韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 20집 제 3호, 2006. 9. 373-389

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 20, No. 3, Sep. 2006. 373-389

조합적 논증을 이용한 문제해결에 대한 연구

윤 대 원 (경상대학교)
김 은 주 (마산구암중학교)
유 익 승 (전북과학고등학교)

본 연구에서는 조합등식의 증명에서 조합적 논증을 이용한 증명방법과 기존의 수학교과서에 제시된 증명방법을 비교하고 조합등식에서 조합적 논증을 이용한 문제해결 전략을 유형별로 분류하여 제시하고자 한다. 이를 통해서 조합적 논증을 이용한 조합등식의 탐구활동을 교수·학습과정에 활용하고, 심화·학습 자료를 개발하는데 기초 자료가 될 수 있을 것이다.

1. 서 론

제 7차 수학과 교육과정(교육부, 1998, p.28)에서는 '수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고, 사물의 현상을 수학적으로 관찰하여 해석하는 능력을 기르며, 실생활의 여러 가지 문제를 논리적으로 사고하고 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기른다'라고 함으로써 수학교육의 궁극적인 목표가 문제해결 능력에 있음을 강조하고 있다. 즉, 수학교육에서 기본적인 수학적 도구들을 이해하여 다양한 문제 상황을 탐구하고 관련된 문제해결의 기회를 가지는 것은 수학교육의 목표 달성에 있어 중요한 부분이 된다고 할 수 있다. 그리고, 상응하는 탐구 활동 및 문제해결의 경험을 학생들에게 구체적으로 수학 문제를 통해 제공하는 것은 성공적인 수학교육의 바탕이 될 것이다.

수학 문제 해결력 신장을 위해 수학교육 분야에서 많은 연구가 진행되어 왔다. Polya(1957)는 'How to solve it'에서 수학 문제해결에 관련된 발견술 및 관련 개념들을 체계화하여, 수학 문제해결의 이론과 실제 분야에서 고전으로 인정받고 있다.

한편, 최근 문제해결에 관련된 국내 연구들을 살펴보면 첫째, 문제해결 방법 및 그 지도에 관련된 연구들(남승인·류성림, 2002; 신현성·김경희, 1999; 한인기, 2003, 2002; 유익승, 2005 등)로 이들 연구에서는 수학 문제를 효율적으로 해결하기 위한 구체적인 문제해결 전략들이 상세히 기술 되어 있다. 두 번째는, 문제 해결 전략을 하나의 방법적 지식으로 간주하고 방법적 지식의 학습의 중요성을 다룬 연구로는 이지현(2004), 황혜정(2002), 이주영·김서령·박혜숙·김완순(2006)등의 연구가 있다. 세 번째는, 문제해결에 영향을 미치는 요인에 관한 연구로 양은경·황우형(2005), 한인기(2006) 등의

* ZDM분류 : E54
* MSC2000분류 : 97D50
* 주제어 : 문제해결, 조합적 논증

연구가 있다. 특히, 첫 번째 연구 방향과 관련하여, 외국의 주목할 만한 연구로 Benjamin & Quinn (2003)은 등식에 대한 문제해결 전략으로 조합적 논증(Combinatorial Proof)을 제시하여, 다양한 증명방법에 대한 연구의 바탕이 되고 있다. 본 연구에서는 국내에서 연구가 미비하게 이루어지고 있는 조합적 논증의 개념 및 방법을 구체적인 예들을 통해 체계적으로 고찰할 것이다.

Benjamin & Quinn(2003)에 의하면, 조합적 논증이란 등식을 증명하는 하나의 방법으로 등식을 증명하기 위해서 적당한 집합을 만들고 그 집합의 원소를 서로 다른 방법으로 셈하여 등식의 좌변과 우변이 같음을 보이는 증명 방법이다. 본 연구에서는 이러한 적당한 집합을 조합적 모델이라고 하겠다. 이러한 연구의 결과는 구체적인 교수-학습 상황에서 교사가 개개의 수학 문제해결 방법에 대한 유의미한 교육적 선택을 위한 바탕 자료가 될 수 있다는 점에서 주목할 만하다.

본 연구에서는 조합등식의 증명에서 조합적 논증을 이용한 증명방법과 기존의 수학교과서에 제시된 증명방법을 비교하고 조합등식에서 조합적 논증을 이용한 문제해결 전략을 유형별로 분류하여 제시하고자 한다. 이를 통해서 조합적 논증을 통한 조합등식의 탐구활동을 교수 · 학습과정에 활용하고, 심화 · 학습 자료를 개발하는데 기초 자료가 될 수 있을 것이다.

2. 수학 교과서에 제시된 증명과 조합적 논증에 의한 증명 비교

Schoenfeld(1985)는 문제 해결 과정에서 해결전략을 발견할 수 있도록 하는 가장 중요한 과정을 탐구과정이라 하였고 이 과정을 3개의 전략으로 나누어 설명하고 있다. 첫째 본질적으로 동치인 문제를 생각한다. 둘째, 약간 수정된 문제를 생각한다. 셋째, 전면적으로 수정된 문제를 생각한다. 여기서 첫 번째 전략인 본질적으로 동치인 문제를 고려하는 전략에 대한 세부적인 내용으로 동치인 것으로 조건을 바꾸기, 다른 방법으로 그 문제의 요소를 재조합하기, 보조 요소를 도입하기를 제안하고 있다.

즉, 어떤 등식이 주어져 있을 때 적당한 조합적 모델을 설정하고 조합적 모델의 원소를 두 가지 방법으로 셈으로서 등식의 좌변과 우변을 얻어내고 동일한 집합의 원소를 두 가지 방법으로 셈으로서 주어진 등식이 성립함을 보이는 조합적 논증의 증명과 그 맥을 같이 한다고 할 수 있다. 특히, 문제를 재구성하는 입장에서 학생들의 상상력을 자극할 수 있다고 할 수 있다. 그리고 기존의 대수적 조작에 의존하는 등식의 증명에서 벗어나 창의적이고 수학적으로도 매력적인 등식의 증명이 될 것이다. 교과서 '수학 I'의 순열과 조합단원에서 다루는 조합등식을 중심으로 교과서 증명과 비교하여 조합적 논증에 의한 증명이 무엇인지 살펴보기로 하자.

문제 1. 파스칼 공식 ${}_{n}C_{r} = {}_{n-1}C_{r} + {}_{n-1}C_{r-1}$을 증명하시오.

교과서 증명방법. 조합공식 ${}_{n}C_{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$을 이용하여 등식의 우변에 대입하면

$$
\begin{aligned}
{}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1} &= \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!r!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} \\
&= \frac{(n-1)!(n-r)+r(n-1)!}{(n-r)!r!} = {}_nC_r
\end{aligned}
$$

이 성립한다 (조태근 외 4인, 2002a, p.313).

조합적 논증에 의한 증명방법. 원소의 개수가 n인 집합에서 원소의 개수가 r개인 부분집합을 만드는 방법을 생각하자. 정의에 의해서 좌변이 성립한다. 이제는 특정한 원소를 기준으로 하여 부분집합을 세어보자. 특정한 원소 a를 반드시 포함하지 않는 부분집합으로 a를 제외한 나머지 $n-1$개로 원소의 개수가 r개인 부분집합을 만들거나$(= {}_{n-1}C_r)$, a를 반드시 포함하는 부분집합으로 원소의 개수가 r개인 부분집합의 수는 a를 제외하고 원소의 수가 $r-1$인 부분집합을 만든 다음 a 를 첨가시켜주면 되므로 이러한 부분집합의 수는 ${}_{n-1}C_{r-1}$이고 이 두 가지 경우는 서로소이므로 합의 법칙에 의하여 주어진 조합 등식이 성립한다.

두 증명을 비교하여 보자. 교과서의 증명은 조합${}_nC_r$ 대신 $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$을 우변에 대입하고 대수적인 조작에 의해 좌변이 되어 같음을 보이고 있다. 한편, 조합적 논증에 의한 증명은 우변에서 좌변으로 변형하거나, 좌변에서 우변으로 변형하는 것이 아니라 문제해결의 탐색과정에서 조합적 모델 [n개의 원소를 가지는 집합에서 r개의 원소를 가지는 부분집합]을 생각하였다. 그리고 조합적 모델을 두 가지 방법으로 세는데, 첫 번째 방법은 조합의 정의를 이용하여 좌변을 보였고, 다른 방법으로는 부분집합을 셀 때 특정한 원소가 반드시 포함되는 부분집합과 그렇지 않은 집합으로 나누어 생각함으로써 우변을 보였다. 동일한 조합적 모델을 다른 방법으로 세어 등식의 좌변과 우변이 같음을 보이고 있다. 즉, 조합의 정의와 세는 것으로 등식이 증명되었다.

문제 2. $n \geqq 0$ 에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k = 2^n$을 증명하시오.

교과서 증명방법. 이항정리 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k x^k = (x+1)^n$에서 양변에 $x=1$을 대입하면 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k = 2^n$ 이다(조태근 외 4인, 2002b, p.229).

조합적 논증에 의한 증명방법. n명으로 구성된 학급에서 크기가 자유로운 위원회 구성하는 방법을 생각하자. 위원회 인원이 $k(0 \leqq k \leqq n)$일 때 경우의 수는 ${}_nC_k$이고 각각은 서로소 이므

로 합의 법칙이 성립한다. 한편 방법을 달리하여 각각의 학생들을 기준으로 위원회 회원인지 아닌지를 생각할 수 있다. 즉 각각의 학생당 두 가지 가능성이 있으므로 전체의 경우 수는 2^n이고 같은 대상을 두 가지 방법으로 셈하였으므로 등식은 증명되었다.

두 증명 방법을 비교하여 보자. 교과서 증명은 조합의 정의를 사용하지 않고 이항정리를 이용하여 이항정리의 양변에 적당한 수를 대입하는 대수적인 방법으로 등식을 증명하였다. 한편, 조합적 논증에 의한 증명은 문제해결 탐색과정에서 조합적 모델[n명으로 구성된 학급에서 크기가 자유로운 k명의 위원회를 구성하는 방법]을 생각하였다. 그리고 조합적 모델에서 조합의 정의 ${}_nC_k$와 위원회 인원 k를 자유롭게 변화시켜 등식의 좌변을 보였다. 다른 방법으로는 조합적 모델에서 각각의 학생에 대해서 위원회 회원여부에 따른 경우의 수를 구하여 우변을 보였다. 동일한 조합적 모델에서 세는 방법을 달리 하여 조합등식을 유도하였다.

문제 3. $n \geqq 1$ 에 대하여 $\sum_{k \geqq 0} {}_nC_{2k} = 2^{n-1}$을 증명하시오.

교과서 증명방법. 이항정리 $\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k x^k = (x+1)^n$을 이용하여 다음과 같이 증명하고 있다. n을 홀수라고 가정하면

$$(x+1)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + \cdots + {}_nC_n x^n \quad \text{--- ①}$$

①식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$2^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + \cdots + {}_nC_n \quad \text{--- ②}$$

①식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$0 = {}_nC_0 - {}_nC_1 + \cdots + {}_nC_{n-1} \quad \text{--- ③}$$

②와 ③을 변끼리 더하면

$$2^n = 2({}_nC_0 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_{n-1})$$

$$2^{n-1} = {}_nC_0 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_{n-1}$$ (박규홍 외 5인, 2002a, p.317)

조합적 논증에 의한 증명방법. n명으로 구성된 학급에서 짝수 위원회를 구성하는 방법을 생각하자. 먼저 위원회 인원이 $2k(0 \leq 2k \leq n)$일 때 경우의 수는 ${}_nC_{2k}$이고 각각은 서로소 이므로 합의 법칙이 성립한다. 한편 $n-1$명에 대해서 위원회 회원인지 아닌지에 따라 두 가지 경우가 나오므로 전체 경우의 수는 2^{n-1}이다. 그리고 n번째 학생은 짝수 위원회가 아닌 곳에 넣어주면 되므로 주어진 등식은 증명되었다.

두 증명을 비교하여 보자. 교과서 증명은 이항정리 $\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k x^k = (x+1)^n$에서 x대신 1과 -1를 대입하여 대수적인 조작에 의해서 등식을 증명하였다. 한편 조합적 논증에 의한 증명에서는 문제해결의 탐색과정에서 조합적 모델 [n명의 학급에서 짝수인 위원회를 구성하는 방법]을 생각하였다. 조합적 모델을 세는 방법에 따라 첫 번째 방법은 조합의 정의를 이용하여 좌변을 보였고 다른 방법은 각각의 학생을 기준으로 위원회 회원여부를 고려하여 우변을 보였다. 동일한 조합적 모델에서 세는 방법만을 달리하여 등식을 증명하였다.

문제 4. $n \geqq 1$에 대하여, $\sum_{k=0}^{n} k\,{}_nC_k = n \cdot 2^{n-1}$을 증명하시오.

교과서 증명방법. $r \cdot {}_nC_r = n \cdot {}_{n-1}C_{r-1}$을 이용하여 등식의 좌변을 변형하면

$$\begin{aligned} &{}_nC_1 + 2 \cdot {}_nC_2 + \cdots + n \cdot {}_nC_n \\ &= n \cdot {}_{n-1}C_0 + n \cdot {}_{n-1}C_1 + \cdots + n \cdot {}_{n-1}C_{n-1} \\ &= n({}_{n-1}C_0 + {}_{n-1}C_1 + \cdots + {}_{n-1}C_{n-1}) \qquad \text{--- ①} \end{aligned}$$

한편, 이항정리

$$(1+x)^{n-1} = {}_{n-1}C_0 + {}_{n-1}C_1 x + \cdots + {}_{n-1}C_{n-1}x^{n-1} \quad \text{에서}$$

양변에 $x=1$를 대입하면

$$2^{n-1} = {}_{n-1}C_0 + {}_{n-1}C_1 + \cdots + {}_{n-1}C_{n-1} \qquad \text{--- ②}$$

①, ②에서

$${}_nC_1 + 2 \cdot {}_nC_2 + \cdots + n \cdot {}_nC_n = n \cdot 2^{n-1}$$ (조태근 외 4인, 2002a, p.317)

조합적 논증에 의한 증명 방법. 학급 수가 n명인 반에서 회원수가 k 명인 위원회를 만들고 그 위원회의 대표를 선출하는 방법을 생각하자.

먼저 위원회의 인원수 k는 $0 \leqq k \leqq n$이고 이 때 이러한 위원회와 대표1명을 구성하는 방법의 수는 $k\,{}_nC_k$이므로 전체 경우의 수는 $\sum_{k=0}^{n} k\,{}_nC_k$이다. 한편 순서를 바꾸어 대표를 미리 뽑는 경우를 생각하자. n명의 학생으로부터 대표1명을 선출하는 방법의 수는 n이고 나머지 $n-1$명 학생의 위원회 회원여부에 따라 2^{n-1}가지이므로 전체 경우의 수는 $n \cdot 2^{n-1}$이다.

두 증명을 비교하여 보자. 교과서 증명은 문제2, 문제3과 같은 방법인 이항정리와 대수적 조작에 의한 증명을 하였다. 한편, 조합적 논증에 의한 증명에서는 문제해결 탐색과정에서 문제2와 비교하여

${}_nC_k$에 k가 곱해져 있는 것에 착안하여 조합적 모델 [학급 수가 n명인 반에서 회원수가 k명인 위원회를 만들고 그 위원회의 대표를 선출하는 방법]을 생각하였다. 조합적 모델에서 대표를 선출하는 방법은 위원회를 먼저 선출한 후 위원회 인원에서 대표를 선출하는 경우와 전체에서 먼저 대표를 선출한 후 위원회를 구성하는 두 가지 방법으로 셈하여 좌변과 우변이 같음을 보였다. 교과서의 증명에서는 조합의 정의를 사용하지 않았고 조합적 논증에 의한 증명에서는 조합의 정의를 이용하여 증명하였으며 보다 증명방법이 간결함을 알 수 있다.

이제 조합등식의 증명에서 많이 이용되는 이항정리의 증명을 비교하여 보자.

문제 5. 이항정리 $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, x^k \cdot y^{n-k}$을 증명하여라.

교과서 증명방법. $(x+y)^n = (x+y)(x+y)\cdots(x+y)$의 전개식은 n 개의 인수 $x+y$의 각각에서 x 또는 y를 하나씩 택하여 곱한 것을 모두 더한 것이다.

이때 $x^k \cdot y^{n-k}$항은 n 개의 인수 $x+y$중에서 k 개의 인수에서는 x를 택하고 $n-k$개의 인수에서는 y를 택하여 곱한 것이다. 따라서 $x^k \cdot y^{n-k}$ 의항은 n개에서 k개를 택하는 조합의 수만큼 생기므로 ${}_nC_k$ 이다 (박규홍 외 5인, 2002b, p.231).

조합적 논증에 의한 증명 방법. n명의 학생에게 서로 다른 수학문제 x문제와 서로 다른 국어문제 y문제 중 한 문제를 선택도록 하는 전체 경우의 수를 생각하자.

학생의 수가 n명이고 선택할 경우의 수가 $x+y$가지이므로 전체 경우의 수는$(x+y)^n$이다. 이제 다른 방법으로 수학문제를 선택할 학생을 미리 뽑는 경우를 생각할 수 있다. 수학문제를 푸는 학생의 수를 k라 하면 $0 \leqq k \leqq n$이고 각각의 경우는 서로소 이다. 수학문제를 푸는 학생의 수가 n명중 k인 경우의 수는 ${}_nC_k$이고 이때 k명의 학생이 수학문제 한 문제를 선택하는 경우의 수는 x^k, 나머지 $n-k$명의 학생이 국어문제를 선택하는 경우의 수는 y^{n-k}이다. 따라서 모든 경우의 수는 $\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, x^k \cdot y^{n-k}$이다.

두 증명 방법을 비교하여 보자. 교과서의 증명은 기존의 대수적 조작에 의한 증명과는 다른 조합의 정의와 직접 전개에 의해서 문제를 증명하고 있다. 한편, 조합적 논증을 통한 증명은 등식의 좌변을 관찰하여 조합적 모델 [n명의 학생에게 서로 다른 수학문제 x문제와 서로 다른 국어문제 y문제 중 한 문제를 선택도록 하는 경우의 수]을 생각하였다. 첫 번째 방법은 전체학생이 $x+y$ 문제 중 한 문제를 선택하는 경우로 셈하여 좌변을 보였고, 두 번째 방법은 학생을 기준으로 수학문제를 선택

할 학생을 먼저 뽑고 각각의 학생이 한 문제를 선택할 경우로 셈하여 우변을 보였다. 조합의 정의를 이용하여 문제를 해결하고 있어 조합의 개념을 이해하는데 도움이 될 수 있다.

문제 5 에서 방법유추를 통하여 문제 6 을 증명할 수 있다.

문제 6. 다항정리 $(x+y+z)^n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} {}_nC_k\,{}_{n-k}C_l\, x^k \cdot y^l \cdot z^{n-k-l}$ 를 증명하시오.

교과서 조합등식의 증명은 조합의 정의를 이용하기 보다는 ${}_nC_r$ 대신 $\frac{n!}{(n-r)!r!}$ 을 기계적으로 대입하여 좌변에서 우변으로 변형, 우변에서 좌변으로 변형하여 증명하거나, 이항정리에 적당한 수를 대입하는 대수적인 조작으로 증명하고 있다. 한편, 조합적 논증에 의한 증명은 조합 등식의 형태를 관찰하여 적절한 조합적 모델을 만들고 조합의 정의와 세는 방법만을 이용하여 증명하고 있어 학생들에게 조합의 기본 개념을 강화 시킬 수 있을 것이다.

3. 조합적 논증에 의한 문제해결 전략의 유형별 분류

문제 해결 전략으로서 조합적 논증은 등식문제를 세는(counting)문제로 재구성하여 해결하는 사고 유형이다. 하지만 어떤 조합 등식이 주어졌을 때 적절한 조합적 모델을 스스로 생각하여 두 가지 방법으로 세기가 쉽지 않고 창의적인 사고를 요구하는 부분이다. 따라서 본 연구에서 조합적 논증으로 등식을 증명할 때 조합적 모델의 설정과 세는 방법에 따라 다음과 같이 다섯 가지 유형으로 분류하여 분석하고자 한다. ① 두 개의 부분집합으로 나누어 셈하기; ② 대표를 뽑는 순서를 바꾸어 셈하기; ③ 부분집합 속의 부분집합으로 나누어 셈하기; ④ 기준원소를 고려하여 부분집합을 셈하기; ⑤ 최단경로의 기준점에 따른 셈하기로 나누어 살펴보도록 하자.

(1) 두개의 부분집합으로 나누어 셈하기

두 개의 부분집합으로 나누어 셈하기란 등식의 형태가 조합의 곱으로 표현된 경우에 조합적 모델을 설정하고 경우의 수를 셀 때 두 개의 부분집합으로 나누어 세는 방법을 말한다.

문제 7. ${}_{2n}C_2 = n^2 + 2\,{}_nC_2$을 조합적 논증으로 증명하시오.

증명. 좌변의 모양에 의해서 원소의 개수가 $2n$개인 집합에서 원소의 개수가 2개인 부분집합을 만드는 방법을 생각할 수 있다. 정의에 의해서 좌변은 쉽게 증명이 된다. 한편 원소의 수가 $2n$개인 집합을 적당히 원소의 수가 n인 두 집합 A, B 로 나누어 생각한다.

i) A, B 에서 각각 한 개씩 선택하는 방법의 수는 $n \times n = n^2$

ii) A 에서 2개를 선택하거나 B 에서 2개를 선택하는 방법의 수는 ${}_nC_2 + {}_nC_2 = 2{}_nC_2$이다.

i), ii)는 서로소인 경우이므로 합의 법칙이 성립하고 따라서 주어진 조합등식이 성립한다.

문제 7에서는 좌변의 형태 ${}_{2n}C_2$를 통하여 조합적 모델 [원소의 개수가 $2n$개인 집합에서 원소의 개수가 2개인 부분집합의 개수]을 만들어 좌변을 보였다. 우변은 부분집합을 셀 때 두 개의 집합 A, B로 나누어 각 집합에서 원소를 각각 하나씩 선택하는 경우와 한 집합에서 두 개를 선택하는 경우로 나누어 셈하였다. 이제 다음 문제 8을 보자.

문제 8. $n \geq 0$ 에 대하여 ${}_{2n}C_n = \sum_{k=0}^{n} ({}_nC_k)^2$을 조합적 논증으로 증명하시오.

문제 8의 자세한 증명은 생략하고, 문제해결을 위한 아이디어를 간단히 살펴보자. 좌변의 모양에 따라 조합적 모델[원소의 개수가 $2n$개인 집합에서 원소의 개수가 n개인 부분집합의 개수]을 생각한다. 우변은 두 개의 집합 A, B로 나누어 A 에서 k개 B 에서 $n-k$개를 선택하는 경우의 수는 ${}_nC_k \cdot {}_nC_{n-k} = ({}_nC_k)^2$ 이다. 한편, $0 \leq k \leq n$이고 각각의 경우는 서로 소이므로 합의 법칙에 의해서 등식을 증명할 수 있다.

이제 문제 8과 유사한 방법으로 두 개의 집합을 나누어 세지만, 약간 다른 문제 상황을 포함하는 문제 9를 볼 수 있다.

문제 9. (Vandermonde의 공식) ${}_{r+s}C_n = \sum_{k=0}^{n} {}_rC_k \cdot {}_sC_{n-k}$ 를 조합적 논증으로 증명하시오.

문제해결 탐색 과정에서 조합적 모델을 설정하고 '두개의 부분집합으로 나누어 셈하기'가 문제해결의 바탕이 되는 아이디어인 문제 7, 문제 8, 문제 9를 살펴보았다. 이들 문제는 유사한 아이디어로 해결될 수 있는 문제이지만, 약간씩 다른 문제 상황을 포함하고 있기 때문에, 학생들에게 한 가지 생각을 다양한 문제 상황에 적용할 수 있는 기회를 제공할 수 있다.

(2) 대표를 뽑는 순서를 바꾸어 셈하기

대표를 뽑는 순서를 바꾸어 셈하기란 등식의 형태가 조합에 문자가 곱해진 식으로 표현된 경우로, 대표를 뽑는 조합적 모델에서 위원회를 구성한 후 대표를 뽑는 경우와 순서를 바꾸어 대표를 먼저 뽑고 위원회를 구성하는 경우를 말한다.

문제 10. $n \geq 1$에 대하여 $k\,{}_nC_k = n\,{}_{n-1}C_{k-1}$을 조합적 논증으로 증명하시오.

증명. 학급수가 n 명인 학급에서 회원수가 k 명인 단체를 만들고 그 단체의 대표1명을 선출하는 방법을 생각하자. 먼저 회원k 명을 선출하고 그 회원에서 대표1명을 선출하는 방법은 $k\,{}_nC_k$이다. 한편, 순서를 바꾸어 대표1명을 미리 뽑는 경우를 생각하자. n명에서 미리 대표 1명을 선출하고 나머지 $n-1$ 에서 $k-1$ 명의 위원을 경우의 수는 $n_{n-1}C_{k-1}$이다.

문제 10에서는 좌변의 형태를 통해서 조합적 모델[n명인 학급에서 k명의 위원회를 조직하고 대표 1명을 선출하는 경우의 수]을 만들어 좌변을 보였다. 위원회를 조직한 후 위원회의 대표를 선출한 방법과 전체 n명에서 대표1명을 먼저 선출하고 나머지 위원회를 조직하는 방법은 동일하므로 등식은 증명 되었다. 즉, 순서를 달리하여 대표를 선출한 경우로 볼 수 있다.
문제 10과 같은 방법으로 해결되는 증명 문제로 문제 11, 12로 유추하고 확장할 수 있다.

문제 11. $n \geq 2$, $k(k-1)_nC_k = n(n-1)_{n-2}C_{k-2}$을 조합적 논증으로 증명하시오.

문제 12. $n \geq k \geq l \geq 1$, $k(k-1)\cdots(k-l)_nC_k = n(n-1)\cdots(n-l)_{n-l-1}C_{k-l-1}$을 조합적 논증으로 증명하시오.

문제 13. $n \geq 1$에 대하여 $\sum_{k=0}^{n} k({}_nC_k)^2 = n \cdot {}_{2n-1}C_{n-1}$을 조합적 논증으로 증명하시오.

문제 13의 자세한 증명은 생략하고, 문제해결을 위한 아이디어를 간단히 살펴보자. 좌변의 형태를 통해서 조합적 모델 [남학생 n명 여학생 n명으로 구성된 $2n$명의 학급에서 n명의 위원을 선택하고 남자 대표1명을 뽑는 경우의 수]을 생각할 수 있다. 좌변은 남자모임에서 k 명, 여자모임에서 $n-k$ 명을 선택하고, 남자모임에서 위원장을 뽑는 경우의 수는 $k_nC_k \cdot {}_nC_{n-k}$이므로 전체 경우의 수는 좌변이 된다. 우변은 순서를 바꾸어 남자모임에서 대표1명을 미리 뽑고 나머지 $2n-1$에서 $n-1$명의 위원을 선출하는 경우의 수이다. 두 방법은 같은 집합에서 순서를 달리하여 대표를 뽑은 경우이므로 동일한 방법으로 등식이 증명된다.

전체인원에서 위원회를 조직하고 대표를 선출하는 방법과 전체에서 대표를 선출하여 위원회를 조직하는 방법은 같은 경우로 '대표를 뽑는 순서를 바꾸어 셈하기'가 문제해결의 바탕 아이디어인 문제들로 문제 10, 문제 11, 문제 12, 문제 13을 살펴보았다.

(3) 부분집합 속의 부분집합으로 나누어 셈하기

부분집합 속의 부분집합으로 나누어 셈하기란 전체집합에서 부분집합을 만들고 그 부분집합에서 더 작은 부분집합을 만들어 경우의 수를 구하는 방법을 말한다

문제 14. $0 \leq m \leq k \leq n$에 대하여

$_nC_k \cdot {_kC_m} = {_nC_m} \cdot {_{n-m}C_{k-m}}$ 을 조합적 논증으로 증명하시오.

증명. n명의 집단에서 k명의 위원회를 구성하고 다시 m명의 소위원회를 구성하는 방법의 수를 생각하자. 정의에 의해서 $_nC_k \cdot {_kC_m}$ 이 성립한다. 한편, 순서를 바꾸어 먼저 소위원회에 포함될 m명을 선택하고 소위원회에 포함 안 되면서 위원회에 포함될 $k-m$명을 선택하는 것과 같으므로 구하는 경우의 수는 $_nC_m \cdot {_{n-m}C_{k-m}}$이다.

문제 14에서는 좌변의 형태를 자세히 살펴보면 $_nC_k \cdot {_kC_m}$로 중간에 동일한 k값을 가진 형태의 곱이다. 따라서 조합적 모델 [n명의 집단에서 k명의 위원회를 구성하고 다시 m명의 소위원회를 구성하는 경우의 수]을 생각 할 수 있다. 즉 전체집합에서 부분집합을 구성하고 다시 그 부분집합에서 더 작은 부분집합으로 나누어 셈하기로 문제를 해결하였다.

문제 15. $0 \leq m \leq k \leq n$에 대하여

$\sum_{k=m}^{n} {_nC_k} \cdot {_kC_m} = {_nC_m} \cdot 2^{n-m}$을 조합적 논증으로 증명하시오.

문제 15는 문제해결을 위한 아이디어를 간단히 살펴보자. 문제 14와 비교하면 좌변이 $_nC_k \cdot {_kC_m}$에서 k가 m에서 n까지의 합으로 구성되어 있다. 조합적 모델 [n명인 학급에서 회원수가k인 위원회를 만들고 회원수가 k인 위원회에서 다시 m명의 소위원회를 구성하는 경우의 수]에서 위원회의 인원수를 m에서 n까지 변화시키면 좌변이 된다. 우변은 문제 14와 동일한 방법으로 소위원회를 구성하고 나머지 $n-m$명의 학생으로 위원회 즉 부분집합을 만들 수 있는 모든 경우의 수는 2^{n-m}가지이므로 전체 경우의 수는 우변이 되어 증명이 된다. 문제 15와 같은 방법으로 문제 16을 증명할 수 있다.

문제 16. n이 양의정수일 때

$\sum_{2k=m}^{n} {_nC_{2k}} \cdot {_{2k}C_m} = {_nC_m} \cdot 2^{n-m-1}$을 조합적 논증으로 증명하시오.

등식의 형식(${}_{n}C_{k}\cdot{}_{k}C_{m}$로 중간에 동일한 k값을 가진 형태의 곱)을 관찰하여 '부분집합 속의 부분집합으로 나누어 셈하기'가 문제해결의 바탕 아이디어인 문제들로 문제 14, 문제 15, 문제16을 살펴보았다.

(4) 특정원소를 기준으로 부분집합 세는 방법

특정원소를 기준으로 부분집합을 셈하기란 조합적 모델에서 부분집합을 셀 때 특정원소를 먼저 선택하고 특정원소를 기준으로 나머지 원소를 구성하여 등식을 증명하는 방법을 말한다.

문제 17. (Hockey Stick 공식)${}_{m+n+1}C_{n+1}=\sum_{i=0}^{m}{}_{n+i}C_{n}$을 조합적 논증으로 증명하시오.

증명. 자연수로 구성된 집합 $\{1, 2, \cdots, m+n+1\}$에서 $n+1$개의 원소를 갖는 부분집합의 수를 생각하자. 정의에 의해서 좌변은 성립한다. 한편 집합 $\{1, 2, \cdots, m+n+1\}$에서 $n+1$개의 원소를 갖는 부분집합 중에서 최대원소가 $n+i+1(0\leq i\leq m)$인 부분집합은 나머지 $1, 2, \cdots, n+i$에서 n개를 선택하는 방법의 수와 같으므로 이러한 부분집합의 수는 ${}_{n+i}C_{n}$이고 최대원이 $n+i+1(0\leq i\leq m)$인 각각의 경우는 서로소이고 따라서 합의 법칙에 의하여 우변이 성립한다. 동일한 집합을 방법만 달리하여 셈하였으므로 등식이 성립한다.

문제 17에서는 조합적 모델 [자연수 1부터 $n+m+1$까지 구성된 자연수 집합에서 $n+1$개의 원소를 갖는 부분집합의 수]을 생각 하였다. 그리고 $n+1$개로 구성될 부분집합에서 최대원소를 미리 선택하고 나머지 원소는 최대원소보다 작은 쪽에서 n개를 선택하는 방법으로 우변을 보였다. 즉, 최대원소를 기준으로 셈하여 문제를 해결하였다.

문제 18. $0\leq k\leq\frac{n}{2}$에 대해서

$$\sum_{m=k}^{n-k}{}_{m}C_{k}\ {}_{n-m}C_{k}={}_{n+1}C_{2k+1}$$을 조합적 논증으로 증명하시오.

증명. 집합 $\{1,2, \cdots, n+1\}$에서 $2k+1$개의 원소를 갖는 부분집합의 수를 생각하자. 정의에 의해서 좌변은 성립한다. 한편 부분집합의 원소의 개수가 홀수개 이므로 중앙에 오는 원소는 $k+1$번째 원소가 된다. 중앙에 오는 원소를 미리 뽑고 그 원소 보다 작은 쪽에서 k개 큰 쪽에서 k개를 선택하면 된다. 즉 집합 $\{1,2, \cdots, n+1\}$에서 $m+1$번째 원소를 부분집합의 $k+1$번째 원소로 뽑

을 경우 $m+1$보다 작은 m 개 중에서 k 개를 선택하고 $m+1$보다 큰 $n-m$ 개 중에서 k 개를 선택하면 ${}_mC_k \cdot {}_{n-m}C_k$이다. 그리고 $k+1 \leq m+1 \leq n+1-k$이므로 우변이 성립한다.

문제 18에서는 문제 17과 증명 방법이 거의 유사하나 부분집합의 개수가 홀수인 것과 등식의 우변의 형태를 관찰하여 기준원소를 중앙원소로 하여 중앙원소 보다 큰 쪽에서 k개 작은 쪽에서 k개를 선택하는 경우로 문제해결 아이디어를 구성하였다.

이제, 기준원소를 생각하여 다음과 같이 흥미로운 증명을 할 수 있다.

문제 19. $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$을 조합적 논증으로 증명하시오.

증명. 집합 $\{1,2,\cdots,n+1\}$에서 순서쌍 (x,y)중에서 $y>x$의 개수를 구하는 방법을 두 가지 방법으로 셈하여 보자. 첫 번째 방법은 일일이 모두 세는 것이다.

$y=1$ 이면 0개

$y=2$ 이면 1개

$y=3$ 이면 2개

. . . .

$y=n+1$ 이면 n 개

이므로 $y>x$을 만족하는 순서쌍 전체의 개수는 주어진 등식의 좌변이다. 이제 다른 방법으로 셈하자. $y>x$인 경우는 $n+1$개 중에서 서로 다른 2개의 원소를 선택하여 큰 수를 y, 작은 수를 x라 놓으면 되므로 ${}_nC_2$이고 그것은 우변과 같음을 알 수 있다.

문제 20. $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$을 조합적 논증으로 증명하시오.

증명. 집합 $\{1,2,\cdots,n+1\}$에서 세 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$중에서 $z>\max\{x,\ y\}$인 것의 개수를 구하여 보자. 첫 번째 방법으로는 일일이 모두 세는 것이다.

$z=1$ 이면 0개

$z=2$ 이면 1^2개

$z=3$ 이면 2^2개

. . . .

$z=n+1$ 이면 n^2개

이므로 $z>\max\{x,\ y\}$를 만족하는 순서쌍 전체의 개수는 주어진 등식의 좌변이다.

이제 다른 방법으로 셈하여 보자. $z>\max\{x,\ y\}$인 경우는 $x=y<z$, $x<y<z$, $y<x<z$의 세 가지 경우가 있으므로 각각의 경우 주어진 조건을 만족하는 순서쌍의 개수는

${}_{n+1}C_2$, ${}_{n+1}C_3$, ${}_{n+1}C_3$ 이다. 왜냐하면 처음의 경우 1부터 $n+1$까지 자연수 중에서 두 수를 선택하여 큰 수를 z, 작은 수를 모두 x와 y라 놓으면 되고 뒤의 경우는 1부터 $n+1$까지 자연수 중에서 세 수를 선택하여 큰 수를 z, 작은 두 수를 각각 x와 y 또는 y와 x라 놓으면 되기 때문이다. 따라서 같은 대상을 두 가지 방법으로 셈하였으므로 주어진 등식이 성립한다.

문제 20과 같은 방법으로 문제 21을 증명할 수 있다.

문제 21. $1^3+2^3+\cdots+n^3=[\frac{n(n+1)}{2}]^2$을 조합적 논증으로 증명하시오

조합적 논증으로 증명할 때 자연수 집합을 조합적 모델로 만들어 부분집합의 개수를 구하는 과정에서 기준원소를 미리 선택하고 기준원소에 따라 나머지 원소를 구성하는 '기준원소를 고려하여 부분집합 셈하기' 방법이 문제해결의 바탕 아이디어가 되는 문제들을 살펴보았다. 문제19. 문제20. 문제21로 확장이 가능하고 이를 통하여 자연수의 네제곱의 합도 유도할 수 있고, 자연수의 k제곱의 합은 수의 분할과 연관이 있음을 알 수 있다.

(5) 최단경로의 기준점에 따라 세는 방법

바둑판 모양의 직사각형위에 왼쪽 아래를 출발점으로, 오른쪽 위를 도착점으로 정한다. 출발점에서 도착점까지 최단 경로의 수를 구할 때 반드시 지나는 기준점을 어떻게 정하는가에 따라 다양한 조합 등식을 증명할 수 있다.

문제 22. $a>0$, $b>0$에 대하여 ${}_{a+b}C_a={}_{a+b-1}C_a+{}_{a+b-1}C_{a-1}$을 조합적 논증으로 증명하시오.

증명. 좌표평면 위의 동점이 원점에서 출발하여 오른쪽 및 위로 1칸씩 간다고 할 때, 점 $P(a,b)$까지 가는 방법 수를 $f(a,b)$라고 하면,

$$f(a,b)=\frac{(a+b)!}{a!\,b!}={}_{a+b}C_a$$

한편 점$P(a,b)$에 가는 것은 다음 두 가지의 방법이 있다.

$$O(0,0)\Rightarrow\ldots\Rightarrow A(a-1,b)\Rightarrow P(a,b)$$
$$O(0,0)\Rightarrow\cdots\Rightarrow B(a,b-1)\Rightarrow P(a,b)$$

따라서

$$f(a,b)=f(a-1,b)+f(a,b-1)$$

즉, $\dfrac{(a+b)!}{a!\,b!} = \dfrac{(a+b-1)!}{(a-1)!\,b!} + \dfrac{(a+b-1)!}{a!\,(b-1)!}$ 이므로 등식이 증명되었다.

여기서 $a+b=n$으로 두면 파스칼 공식이 되고 파스칼 공식의 또 다른 증명이 되는 셈이다.

문제 23. $a>0, b>0$에 대하여 ${}_{a+b}C_a = \sum_{k=0}^{a} {}_bC_k\, {}_aC_{a-k}$을 조합적 논증으로 증명하시오.

증명. (Vandermonde의 공식, 문제10) 의 특수한 형태이다.

좌표평면 위의 동점이 원점에서 출발하여 오른쪽 및 위로 1칸씩 간다고 할 때, 점 $P(a,b)$까지 가는 방법 수를 $f(a,b)$라고 하면,

$$f(a,b) = \frac{(a+b)!}{a!b!} = {}_{a+b}C_a$$

이제는 기준점을 대각선 위의 점으로 하면 다음과 같은 방법이 있다.

$$O(0,0) \Rightarrow \cdots \Rightarrow Q_0(0,b) \Rightarrow P(a,b)$$
$$O(0,0) \Rightarrow \cdots \Rightarrow Q_1(1,b-1) \Rightarrow P(a,b)$$
$$\cdots$$
$$O(0,0) \Rightarrow \ldots \Rightarrow Q_k(k,b-k) \Rightarrow P(a,b)$$
$$\cdots$$
$$O(0,0) \Rightarrow \cdots \Rightarrow Q_a(a,b-a) \Rightarrow P(a,b)$$

여기서 $O(0,0) \Rightarrow \ldots \Rightarrow Q_k(k,b-k)$의 방법의 수는 ${}_bC_k$이고

$Q_k(k,b-k) \Rightarrow P(a,b)$의 방법의 수는 ${}_aC_{a-k}$ 이므로

$f(k,b-k) = {}_bC_k \cdot {}_aC_{a-k}$이다.

따라서 $f(a,b) = \sum_{k=0}^{a} f(k,b-k) = \sum_{k=0}^{a} {}_bC_k \cdot {}_aC_{a-k}$

문제 24. $a>0, b>0$ 에 대하여 ${}_{a+b+1}C_{a+1} = \sum_{k=0}^{b} {}_{a+k}C_a$ 을 조합적 논증으로 증명하시오.

증명. (Hockey stick 공식, 문제17의 다른 증명방법) 좌표평면 위의 동점이 원점에서 출발하여 오른쪽 및 위로 1칸씩 간다고 할 때, 점 $P(a+1,b)$까지 가는 방법 수를 $f(a+1,b)$라고 하면,

$$f(a+1,b) = \frac{(a+b+1)!}{(a+1)!b!} = {}_{a+b+1}C_{a+1}$$

한편 점 $P(a+1,b)$에 가는 다른 방법은 다음과 같이 생각할 수 있다.

$$O(0,0) \Rightarrow \cdots \Rightarrow Q_0(a,0) \Rightarrow P(a+1,b) : f_0(a,0)$$
$$O(0,0) \Rightarrow \cdots \Rightarrow Q_1(a,1) \Rightarrow P(a+1,b) : f_1(a,1)$$
$$\cdots$$
$$O(0,0) \Rightarrow \cdots \Rightarrow Q_k(a,k) \Rightarrow P(a+1,b) : f_k(a,k)$$
$$\cdots$$
$$O(0,0) \Rightarrow \cdots \Rightarrow Q_b(a,b) \Rightarrow P(a+1,b) : f_b(a,b)$$

그리고 $f_k(a,k) = \dfrac{(a+k)!}{a!\,k!} = {}_{a+k}C_a$ 이다.

따라서 $f(a+1,b) = \displaystyle\sum_{k=0}^{b} f_k(a,k) = \sum_{k=0}^{b} {}_{a+k}C_a$

'최단경로의 기준점을 정하여 셈하는 방법'이 문제해결의 핵심 아이디어로 다양하게 문제를 해결하였다. 문제 22는 기준점을 도착점의 바로 이웃한 두 점을 잡은 경우이고, 문제 23은 기준점을 대각선으로, 문제 24는 세로선을 각각 잡은 경우이다. 즉 기준점을 어떻게 잡느냐에 따라서 다양한 조합등식의 문제를 만들고 조합적 논증으로 증명할 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 등식에 대한 문제해결 전략으로 조합등식의 증명에서 조합적 논증에 의한 증명방법과 기존의 수학교과서에 제시된 증명방법을 비교하고 조합등식에서 조합적 논증에 의한 문제해결 전략을 유형별로 분류하고 제시하였다. 조합적 논증에 의한 문제해결 전략을 유형별로 ① 두 개의 부분집합으로 나누어 셈하기; ② 대표를 뽑는 순서를 바꾸어 셈하기; ③ 부분 집합 속의 부분집합을 생각하여 셈하기; ④ 특정원소를 기준으로 부분집합을 셈하기; ⑤ 최단 경로를 기준점에 따라 셈하기 인 다섯 가지 유형으로 분류하였고 각각의 전략에 대한 구체적인 방법을 살펴보았다.

본 연구를 통해 특히 다음 몇 가지 측면이 기대되어 진다. 첫째, 수학 교과서에서 조합등식의 증명은 조합의 정의를 이용하기 보다는 주로 대수적인 조작, 즉 ${}_nC_r = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$ 을 이용하거나 이항정리를 이용하여 증명하고 있어 학생들이 공식에 의한 일상적 맹목적 문제 풀이에 의존하는 경향이 있고 자칫하면 수학을 어려워하고 포기하게 만들기도 한다. 하지만 조합적 논증을 이용한 증명은 최소한의 지식, 조합의 정의와 세는 방법을 이용하여 문제를 해결하고 있어 조합의 개념을 이해하는데 도움을 줄 수 있을 것이다. 둘째, 조합적 논증에 의한 증명은 문제를 증명하기 위해서 문제의 형식을 보고 그 상황에 맞는 적당한 문제 상황을 스스로 재구성한다. 즉, 문제를 재구성하는 것은 학생들의 상상력을 자극할 수 있을 것이고, 이러한 상황에서 학생들의 창의력을 신장시킬 수 있을 것이다. 마

지막으로, 조합적 논증에 의한 증명을 통해서 하나의 문제에서 여러 가지 문제로의 유추와 확장이 가능하며 조합적 모델을 어떻게 설정하고 세는가에 따라 하나의 문제를 다양한 방법으로 해결이 가능하며 복잡한 조합등식의 문제도 간결하게 해결할 수 있을 것이다 .

본 연구에서는 조합적 논증을 이용한 문제의 해결 방법에 심도 있는 논의보다는 구체적인 문제 풀이를 통하여 새로운 탐구를 하였으며, 그 관련성을 몇몇 예제와 문제를 통해서 제시하였다. 이를 통해 얻어진 결과들은 조합등식에서 조합적 논증에 대한 새로운 증명 방법의 탐색, 조합적 논증의 수학 교수학적 활용의 다양한 가능성을 모색할 수 있는 기초자료를 제공할 것이며, 제시된 증명 방법들은 '순열과 조합'의 지도에서 심화학습 자료로도 활용할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

교육부 (1998). 수학과 교육과정, 서울: 대한교과서주식회사.

남승인 · 류승림 (2002). 문제해결 전략지도의 실제, 서울: 형설출판사.

박규홍 외 5인 (2002a). 수학Ⅰ 교사용지도서, 서울: (주) 교학사.

박규홍 외 5인 (2002b). 수학Ⅰ, 서울: (주) 교학사.

신현성 · 김경희 (1999). 수학적 문제해결, 서울: 경문사.

양은경 · 황우형 (2005). 수학 학습유형과 문제 해결 전략, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **44(4)**, pp.565-582, 서울: 한국수학교육학회.

우정호 (2000). 학교 수학의 교육적 기초, 서울: (주)서울대학교 출판부

유익승 (2005). 수학영재들의 수학적 재능 향상을 위한 '등식의 탐구' 프로그램 개발. 2005과학고 영재교육 내실화지원 교수-학습 프로그램.

에르든예프 · 한인기 (2005). 유추를 통한 수학탐구, 서울: 승산.

이주영 · 김서령 · 박혜숙 · 김완순 (2006). 조합문제 사이의 구조적 동형, 한국수학교육학회지 시리즈 A<수학교육> **45(1)**, pp.123-137, 서울: 한국수학교육학회.

이지현 (2004). 조합 문제에 대한 학생들의 이해와 해결 전략, 서울대학교 대학원 석사학위논문.

조퇴근 외 4인 (2002a). 수학Ⅰ 교사용지도서, 서울: (주) 금성출판사.

조퇴근 외 4인 (2002b). 수학Ⅰ, 서울: (주) 금성출판사.

한인기 (2006). 수학교육학의 기초와 실제, 경남: (주) 경상대학교 출판부

한인기 (2002). 오일러 공식의 다양한 증명들, 한국수학사학회지, **15(2)**, pp.33-48, 서울: 한국수학사학회.

한인기 (2003). 한 가지 수학 문제의 교육적 분석 및 관련된 문제의 체계화에 대한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **42(1)**, pp.55-67, 서울: 한국수학교육학회.

황석근 · 이재돈 · 김익표 (2001). 이산수학, 서울: (주) 블랙박스.

황혜정 (2001). 수학적 사고 과정 관련의 평가 요소 탐색, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **40(2)**, pp.253-263, 서울: 한국수학교육학회.

Benjamin, A. T. & Quinn, J. J. (2003). *Proofs That Really Count-The Art of Combinatorial Proof*, Washington: MMA

Polya, G. (1957). *How to solve it. Princeton:* Princeton University Press.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving,* Orlando: Academic Press.

A Study on Problem-solving Using Combinational Proof

Yoon, Dae Won
Dept. of Mathematics Education, Gyeongsang National University, 660-701, Korea
E-mail : dwyoon@gsnu.ac.kr

Kim, Eun Ju
Guam Middle School, 630-802, Korea
E-mail : ejk-hiha@hanmail.net

Lyou, Ik Seung
Jeonbuk Science High School, 570-911, Korea
E-mail : infgrp@hanmail.net

The purpose of this study is to compare the way of proving using combinational proof with the way of proving presented in the existing math textbook in the proof of combinational equation and to classify the problem-solving into some categories using combinational proof in combinational equation.

Corresponding with these, this study suggests the application of combinational equation using combinational proof and the fundamental material to develop material for advanced study.

* ZDM Classification : E54

* MSC2000 Classification : 97D50

* Key word : Problem Solving, Combinational Proof