사고 발달 수준

곱셈적 사고는 단순한 덧셈의 확장이 아닌 보다 복잡하고, 복합적인 사고 과정이 필요하다. 따라서 곱셈적 사고를 나타내기 위해서 아동들은 다양한 세기(counting) 경험 이외에도 반영적인 추상화의 과정을 거쳐야 한다. 이것은 아동들이 단순한 세기 경험에서 덧셈적 사고로, 덧셈적 사고에서 곱셈적 사고로 발달해 감을 의미한다.

다. 부분-전체 사고

부분-전체 사고란 전체와 부분을 동시에 생각할 수 있는 사고를 말한다. 곱셈적 사고를 할 때는 한 수준 이상에서 포함관계를 만들어야 한다. 이는 수직적 사고를 의미하는데, 가장 중요한 사고가 부분-전체 사고이다. 부분-전체 사고가 가능한 학생은 다음과 같은 문제를 해결할 수 있다. 예를 들면, 3×4를 바둑알 3개씩 4묶음이라고 표현을 한다고 하자. 2묶음을 감추었다고 했을 때 3개씩 2묶음으로 바둑알을 개수를 알 뿐만 아니라, 3개씩 묶음이 모두 합해 바둑알 18개를 만들기 위해서 몇 개나 필요한지를 계산할 수도 있다.

II. 이론적 배경

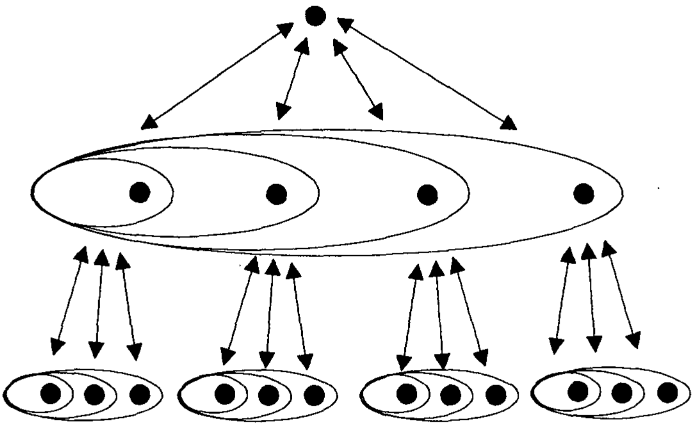
1. 선행 연구 분석

가. Piaget의 연구

Piaget는 덧셈과 곱셈간의 차이를 추상화 수준의 수와 아동이 동시에 만들어야 하는 포섭관계의 수에 있는 것으로 기술하였다. <그림 II- 1>에서 볼 수 있는 바와 같이, 덧셈적 사고는 더해지는 각 단위가 일로 만들어진 단위로 이루어져 있다는 점에서, 하나의 추상화 수준만을 포함하고 있다. 포섭관계 또한, 1이 2에, 2가 3에, 계속해서 12까지 간다는 점에서 하나의 수준만으로 만들어 진다. 묶음은 한 수준에서 '3 + 3 한 개 더', '6 + 3 한 개 더', 그리고 마지막으로 '9 + 3 한 개 더'와 같이 연속적으로 형성된다.

<그림 II- 1> 3×4=12의 덧셈적 표현 (Piaget, 1987, p. 78)

대조적으로 곱셈은 덧셈에서 필요하지 않은 두 종류의 관계의 형성을 반드시 수반한다. 곱셈에 관한 관계가 <그림 II- 2>에 제시되어 있다. <그림 II- 2>를 보면, 1의 단위 세 개를 3의 단위 한 개로 만드는 것은 1의 단위들로만 생각하는 것 보다 더 고차적인 수준의 추상화이다. 포섭 관계의 복잡성도 분명하다. 1이 2에 포함되고 2가 3에 포함되는 하나의 단위 수준에서, 그리고 3 한 개가 3 두 개에, 3 세 개가 3 네 개에 포함되는 3의 단위 수준에서 수평적으로 나타나는 포섭 관계가 존재한다. 포섭 관계는 '1' 세 개가 '3' 한 개의 각 단위에 포함되고, '3' 단위 네 개가 '전체 12'에 포함된다는 점에서 또한 수직적으로 나타내어진다. 화살표는 이런 모든 관계가 동시에 만들어져야 함을 나타내기 위해 양방향을 가리키고 있다.



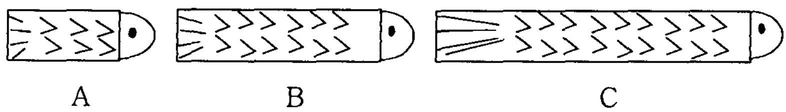
<그림 Ⅱ- 2> 3×4=12의 곱셈적 표현 (Piaget, 1987, p. 78)

세 가지 위계적인 순서 체계 가운데 포섭 관계의 동시적인 합성과 조정은 곱셈의 초기 사고에 핵심적인 것으로 볼 수 있다. 세 가지 수준은 '전체(3×4=12에서 12)', '용기(3×4=12에서 4)', '용기에 넣는 원소(3×4=12에서 3)'이다. 이들은 서로 관계를 맺으며 연관되어 있다.

Piaget의 연구에서 주목할 점은 곱셈과 덧셈의 추상화와 포섭관계이다. 곱셈은 여러 추상화 수준을 만들지만, 덧셈은 하나의 추상화의 수준을 만든다. 또한 곱셈은 수직과 수평적 포섭관계를 모두 갖지만, 덧셈은 수평적 포섭관계만을 갖는다. 즉 곱셈은 덧셈보다 좀더 복잡하고 고차원적인 사고를 요구한다는 것이다.

나. Clark와 Kamii의 연구

Clark와 Kamii는 버밍햄과 알라바마의 교외에 위치한 중산층의 한 국립학교의 1학년부터 5학년까지 336명의 아동을 대상으로 연구를 하였다. Sinclair에 의해서 고안된 과업을 사용하였는데, 이 과업에서 사용된 재료는 합판으로 만들어진 5, 10, 15cm의 '물고기' 3개와 지름이 9mm인 약 100개의 플라스틱 칩으로 구성되어 있다. 이 '물고기'는 넓이는 그대로 두고 길이만을 변하게 한 뱀장어를 닮았다(<그림 Ⅱ- 3> 참조).



<그림 Ⅱ- 3> 과업에 사용된 '물고기'

과업은 아동에게 다음의 질문에 행동을 취하도록 하는 것이다. "만약 이 물고기(A)가 칩 1개를 먹을 수 있다면, 다른 두 물고기는 칩 몇 개를 먹을 수 있을까? 이 물고기(B)는 가장 작은 물고기(A)의 2배를 먹을 수 있고, 이 가장 큰 물고기(C)는 가장 작은 물고기(A)의 3배를 먹을 수 있다는 것을

기억해라." 그런 후에 비슷한 유형의 문제를 질문하였다.

이 과업을 선택한 이유는 1배, 2배, 3배와 같은 곱셈적 진술이 명백하게 진술되어 있고, 아동이 곱셈적 사고를 수로 대답을 하지 않고 행동으로 보여줄 수 있기 때문이다.

인터뷰하여 분석한 결과 연구 대상 아동들(덧셈적 사고에서 곱셈적 사고로의 발달과정에 있는 아동)은 <표 Ⅱ- 1>과 같은 4가지 수준을 가지고 있는 것으로 확인되었다.

<표 Ⅱ- 1> 물고기 과제에 대한 사고 수준과 사고 유형

사고 수준	사고 유형
수준 Ⅰ A<B<C 관계가 성립하면 어떤 수도 다 받아들여지는 수준	
수준 Ⅱ A보다 B, C가 차례로 +1씩 더 먹는다고 반응하는 수준	덧셈적 사고
수준 Ⅲ A보다 B는 +2, C는 +3씩 더 먹는다고 반응하는 수준	
수준 ⅣA A, B, C의 관계를 즉시 파악하지 못하나 반대 제안을 듣고 관계를 파악하는 수준	곱셈적 사고
수준 ⅣB A, B, C의 관계를 즉시 파악하는 수준	

학년에 따른 각 단계 아동의 수와 백분율은 <표 Ⅱ- 2>와 같다. 수준 Ⅰ에서는 1학년 아동 8명과 2학년 아동 1명이 아직 덧셈적 사고를 하지 못하였다. 덧셈적 사고의 범주는 수준 Ⅱ와 수준 Ⅲ의 아동으로 구성되어 있고 곱셈적 사고의 범주는 수준 ⅣA와 수준 ⅣB의 아동으로 구성되어 있다. 표에서 알 수 있듯이 곱셈적 사고를 하는 아동의 백분율은 증가하고 있는 반면 덧셈적 사고를 하는 아동의 백분율은 유사하게 감소하고 있었다. 3학년 아동의 대부분은 이 과정에서 곱셈적 사고를 보여주었다. 확실하게 곱셈적 사고를 할 수 있는 아동(수준 ⅣB)은 1학년 1.7%에서 5학년의 48.7%로 증가하고 있음을 알 수 있다.

<표 Ⅱ- 2> 학년별 사고 수준별 아동 수와 백분율

학년	1		2		3		4		5	
수준 Ⅰ	8	(13.8%)	1	(1.5%)						
수준 Ⅱ	31	(53.4%)	28	(43.1%)	8	(13.6%)	12	(15.4%)	5	(6.6%)
수준 Ⅲ	8	(13.8%)	7	(10.8%)	13	(22.0%)	2	(2.6%)	3	(2.6%)
수준 ⅣA	10	(17.2%)	23	(35.4%)	25	(42.4%)	42	(53.8%)	32	(42.1%)
수준 ⅣB	1	(1.7%)	6	(9.2%)	13	(22.0%)	22	(28.2%)	37	(48.7%)
합계	58	(99.9%)	65	(100.0%)	59	(100.0%)	78	(100.0%)	76	(100.0%)

이 연구에서 주목할 점은 곱셈적 사고가 덧셈적 사고와 명확하게 구분된다는 것이다. 위의 표에서 볼 수 있듯이 덧셈적 사고를 하는 아동은 +1씩, 또는 +2, +3씩 더 먹는다고 반응하였다. 그러나 곱셈적 사고를 하는 아동은 2배, 3배 더 먹는다고 반응하였다.

또 다른 주목할 점은 곱셈적 사고는 일찍 나타나서 매우 느리게 발달된다는 것이다. 2학년에서 45% 정도의 학생들이 완전하지는 않지만 곱셈적 사고를 하고 있었고, 5학년의 49% 만이 완전한 곱셈적 사고 수준(수준 ⅣB)이었음을 확인할 수 있었다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구절차

가. 연구 대상 선정

서찬숙(2003)의 문제 장면 모델을 수정하여 여러 가지 상황에서의 곱셈문제를 아동에게 투입하였다. 문제는 조사 대상이 2학년임을 감안하여 「① 동수누가, ② 비율, ③ 비교, ④ 정렬과 넓이, ⑤ 조합」의 문장제로 설정하였다. 이를 통해서 간단하게 아동의 곱셈적 사고의 수준을 알아본 후, 6명을 선정하여 구체적인 인터뷰로 들어가도록 하였다. 문제 장면 모델로 만든 사전 검사지의 문제는 <부록 1>과 같다.

<표 Ⅲ- 1> 연구 대상 선정

<table>
<tr><th>사전 검사지의 해결방법</th><th>수학 성취도 수준</th><th>학생수</th><th>학생</th></tr>
<tr><td rowspan="3">덧셈</td><td rowspan="2">하</td><td rowspan="2">4명 중 2명</td><td>정현</td></tr>
<tr><td>미향</td></tr>
<tr><td rowspan="2">중</td><td rowspan="2">4명 중 2명</td><td>성훈</td></tr>
<tr><td rowspan="3">곱셈</td><td>혜진</td></tr>
<tr><td rowspan="2">상</td><td rowspan="2">4명 중 2명</td><td>진호</td></tr>
<tr><td>영수</td></tr>
</table>

나. 연구 대상

본 연구는 서울시 성북구에 소재한 J초등학교 2학년 2학급(남 26명, 여 24명)을 대상으로 사전조사를 실시하여 연구에 적합한 6명을 선정하였다. 각 학생들의 학습에 대한 능력과 태도, 사전 검사지의 풀이는 다음과 같다.

정현: 하수준 학생으로 굉장히 산만하며 집중할 줄 모르는 학생이다. 한 가지 일에 1분 이상 지속하기 어려우며 수업 중에도 계속 다른 일을 하고 학습태도도 좋지 못하다. 기본적인 읽기, 쓰기, 셈하기는 가능하나 다음의 미향이보다 더 아래 수준의 학생이다. 수학시간이라고 해서 관심을 보이지는 않고 대부분 시간에 연필이나 지우개를 가지고 꼼지락거리며 수업에 전혀 집중하지 못한다.

미향: 하수준 학생으로 자기 고집이 강하나 공부하는 것에는 욕심이 없는 학생이다. 앉아서 그림 그리는 것을 좋아하나 학습에는 전혀 관심이 없다. 학교에서 공부를 하지는 않지만 부모의 관심으로 기본적인 읽기, 쓰기, 셈하기는 할 줄 안다. 수학에서는 기본적인 연산을 좋아하며 복잡한 문제, 문장제는 아예 해결하려는 시도를 하지 않는다.

성훈: 중수준 학생으로 자유분방하며 구속을 싫어하는 학생이다. 앉아서 무엇인가를 하는 것을 매우 싫어하며 활동량이 많다. 학습을 꾸준히 하지는 않지만 한번 알고 나면 잘 잊지 않으며 그것을 활용할 줄 안다. 수학의 간결함을 좋아하고 단순연산능력이 뛰어나며 빠르다.

혜진: 중수준 학생으로 주어진 과제를 매우 열심히 빈틈없이 하는 학생이다. 독서량도 많고, 특히 국어에서 문장구성능력이 뛰어나다. 수학에서도 연산보다는 설명하는 것을 좋아하며 즐긴다. 학습태도가 매우 바르고 학습량도 꾸준해서 수학성취도 면에서 좋은 결과를 얻었다. 하지만 새로운 것을 생각하는 것이나 틀을 깨는 사고를 하는 것을 두려워하며 싫어한다.

진호: 상수준 학생으로 학습태도가 매우 바르며 조용하고 침착하게 공부하는 학생이다. 무엇인가 알려고 하는 것보다는 주어진 것을 열심히 하는 경향이 있다. 수학에 있어서 연산능력이 정확하고 빠르다. 언어와 연결된 수학문제를 정석대로 해결하지만 자기만의 방법을 사용하지는 않는다.

영수: 상수준 학생으로 전과목에서 뛰어난 성취도를 보이는 학생이다. 모든 일에 호기심이 많으며, 논리적으로 생각하는 능력이 뛰어나다. 또한 독서를 많이 하여 아는 것도 많다. 수학에 있어서 연산능력이 뛰어나고 문장제를 잘 해결하며 문제해결에 대한 이유를 알고 말할 수 있다. 여러 가지 다른 방법으로 문제를 해결하려는 시도를 한다.

2. 자료 수집

본 연구에서의 자료는 비디오를 이용한 인터뷰 녹화자료이다. 연구의 초기에 대상 학생의 배경을 알아보고, 교수 실험 과정 중에 학생의 사고를 알아보기 위하여, 그리고 교수 실험이 끝난 후에 녹화자료에서 의문점이 있어서 심층적으로 이해할 필요가 있을 때 실시하였다.

가. 인터뷰 문제의 분석

아동의 곱셈적 사고를 조사하기 위해서 아래와 같은 인터뷰 문제를 제작하였다. 각 문제와 그 문제를 통해서 알아내고자 하는 것들을 서술하였다.

1. ○○는 쿠키를 7상자를 받았다. 각 상자에는 쿠키가 4개씩 들어있다. 쿠키는 모두 몇 개인가?

첫 번째 문제는 곱셈식 4×7의 문장제이다. 2, 3, 4번 문제를 이어가기 위한 첫 번째 상황적인 문제로 교과서에 제시되어 있는 형식의 문제이다. (한 자리 수)×(한 자리 수)의 문장제에서 두 수가 모두 제시되어 있다. 이런 형식의 문제는 제시된 두 수를 곱하는 것으로 학생이 기계적으로 학습을 할 수

있기 때문에, 곱셈의 진정한 이해를 알아볼 수 있는 문제라고 단언할 수는 없다.

2. 선생님이 쿠키 3상자를 숨겼다. 숨긴 쿠키는 몇 개인가? 3. 남은 쿠키는 몇 상자인가? 남은 쿠키는 몇 개인가?

두 번째 문제는 (한 자리 수)×(한 자리 수)의 피승수가 수로 제시되지 않은 문제이다. 이 문제를 덧셈 또는 곱셈으로 해결하는 것에서 학생이 어느 수준에 해당하는가를 알 수 있을 것이다.

세 번째 문제는 피승수와 승수 모두가 수로 제시되지 않은 문제이다. 특히 남은 쿠키를 물어봄으로써 부분-전체 사고를 알 수 있는 문제이다. 전체 '7'을 잊어버리지 않고, 두 부분 3과 4로 분해될 수 있음을 안다면 부분-전체 사고가 가능하다는 것이다. 또한 전체 쿠키의 개수에서 3상자 분량의 쿠키를 제거하여 남는 쿠키의 개수를 찾아낼 수 있다면 부분-전체 사고가 완전하다고 말할 수 있다.

4. 선생님이 ○○에게 숨긴 쿠키를 다시 주어서 처음의 쿠키 7상자가 되었다. 선생님이 쿠키 8개를 ○○에게 더 주었다. ○○가 가지고 있는 쿠키는 모두 몇 상자가 되는가?

좀더 복합적인 부분-전체 추론이 가능한지를 살펴보는 문제이다. 7상자에서 낱개 8개를 더했을 때, 몇 상자가 되는지를 물어보게 된다. '원소'가 8개가 증가하면 '용기'가 몇 개가 되어야하는지를 묻는 문제이다. 이는 세 가지 수준 모두 간의 포함관계를 복합적으로 생각해야하는 문제이다.

나. 인터뷰 진행 방법

교수 실험의 방법을 사용하여 아동이 어떻게 문제를 해결했는지 알아간다. 이를 위해서 "어떻게 해서 그런 답을 얻게 되었지?" 또는 "어떻게 해서 그렇게 생각했지?" 라고 묻는다. 이는 아동의 수학적인 반응에 대한 정확한 해석을 하기 위함이다. 문제 1에서 문제 4까지 차례대로 제시하며 문제 2와 문제 3에서는 쿠키 수로 대답하면 상자 수로 물어보고, 상자 수로 대답하면 쿠키 수로 물어보아 부분-전체 사고를 파악하도록 한다. 또한 다른 사람의 방해가 되지 않는 조용한 곳에서 아동의 앞에 카메라를 설치하고, 아동이 조작할 수 있는 바둑알, A4용지, 색연필을 제공한다. 문제를 제시한 후 아동의 활동을 관찰한다.

3. 분석 방법

자료 분석 방법은 질적 연구 방법론을 이용하며 학생의 인터뷰를 녹취하여 프로토콜을 작성하였다. 프로토콜에서 교사와 학생의 말을 한 문장씩 코드화하였다. 코드화의 뜻은 다음과 같다.

<표 Ⅲ- 2> 코드화의 의미

A	T(S)	-	001
각 인터뷰의 학생을 나타내는 대표문자	교사가 한 말이면 T, 학생이 한 말이면 S		말한 순서

또한 총 6명의 학생을 인터뷰하여 코드화한 대표문자는 학생별로 다음과 같다.

<표 III- 3> 연구대상별 대표문자

학생명	대문자	학생명	대문자	학생명	대문자	학생명	대문자	학생명	대문자	학생명	대문자
정현	A	미향	B	성훈	C	혜진	D	진호	E	영수	F

프로토콜에 나타난 특징을 살펴보고 2학년 학생의 공통적으로 드러나는 특징에 대해서 서술하고, 각 학생이 곱셈적 사고의 어느 수준에 해당하는지를 서술하였다. 수준에 관한 서술에서는 그 수준을 나누는 기준을 서술하였다. 그러기 위해서 상황 표현과 풀이 과정을 나누어 서술하였다. 또한 학생의 독특한 사고가 나타난 부분을 찾아 곱셈적 사고와 연관지어 서술하였다. 교과서 분석은 곱셈적 사고의 관점에서 서술하였다. 곱셈적 사고의 관점에서 바람직한 부분과 더 첨가하여야 할 부분에 대하여 서술하였다.

Ⅳ. 분석 및 결과

1. 2학년 학생들의 곱셈적 사고의 공통적인 특성

공통적인 특성을 살펴보면 '곱하기', '몇 개씩 몇 묶음' 등의 곱셈을 나타내는 용어를 사용하고 있다. 이는 덧셈적 사고에 해당하는 아동과 구별되는 특징이다. 다음의 프로토콜을 살펴보면 곱셈의 상황을 나타내는 용어들을 볼 수 있다. 또한 곱셈구구를 사용하고 있는 모습을 볼 수 있다.

FS-002 영수: 4개씩 7상자니까 7 곱하기 4하니까 28이 됐어요.
FS-005 영수: 4개씩 3묶음이니까.
FS-008 영수: 4상자에 4개씩 곱해서 할 수도 있어요.
ES-002 진호: 7 곱하기 4를 해서.
ES-005 진호: 4 곱하기 3.
ES-007 진호: 4 곱하기 4를 했어요.
DS-002 혜진: 7곱하기 4도 되고, 4곱하기 7도 되요.
DS-006 혜진: 그러니까 4 곱하기 3.

'4개씩 7상자', '4개씩 3묶음' 등은 곱셈의 상황을 나타내는 용어로 이런 말들을 사용한다는 것은 곱셈적 사고가 더 지배적이라는 것을 보여준다. 이러한 상황 표현과 함께 '7 곱하기 4', '4곱하기 3' 등은 함께 풀이 과정도 곱셈으로 해결하는 것으로 보아 전체적인 사고가 곱셈적 사고라고 말할 수 있다.

곱셈적 사고를 분석하여 보았을 때, 2학년 학생의 곱셈적 사고는 다음과 같은 특징을 가지고 있다.

가. 조작활동을 하지 않고 상황을 수학화 또는 추상화함

곱셈적 사고를 하는 학생의 경우, 바둑알을 사용하거나 그림을 그려서 문제를 해결하는 모습을 볼 수 없었다. 조작활동의 도움 없이 상황을 바로 추상화할 수 있었다. 2학년 학생의 경우 이미 구체물을 가지고 조작을 해야 하는 단계는 지난 것으로 볼 수 있다. 머릿속으로 상황을 그릴 줄 알며, 이를 곧바로 곱셈식으로 나타내어 수학화 또는 추상화할 수 있었다. 다음은 상황을 바로 수학화 또는 추상화하는 예이다.

FT-011 교사: 그러면 남은 쿠키는 몇 개야?
FT-012 교사: 내가 3상자를 가져갔잖아요.
FT-013 교사: 남은 쿠키는?
FS-006 영수: 16개요.
FT-014 교사: 왜 16개요?
FS-007 영수: 28개니까 그중에 12개를 빼면은 그렇게 되니까.
FT-015 교사: 28개에서 12개를 뺐어요?
FT-016 교사: 다른 방법으로 풀 수 있을까?
FT-017 교사: 어떻게?
FS-008 영수: 4상자에 4개씩 곱해서 할 수도 있어요.
FT-018 교사: 좋은 방법이네.

나. 학습한 알고리즘을 신뢰함

곱셈식이나 덧셈식으로 문제 해결하여 그 결과가 틀렸을 때에 자기만의 방법으로 되돌아가서 문제를 해결하는 학생은 없었다. 무엇인가를 그리거나 구체물을 조작하는 모습은 볼 수 없었고, 다시 수식을 사용하거나 곱셈구구를 사용하여 문제를 해결하였다. 이는 자기만의 방법보다는 학교에서 배운 알고리즘을 더 신뢰하는 것으로 생각할 수 있다.

CS-004 성훈: (7×4=32라고 쓴다.)
CS-005 성훈: 7 곱하기 4……?
CS-006 성훈: 32개.
CS-008 성훈: 7 곱하기 4.
CS-009 성훈: 아니구나.
CS-010 성훈: 28이잖아.

성훈이의 경우를 살펴보면 7×4를 곱셈구구를 사용해서 32라고 대답한 후에 그것이 맞는 답이 아님을 알고 다시 생각하는 모습을 볼 수 있다. 결과가 바르지 않는 경우 다시 구체물을 조작하는 모습은 볼 수 없고, 단지 곱셈구구를 다시 외워서 답을 말하고 있다.

2. 2학년 학생들의 수준별 사고의 특성

각 학생들의 사고수준을 나누는 기준을 인터뷰 문제를 곱셈으로 또는 덧셈으로 해결하는가에 따라서 <표 Ⅳ-1>과 같이 2학년 학생의 사고 수준을 분류하였다.

<표 Ⅳ-1> 2학년 학생의 각 사고의 수준

사고 유형	해결 방법	사고 수준
덧셈적 사고	2, 3, 4번 문제를 덧셈으로 해결	수준 ⅠA 모든 문제를 덧셈으로 해결하는 사고의 수준
		수준 ⅠB 교과서 문제만을 곱셈으로 해결하고 나머지 문제는 덧셈으로 해결하는 사고의 수준
곱셈적 사고와 덧셈적 사고의 중간	1, 2, 3, 4번 문제를 덧셈과 곱셈을 섞어서 사용하여 해결 (3번 문제를 덧셈을 사용해서 해결)	수준 ⅡA 부분-전체 사고가 불완전하고 2번 문제의 상황 표현이 곱셈적이고 풀이 과정이 덧셈적인 사고의 수준
		수준 ⅡB 부분-전체 사고가 불완전하고 2번 문제의 상황 표현이 곱셈적이고 풀이 과정이 곱셈적인 사고의 수준
곱셈적 사고	1, 2, 3, 4번 문제를 곱셈으로 해결	수준 ⅢA 부분-전체 사고가 불완전한 사고의 수준
		수준 ⅢB 부분-전체 사고가 완전한 사고의 수준

가. 덧셈적 사고 학생의 상황표현과 풀이과정

<표 Ⅳ- 2>는 덧셈적 사고인 학생의 상황 표현과 풀이 과정을 나누어서 작성한 것이다. 인터뷰 문제를 해결할 때 문제 1을 제외하고 모두 덧셈으로 문제를 해결하였기 때문에 덧셈적 사고로 분류하였다. 두 학생을 나누는 기준은 문제 1, 즉 교과서 문제를 덧셈으로 해결하였는가 곱셈으로 해결하였는가에 달려있다.

<표 Ⅳ- 2> 덧셈적 사고인 학생의 상황 표현과 풀이 과정

	문제	정현	미향
상황 표현	1	**AS-001 (허공을 바라본다.) 28개.**	**BS-001 어…4개가 7개 있으니까… 21개요.** **BS-002 28개요.**
	2 3	AS-003 (허공을 바라본다.) 21개요. AS-007 12개. AS-008 (허공을 바라본다.) 12개요.	BS-007 어…12개요. BS-014 그건…16개요.
	4	AS-013 7상자요. AS-015 모두 8상자요. AS-019 9상자요. AS-009 한 상자에 4개씩 있으니까 3상자를 빼면은 4상자가 남아가지고 거기 4상자에는 4개가 들어있으니까. AS-016 7상자가 있었는데, 거기에서 8개가 왔으면 한 상자에 7개니까, 8개에서 7개 해가지고.	BS-020 7상자에다가 8상자를 하면요. BS-022 (자신이 없는 듯 작은 목소리로) 15상자… BS-027 23개요.

풀이 과정	1	**AS-002 7 더하기 7은 14니까, 7 더하기 7을 또 해가지고 14 되가지고, 14 더하기 14는 28이니까요.**	**BS-005 그러니까 7곱하기 4로 했어요.**
	2 3	AS-004 7 더하기 7은 14였으니까, 7을 더하면 21이니까.	BS-008 일단은 4에다가요. BS-009 (양쪽손 모두 손가락 4개씩을 펴면서) 8을 하면요. BS-010 (다시, 양쪽손 모두 손가락 4개씩을 펴면서) 일단은 10을 먼저 생각해요. BS-011 4를 하면요, 4에다가 또 4를 이렇게 더하면요. BS-012 (양쪽손 모두 손가락 2개씩을 펴면서) 2개를 하면요, 10개잖아요. BS-013 그 4개의 나머지가 있으니까요.
	4		BS-021 (손가락을 흔들면서) 이렇게 10을 상상해본 다음에 아까처럼 하면 되요. BS-023 (입으로 중얼중얼 거린다.) 일곱… BS-029 어, 아까 전에 한 거를 더해가지고 8개를 한 번 더 세어봤어요.
전체적인 해결방법		문제로 4개씩 7상자를 제시하였지만 7개씩 4상자로 생각하고 있는 모습을 볼 수 있다. 이는 문제를 해결할 때 앞에 나온 수를 먼저 더하거나 곱하게 되는 것이 영향을 준 것으로 생각해 볼 수 있다. 4번 문제까지 7개씩 이라는 생각이 계속 남아있어 문제 해결을 실패로 이끌고 있다. 전체적으로 덧셈으로만 문제를 해결하고 있다. 덧셈 전략 중 2배 전략을 특히 더 많이 사용하고 있다. 덧셈 계산도 실패하는 경우가 있고, 틀린 것을 맞다고 확신하기까지 하였다. 덧셈적 사고가 지배적이라고 할 수 있다.	교과서 문제에서 덧셈으로 문제 해결방법이 바뀐다. 그 후로는 계속해서 덧셈과 뺄셈만을 사용하여 문제를 해결하고 있다. 마지막의 8개를 더 주었다는 상황에서는 상자로 생각하지 못하고 계속해서 쿠키의 개수만을 말하고 있다. 수식이나 그림 등을 사용하지는 않았다. 단지 머릿속으로 생각하며 그것을 말로 표현하였다. 답에 대한 설명을 요구하면 덧셈을 하는 과정을 장황하게 설명하였다. 먼저 10을 만들고 나머지를 더하는 방법으로 덧셈을 하는 것을 볼 수 있다. 이것은 손가락을 사용하여 덧셈을 하는 수준보다 약간 상위 수준으로 볼 수 있다.

나. 곱셈적 사고와 덧셈적 사고의 중간 학생의 풀이과정과 상황표현

<표 Ⅳ- 3>은 곱셈적 사고와 덧셈적 사고의 중간인 학생의 상황 표현과 풀이 과정을 나누어서 작성한 것이다. 인터뷰 문제를 해결할 때 모두 곱셈을 사용한 것도 아니고 모두 덧셈을 사용한 것도 아니기 때문에, 곱셈적 사고와 덧셈적 사고의 중간에 분류하였다. 두 학생의 경우는 문제 3을 덧셈을 사용해서 해결하였다는 공통점을 가지고 있다. 그러나 문제 2에서 상황 표현이 모두 곱셈적이지만 풀이과정이 곱셈과 덧셈으로 나누어진다. 이를 통해서 좀더 상위의 학생은 혜진이라는 것을 알 수 있다.

<표 IV-3> 곱셈적 사고와 덧셈적 사고의 중간 학생의 풀이 과정과 상황 표현

	문제	성훈	혜진
상황 표현	1	CS-003 한 상자에 4개? CS-006 32개. CS-010 28이잖아	DS-001 28개
	2 3	**CS-016 16개요.** **CS-017 3상자니까요.** **CS-018 한 상자에 4개씩 있다니까** **CS-021 12개.**	**DS-003 12개** **DS-004 세상자를 가져갔다고 했잖아요.** **DS-005 그리고 한 상자에 4개씩 있다고 했잖아요.** **DS-010 16개.**
	4	CS-028 9상자. CS-034 9상자요. CS-035 원래 7상자니까요. CS-036 한 상자에 4개씩 들어있으니까요.	DS-017 9상자. DS-022 선생님이 3상자를 가져간 후 16개에서 선생님이 다시 12개를 주셨으니까 28. DS-023 그리고 선생님이 28개에서 2상자인 8개를 주셨으니까 36. DS-027 처음에 7상자가 있었는데 그 다음에 선생님이 3상자를 가져가셔서 4상자가 남았고, 그 다음에 선생님이 다시 3상자를 돌려주셨으니까 7상자. DS-028 그 다음에 2상자를 주셨으니까 9상자.
풀이 과정	1	CS-004 (7×4=32라고 쓴다.) CS-005 7 곱하기 4……? CS-008 7 곱하기 4. CS-012 7 곱하기 4로 했어요.	DS-002 7곱하기 4도 되고, 4곱하기 7도 되요.
	2 3	**CS-014 (28-12=16라고 쓴다.)** **CS-018 더해가지구요, 12.** **CS-019 이거는 28 빼기.**	**DS-006 그러니까 4 곱하기 3.** **DS-011 28 빼기 12.** **DS-013 (종이 위에 28-12라고 쓴다.)** **DS-014 (종이 위에12+□=28이라고 쓴다.)** **DS-015 곱하기로는 잘 안되고 하나 생각한게 있는데 12+□=28.**
	4	CS-027 28에서……36. CS-030 원래 28이었는데요. CS-031 28에서 8을 더하니까요. CS-032 더하기로. CS-033 28더하기 8해서요. CS-037 8에서요, 하니까 4……4.	DS-018 7상자 더하기 2상자 DS-020 (네모 안에 4를 쓴 것을 두개 그린다.) DS-030 한 상자에 4개씩 있으니까.
전체적인 해결방법		문제가 곱셈을 사용한다는 것은 알았다. 그래서 곱셈구구를 사용해서 문제를 해결하였다. 하지만 답을 맞추는 데에 실패하고 두 번째에 성공하게 된다. 곱셈구구를 아직 완벽하게 외우는 수준이 아니라는 것을 알 수 있다. 또한 낱개로만 생각하여 더 할 수 있었다. 전체 쿠키개수 28에서 12개를 빼어서 남은 쿠키 개수를 구하였고, 8개를 더 주었을 때 몇 상자가 되겠냐는 질문에도 우선 전체 낱개의 개수를 생각하고 묶음으로 되돌아가는 것을 볼 수 있다. 낱개와 묶음을 함께 생각할 수 있는 수준이 아니라는 것을 알 수 있다.	설명이 자세하고 장황하다. 문제를 해결할 때 곱셈과 덧셈 두 가지를 다 사용했으며, 곱셈에 대해서 비교적 정확하게 알고 있다. 수식을 사용했으며 덧셈에서 식을 변형할 수 있는 능력도 있다. 문제해결이 완벽하게 곱셈적이라고 할 수 없다. 남은 쿠키의 개수를 곱셈을 사용해서 풀 수 없는 것에서 알 수 있다.

다. 곱셈적 사고인 학생의 상황표현과 풀이과정

<표 Ⅳ- 4>는 곱셈적 사고인 학생의 상황 표현과 풀이 과정을 나누어서 작성한 것이다. 두 학생의 수준을 나누는 기준은 문제 2와 문제 3의 풀이과정에 있다. 영수의 말을 살펴보면 낱개로만 볼 수 있는 능력과 묶음으로 볼 수 있는 능력 두 가지를 모두 가지고 있다. 하지만 진호는 묶음으로는 볼 수 있었지만 낱개로는 생각하지 못하는 모습을 볼 수 있다. 이것이 부분-전체 사고가 완전하지 못함을 보여주는 부분이다.

<표 Ⅳ-4> 곱셈적 사고인 학생의 상황 표현과 풀이 과정

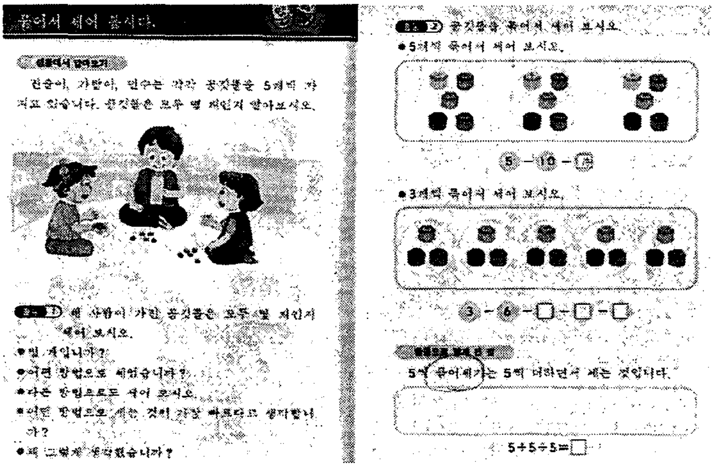
	문제	진호	영수
상황 표현	1	ES-001 28개.	FS-001 28개. FS-002 4개씩 7상자니까
	2 3	ES-003 16개. ES-004 12개. ES-006 16개.	FS-005 4개씩 3묶음이니까.
	4	ES-010 15상자요. ES-011 7상자에서 8상자를 더 줬으니까. ES-012 9상자요. ES-014 2상자요.	FS-009 9상자. FS-011 한 묶음에 4개씩이니깐 8개면 2상자니까
풀이 과정	1	ES-002 7 곱하기 4를 해서.	FS-002 7 곱하기 4하니까 28이 됐어요.
	2 3	**ES-005 4 곱하기 4를 했어요.**	**FS-007 28개니까 그중에 12개를 빼면은 그렇게 되니까.** **FS-008 4상자에 4개씩 곱해서 할 수도 있어요.**
	4	ES-013 8에서요 4개씩 가르면 한 개씩 상자가 생겨요. ES-015 7상자에서 2상자를 더했어요.	FS-011 2상자를 7상자에 더했어요.
전체적인 해결방법		상황을 곱셈과 수식을 사용해서 문제를 해결하였다. 중간 질문에서 전체 쿠키개수에서 가져간 개수를 빼어서 해결하지는 못하였다. 부분-전체 사고가 불완전하다는 것을 보여준다. 곱셈적 사고를 하고 있고, 문제 해결과정 또한 곱셈적이다.	모든 문제를 해결했고, 문제에 대한 답을 설명함에도 곱셈적으로 하였다. 6명의 학생 중에서 가장 상위의 곱셈적 사고를 하고 있다고 결론내릴 수 있다. 문제의 해결이 간결하였다. 문제를 이해하고 해결하고 이에 더하여 문제의 상황까지 간섭하고 있다. 심지어 문제 상황에 대해서 불합리함을 느끼고 그것에 대해 평가하고 있다.

3. 교과서 분석

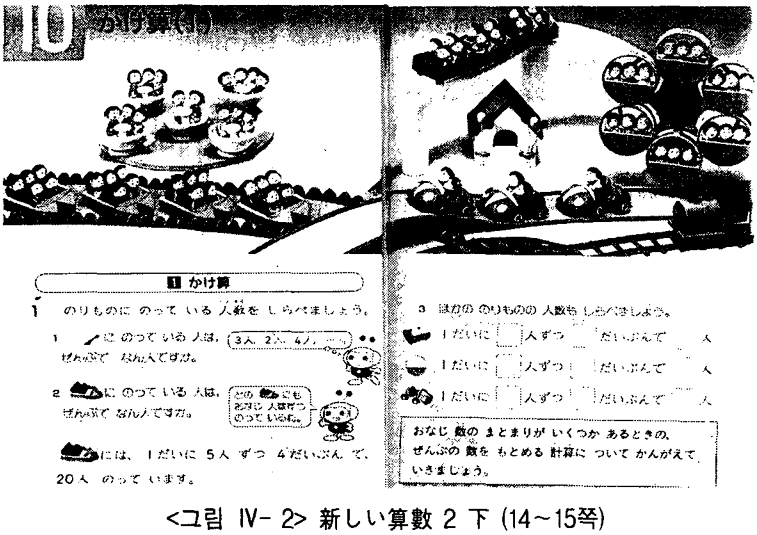
곱셈과 관련된 2학년 교과서의 내용인 '가 단계 8단원 곱하기'와 '나 단계 1단원 곱셈구구' 단원을 곱셈적 사고의 관점에서 분석하였다. 또한 이와 관련하여 일본의 新しい算數 2 下의 10. かけ算(1)과 11. かけ算(2), 미국의 Houghton Mifflin Math(Carole, G. et al)의 Chapter 6. Multiplication conceps을 같은 관점에서 분석하였다.

가. 곱셈 도입 준비과정으로서의 '묶어세기'

2학년 가 단계 8단원 곱하기 1차시에서 '묶어세기'를 제시하고 묶어 센 것을 같은 수 더하기로 나타내기를 한다. 이는 동수누가를 도입하기 위한 준비과정으로 볼 수 있다. 묶어세기와 동수누가의 관계를 연결짓도록 하여 묶음을 나타내는 그림이 나온 후에 '5+5+5=15'라는 동수누가를 제시하고 있다. 제시되어 있는 공깃돌 3개의 주위에 테두리가 그려져 있어서 하나의 묶음이라는 의미를 갖도록 한다고 볼 수 있다. 하나의 묶음을 단위로 생각하게 하는 활동으로 바람직하다. '묶어세기'와 '묶음', 그리고 '동수누가'를 연속적으로 도입하며 낱개로 세는 것보다는 묶어 세는 것이 더 간편하고 편리하다는 것에서 곱셈을 도입하고 있다(<그림 Ⅳ- 1> 참조).



<그림 Ⅳ- 1> 2학년 가 단계 8단원 곱하기 1차시 교과서 내용 (104~105쪽)



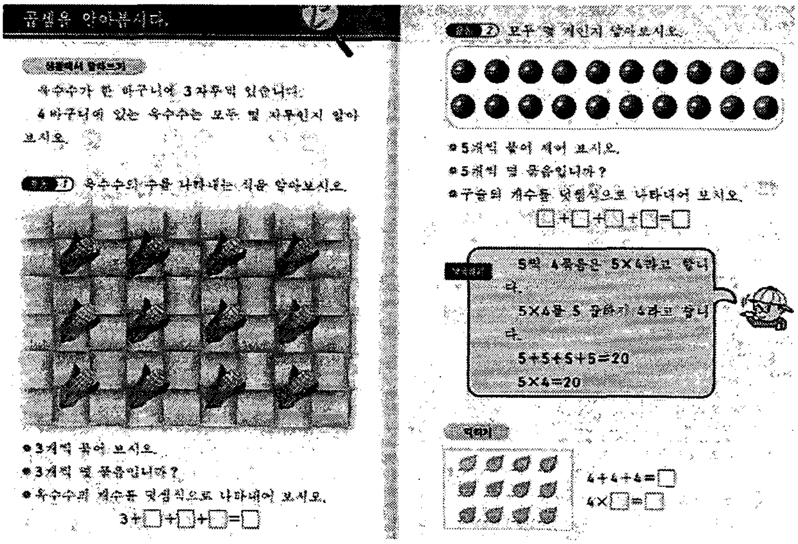
<그림 Ⅳ- 2> 新しい算數 2 下 (14~15쪽)

일본의 新しい算數 2 下에서는 <그림 Ⅳ- 2>와 같이 곱셈에 대한 준비단계를 제시하고 있었다. '놀이기구에 탄 전체 사람의 수'라는 구체적인 상황으로 문제를 시작하고 있었다. 14쪽에 밑에서 2번째 줄을 보면, '배에는 1대에 5명씩 4대분으로 20명 타고 있습니다.' 라는 문장이 제시되어 있다. 이는 5명을 하나의 단위로 하여 4배를 하는 비율의 의미로 곱셈을 준비하고 있는 것이다. 15쪽에는 이를 익히는 문제로 같은 형태의 문장에 □안에 수를 넣어보도록 하고 있었다. 또한 15쪽 아래서 3번째 줄에는 '같은 수의 합이 여러 개 있을 때, 전부의 수를 구하는 계산에 대해서 생각해봅시다.' 라는 생각할 문제를 주어 동수누가적 접근를 생각할 수 있도록 하였다.

우리나라의 교과서가 '묶어세기'와 덧셈을 통하여 곱셈을 준비하여 동수누가적 접근을 한 반면, 일본의 교과서는 그림과 이를 나타내는 문장으로 준비단계를 제시하고 있었고 문장 안의 의미가 비율의 의미로 곱셈에 접근하고 있었다.

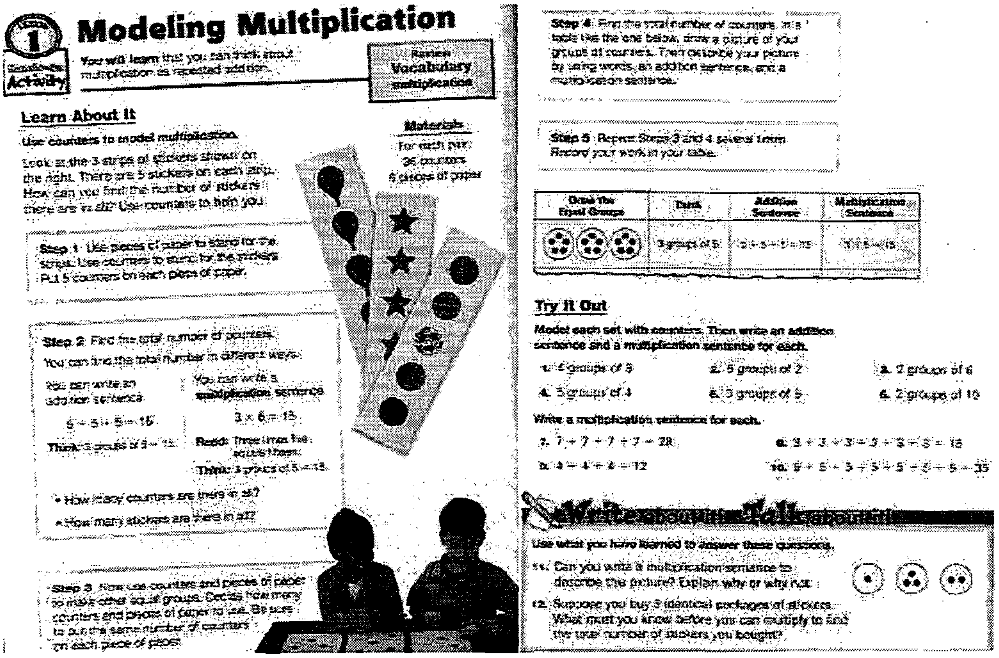
나. '동수누가'적 접근으로 곱셈을 도입

2학년 가 단계 8단원 곱하기 2차시에서는 같은 수 더하기를 곱하기로 나타내고 있다. 1차시에서와 마찬가지로 같은 수를 여러 번 더하는 불편함을 간편하게 표현하기 위해서 곱셈을 도입하고 있다. 「몇 묶음입니까?」를 물어보아 묶음으로 생각하게 한 후 덧셈 또는 덧셈식으로 표현해 보는 것을 중요하게 다루고 있다. 이는 곱셈을 동수누가로 접근하고 있다는 것을 보여준다. 1차시의 준비과정과 같은 형식에 곱셈식을 추가하여 같은 수를 반복하는 덧셈과 곱셈을 연결짓고 있다(<그림 Ⅳ- 3>참조).



<그림 Ⅳ- 3> 2학년 가 단계 8단원 곱하기 2차시 교과서 내용 (106~107쪽)

미국의 Houghton Mifflin Math에서는 <그림 Ⅳ- 4>와 같이 곱셈을 도입하고 있었다. Chapter 6. Multiplication conceps 중에 lesson 1이 곱셈을 도입하는 곳이었다. 212쪽을 중간 부분을 보면 스티커라는 구체물을 가지고 '5+5+5=15' 와 '3×5=15'를 동시에 생각해보도록 하였다.

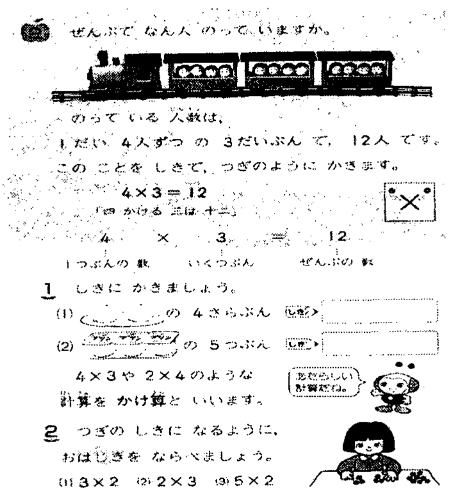


<그림 Ⅳ- 4> Houghton Mifflin Math (pp. 212~213)

또한 213쪽을 보면 반구체물 묶음을 나타내는 그림과 '3 groups of 5'이라는 묶음(group)을 사용한 상황 표현, '5+5+5=15'와 '3×5=15'라는 수식을 같이 제시하고 있다. 덧셈식과 곱셈식을 연결짓도록 하는 것으로 보아 동수누가적 접근법이라는 것을 알 수 있다.

일본의 新しい算數 2 下에서는 <그림 Ⅳ- 5>과 같이 곱셈을 도입하고 있었다. '전부 몇 명 타고 있습니까.' 라고 물어보고 난 후 그림을 제시하였다. 그리고 '타고 있는 사람 수는 1대에 4명씩 3대분으로 12명입니다. 이것을 식으로 다음과 같이 씁니다.' 라는 문장을 제시하고 '4×3=12'라는 곱셈식을 도입한다. 덧셈식 없이 비율의 의미인 문장으로 곱셈을 도입한 것이다.

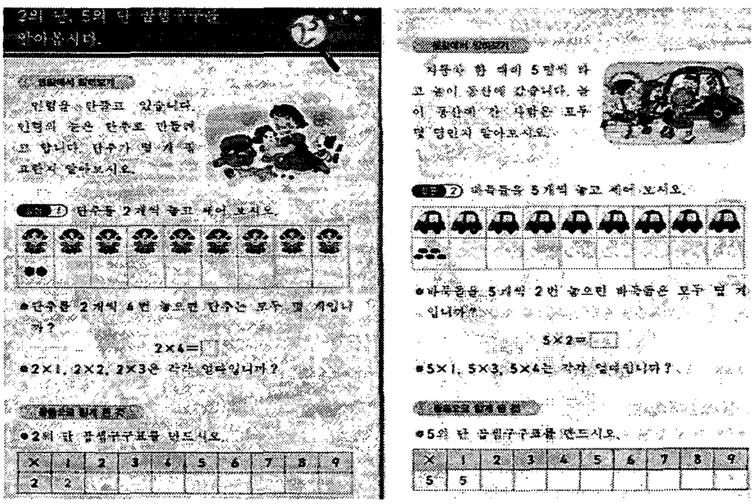
특이할만한 점은 곱셈식을 아래에 다시 한번 제시하면서 '숫자 4' 아래에는 '1개분의 수', '숫자 3' 아래에는 '몇 개분', '숫자 12'의 아래에는 '전부의 수'라 하여 원소, 묶음, 전체를 직접적으로 명시하였다는 것이다. 또한 16쪽 아래 삽화에는 '새로운 계산이네'라는 말풍선을 넣어서 곱셈이 처음으로 학습한다는 것을 직접적으로 명시하고 있었다.



<그림 Ⅳ- 5> 新しい算數 2 下 (16쪽)

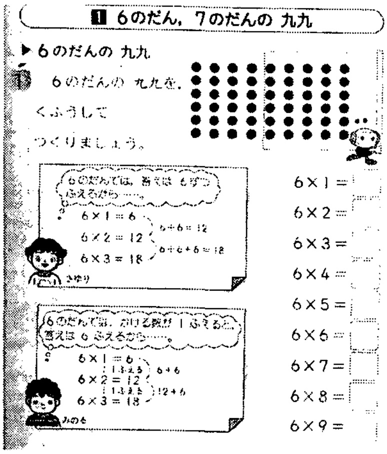
다. '동수누가'로 곱셈구구의 구성원리 제시

곱셈구구는 같은 수의 더하기에 의해서 구하는 것이 불편하고 시간이 많이 걸린다는 것을 알고 묶어세기를 할 때 곱셈구구를 활용하면 쉽고 편리하다는 것을 알게 하여 도입한다. 활동으로 알게 된 것을 제시할 때 곱셈구구의 구성원리를 가르치게 되는데 2의 단부터 9의 단까지 모두 동수누가의 원리로 제시하고 있다(<그림 Ⅳ- 6> 참조). '2씩 커진다', '5씩 커진다'라는 같은 수 더하기(동수누가)의 접근과 함께 그 안의 묶음의 의미를 더 강화시켜준다면 덧셈적 사고에서 곱셈적 사고로 발전시키는데 도움이 될 것이다.



<그림 Ⅳ- 6> 2학년 나 단계 1단원 곱셈구구 1차시 교과서 내용 (2~3쪽)

일본의 新しい算數 2 下에서는 <그림 Ⅳ- 7>와 같이 6의 단을 도입하고 있었다. '6의 단의 구구를 생각해서 만들어봅시다.'라고 제시한 후, 아래 부분에 곱셈구구의 두 가지 원리를 제시하고 있다. 원리 중 하나는 '6의 단에서는 결과가 6씩 늘어나니까…….'라는 동수누가적 접근의 원리이고, 이에 이어서 '6의 단에서는, 곱하는 수가 1 늘어나면 결과는 6 늘어나까…….'라는 비율의 의미인 다른 원리를 제시하고 있다. '1 늘어나면'이라는 것은 묶음이 1개 더 늘어나는 것을 설명해주고 있다. 따라서 묶음으로 볼 수 있게 하는 곱셈적 사고의 발달을 가져다 줄 것이라고 판단할 수 있다.



<그림 Ⅳ- 7> 新しい算數 2 下 (33쪽)

라. 모델의 활용의 실태

교과서에서는 여러 가지 모델을 사용하여 상황을 보여주고 이것을 통하여 곱셈을 제시하고 있다. 곱셈의 상황을 제시할 때에 그 모델을 살펴보면 <표 Ⅳ-10>, <표 Ⅳ-11>과 같이 그 모델이 동수누가 모델에 집중되어 있는 것을 볼 수 있다.

'동수누가 모델'이 가장 많고 가끔 '정렬과 넓이 모델'이 제시되고 있다. 나 단계 곱셈구구에서는 1차시, 2차시, 4차시, 5차시에 곱셈구구의 원리를 모두 '동수누가 모델'로 제시하고 있으며, 이를 활용하는 부분에서는 '동수누가 모델'과 '정렬과 넓이 모델'을 활용하고 있었다(<표 Ⅳ- 5>과 <표 Ⅳ-5> 참조).

<표 Ⅳ- 5> 2학년 가 단계 8단원 곱하기에 제시된 모델의 종류

차시 / 모델	1	2	3	4	5	6	7	8
동수누가	2		1	2	1	1		
정렬과 넓이		3	1		1	1		
순서쌍								
수형도								

<표 Ⅳ- 6> 2학년 나 단계 1단원 곱셈구구에 제시된 모델의 종류

모델 \ 차시	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
동수누가	4	4	2	2	4	3	1						
정렬과 넓이			2			1		2	3				
순서쌍													
수형도													

곱셈을 처음 도입하기에는 '동수누가 모델'을 적용하는 것이 학생들이 덧셈을 배웠기 때문에 쉽게 접할 수 있고, 해결할 때에도 수월할 것이다. 하지만 곱셈의 활용에서조차도 '동수누가 모델'만을 사용한다면 앞으로 분수의 곱셈이나 소수의 곱셈을 배울 때 어려움을 가중시키게 될 것이다. 분수나 소수의 곱셈에서는 동수누가의 의미가 아닌 다른 의미로 곱셈이 제시되기 때문이다. 따라서 '동수누가 모델'을 기본으로 하여 활용에서는 정렬 모델, 수형도 모델 등을 더 보완하여 교사가 제시한다면 앞으로의 곱셈 학습에 도움을 줄 수 있을 것이다.

Ⅳ. 결 론

1. 결론

본 연구의 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

첫째, 곱셈적 사고가 형성된 2학년 학생들은 곱셈의 구체적인 상황을 보고 바로 수학화 또는 추상화할 수 있었다. 이는 구체물을 사용하거나 그림을 그려서 문제를 해결하지 않고, '곱하기', '몇 개씩 몇 묶음' 등의 곱셈을 나타내는 용어를 사용하여 문제를 해결하는 모습에서 알 수 있었다. 이런 학생들의 경우에는 구체물을 사용하여 지도하는 것보다는 식을 구체적인 상황으로 표현하게 하거나 정렬 모델, 측정 모델, 조합 모델 등을 접하여 볼 수 있도록 하는 것이 더 발전적인 방향으로 이끌어 줄 것이다.

둘째, 2학년 학생들의 각 사고 수준은 덧셈적 사고 수준, 덧셈적 사고와 곱셈적 사고의 중간 수준, 곱셈적 사고 수준으로 분류할 수 있었다. 사고가 덧셈적 사고에서 곱셈적 사고로 발전해감을 알고 덧셈적 사고 수준에서는 곱셈적 사고로의 발전을 촉진시켜주는 활동을 해야할 것이고, 곱셈적 사고 수준에서는 이를 심화시키는 방향으로 학습을 해야할 것이다. 같은 학년에서 다른 수준의 학생들이 함께 모여있는 상황을 고려하여 교사는 각 학생의 수준에 맞추어 곱셈에 대한 지도가 이루어지도록 해야 할 것이다.

셋째, 곱셈에 동수누가적 접근을 적용할 경우, '4×7'은 4개씩 7묶음을 나타내고, '7×4'는 7개씩 4묶음을 나타낸다. 하지만 학생들은 문제 1을 '4×7'의 식으로 나타내야 하지만, '7×4'로 나타내고 있었다.

두 식의 결과가 같기 때문에 더 편한 곱셈식을 사용하여 문제를 해결하고 있다고 판단할 수 있었다. 따라서 곱셈식과 상황을 연결짓는 학습이 제대로 이루어지고 난 이후에 교환법칙이 학습되어야 할 것이다.

넷째, 우리나라의 교과서에 제시된 모델은 '동수누가 모델'이 가장 많고 곱셈을 활용하는 부분에서 '정렬 모델'이 제시되고 있었다. 일본의 교과서에서는 곱셈을 활용하는 부분에 길이와 들이를 사용한 측정 모델을 제시하고 있었고, 미국의 교과서에서는 뛰어세기를 할 수 있는 수직선 모델을 동수누가 모델과 함께 제시하고 있었다. 곱셈의 도입과 활용에서 특정한 모델을 사용하여야만 한다는 원칙은 없다. 각 국가의 문화적 특성과 수학적 특성에 맞게 곱셈과 곱셈구구의 모델을 잘 선택하여 활용하여야 할 것이다. 하지만 곱셈적 사고의 관점에서 바라보았을 때, 원소와 묶음, 전체를 수직적으로 사고하고 부분-전체 사고를 할 수 있도록 도와주기 위해서는 동수누가 모델과 함께 정렬 모델, 순서쌍 모델, 수형도 모델 등을 함께 활용하는 것이 바람직할 것이다.

2. 제언

본 연구의 관련된 연구의 제한점을 보완하고, 신뢰성 있는 후속 연구를 위하여 다음과 같이 제안한다.

첫째, 2학년 이후의 3, 4, 5, 6학년 수학 교과서에서 곱셈의 의미를 어떻게 제시하고 있는지 순차적으로 파악해볼 필요성이 있다. 둘째, 곱셈의 분배법칙, 교환법칙에 관한 이해도 연구해볼 필요성이 있다. 셋째, 더 큰 수(두 자리수 이상)의 곱셈에서 학생의 반응 조사하는 연구도 필요하리라 본다.

참 고 문 헌

강완 · 김진호 · 신국환 (2005). Piaget의 발생론적 인식론을 적용한 수학 수업 1학년. 서울: 경문사.

교육부 (2000). 초등학교 교사용 지도서, 수학 2-가, 대한교과서주식회사.

교육부 (2000). 초등학교 교사용 지도서, 수학 2-나, 대한교과서주식회사.

김양희 · 이영환 역 (1991). 유치원 교사를 위한 피아제 이해. 서울: 창지사.

박만구 (1999). 구성주의자의 실험 교수, 학교수학, **2(2)**, pp.513-528.

서찬숙 (2003). 문제 장면의 모델화를 통한 수업이 곱셈적 사고력과 곱셈 능력 신장에 미치는 영향, 대구교육대학교 석사학위 논문.

이준자 (2001), 초등학생들의 곱셈적 사고에 대한 조사; 1-5학년을 중심으로, 한국교원대학교 석사학위 논문.

이지현 역 (2002). 어린이 수학교육 - 피아제 수학교육의 대안. 서울: 정민사.

Carole, G. et al (2004). *Houghton mifflin math*, Boston: Houghton Mifflin Company.

Clark, F. B. & Kamii, C. (1996). Identification of multilpicative thinking in children in grade 1-5, *Journal for Research in Mathematics Education*, **27(1)**, pp.41-51.

Goodrow, A & Schliemann, A. D. (2003). Linear function graphs and multiplicative reasoning in elementary school, *The Psychology of Mathematics Education Conference* **27(1)**, pp.1-8.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston: VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston: VA: Author.

Piaget, J. (1987). *Possibility and necessity.* Minneapolis: University of Minnesota Press.

Squire, S. (2004). Does the cue help? Children's understanding of multiplicative concepts in different problem contexts, *British Journal of Educational Psychology,* **74**, pp.515-532.

Steffe, L. (1992). Children's multiplying schemes. In Harel, Guershon (Eds), *Multiplicative reasoning in the learning of mathematics*(pp.3-39). State University of New York Press.

Thomas P. C. et al (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Thompson, P. W. & Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning, *Research companion to the principles and standards for school mathematics*(pp.95-114), Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

A Study on the Multiplicative Thinking of 2nd Grade Elementary Students

Jang, Mi Ra
Seoul Sungbuk-gu Jungneung 2-dong, Jungsu Elementary School
E-mail : mira1001@hanmail.net

Park, Man Goo
Seoul Seocho-gu, Seocho-dong, Seoul National University of Education
E-mail : mpark29@hanmail.net

The purpose of this study was to study the 2nd grade elementary students' common thinking and differences of additive and multiplicative thinking. For meaningful discussion of the above, we have established the following research questions.

1. What are the properties of the multiplicative thinking of 2nd grade elementary students?
   - What are the common properties of the multiplicative thinking of 2nd grade elementary students?
   - What are the properties of the various multiplicative thinking levels?
2. How is multiplicative thinking presented in Korean math textbooks?

The conclusions of this study were followings:

First, the 2nd grade elementary students in the multiplicative thinking learnt used by translating multiplication into specific situations. And they often used different models of multiplication.

Second, additive thinking developed into the multiplicative thinking. After being helped by their teachers, students who thought additively were then able to think multiplicatively. Whereas after being helped by their teachers, students who were already competent at multiplicative thinking gained a deeper understanding.

Third, they learned the commutative property of multiplication after their understanding of the 'repeated addition approach' and the multiplicative approach was sufficiently reinforced.

Last, students should be taught using different models based on the repeated addition approach.

* ZDM Classification : D42

* MSC2000 Classification : 97D40

* Key words : multiplicative thinking, additive thinking, part-whole scheme

<부록 1> 사전조사 문제

2학년 ( )반 ( )번 이름(   )

준영이가 사탕을 사러 가게에 갔습니다. 사탕이 3개씩 들어있는 봉지를 6봉지 샀습니다. 준영이가 사온 사탕은 모두 몇 개입니까?
교실에 있는 사물함 서랍장 1개에는 서랍이 5개씩 있습니다. 2학년 각 교실에 서랍장이 1개씩 있고, 2학년 전체 8개반 교실에 있는 서랍장에는 서랍이 모두 몇 개 있을까요?
승우는 연필을 5자루 가지고 있는데, 영인이는 승우가 가진 연필의 3배를 가지고 있습니다. 영인이가 가지고 있는 연필은 몇 자루입니까?
민규는 강낭콩을 사각형 모양으로 줄을 맞추어 놓았습니다. 가로는 7개, 세로는 3개가 있습니다. 민규가 놓은 강낭콩은 모두 몇 개입니까?
동훈이는 셔츠 5벌과 바지 3벌을 가지고 있다. 서로 다른 셔츠와 바지를 입을 수 있는 방법은 모두 몇 가지입니까?

<부록 2> 인터뷰 프로토콜 (예시)

Interview A

AT-001 교사: 선생님이 정현이한테 쿠키를 7상자를 줬어요.
AT-002 교사: 쿠키가 한 상자에 4개씩 들어있어요.
AT-003 교사: 그러면 쿠키는 모두 몇 개일까?
AS-001 정현: (허공을 바라본다.) 28개.
AT-004 교사: 어떻게 했어?
AS-002 정현: 7 더하기 7은 14니까, 7 더하기 7을 또 해가지고 14 되가지고, 14 더하기 14는 28이니까요.
AT-005 교사: 그럼 질문 하나 다시 할게.
AT-006 교사: 선생님이 3상자를 가져갔어요.
AT-007 교사: 그러면 가져간 개수는 모두 몇 개일까?
AS-003 정현: (허공을 바라본다.) 21개요.
AT-008 교사: 21개요?
AT-009 교사: 어떻게 했어요?
AS-004 정현: 7 더하기 7은 14였으니까, 7을 더하면 21이니까.
AT-010 교사: 쿠키 한 상자 안에 들어있는 것이 7개씩이야?
AS-005 정현: 네.
AT-011 교사: 그래요?
AT-012 교사: 선생님은 아까 4개씩이라고 이야기 했는데.
AT-013 교사: 그러면 몇 개야?
AS-006 정현: 4개씩이요?
AS-007 정현: 12개.
AT-014 교사: 12개요?
AT-015 교사: 그러면 남은 쿠키는 몇 개야?
AS-008 정현: (허공을 바라본다.) 12개요.
AT-016 교사: 어떻게 했어요?
AS-009 정현: 한 상자에 4개씩 있으니까 3상자를 빼면은 4상자가 남아가지고 거기 4상자에는 4개가 들어있으니까.
AT-017 교사: 4상자가 남았다고 했지?
AS-010 정현: 네.