韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 20집 제 3호, 2006. 9. 361-372

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 20, No. 3, Sep. 2006. 361-372

라카토스의 보조정리 합체법을 적용한 교수-학습 자료 개발

조 열 제 (경상대학교)
류 수 정 (화개중학교)
유 익 승 (전북과학고등학교)
김 태 호 (경상사대부속고등학교)

본 연구에서는 Lakatos의 보조정리 합체법을 바탕으로, 이등변삼각형의 성질 중의 1가지를 추측-증명-반박-개선을 통해 n각형으로 확장시키고, 중 · 고등학생들을 대상으로 하는 심화활동 시간에 활용할 수 있는 교수-학습 자료를 개발하였다.

1. 서 론

역사를 통해서 보면 수학적 지식을 관찰과 귀납의 결과로 보는 경우도 있고, 절대적 진리의 대전제 하에 연역적 추리를 통해 새로운 지식을 증명해 나가며 수학적 지식을 신장시켜 나가는 경우로 보기도 한다. 그러나 우리의 교과서는 주된 방법을 연역주의자들의 방식을 택하고 있다고 할 수 있다.

연역주의자의 방식에서는 모든 명제는 반드시 참이고, 모든 추론도 타당하며 수학은 영원불변한 진리가 계속 증가하는 집합으로 제시된다. 그들은 또한 그들이 이미 진리라고 여기는 수학적 체계에 대해 반박이나 반례를 제시하거나, 비판의 행동을 억압하므로 수학에 대한 권위주의적 태도를 유지해 왔다. 그리고 이들을 옹호하는 사람들은 '연역은 수학에서 정해진 발견적 패턴이며, 발견의 논리는 연역'이라는 주장까지 내세웠다.

이렇게 연역적 방식의 수학은 수학적 진리를 모순이 없는 완벽한 진리로 생각했기 때문에 수학교육에 이를 적용하였을 때도 마찬가지로 정해진 내용대로 따라갈 뿐, 누가 어떤 고민을 통해 수학적 정의나 정리라는 결론을 도출하였는지 그 과정은 알 수 없다. 또한 그들은 역사 속에서 오류라고 판정된 지식은 쳐다볼 가치도 없는 무가치한 지식으로 여겨 학생들에게는 자동적으로 걸러진 채로 제시하고, 언제나 정답이라는 정해진 길로만 가기를 고집하게 되는 것이다. 이것은 수학은 전체를 배우는 것이 아니라 어쩌면 밝은 면만 보게 하는 반쪽의 수학을 배우는 것이라고 할 수 있는 것이다.

이와 같은 수학의 연역성이라는 큰 흐름에 반기를 들고 등장한 수리철학자가 바로 Lakatos이다.

* ZDM분류 : U13
* MSC2000분류 : 97U99
* 주제어 : 보조정리 합체법, 증명과 반박, 교수-학습 자료

그는 수학적 지식의 성장은 추측 또는 증명과 반박을 통해 이루어지는 것이며 지식은 잠정적으로만 참일 뿐 영원불변한 진리가 아니라고 하였다. 그러므로 Lakatos는 증명을 통해 지식이 참임을 밝히는 것이 아니라 증명 과정에서의 비판과 반박을 통한 새로운 개념의 탄생 논리를 중요시 여겼다. Lakatos는 수학은 고정된 기초위에 세워진 유한한 구조가 아니라, 항상 성장하고 변화함에 따라 기초를 수정해 나가는 지식체라고 주장한다. 수학적 지식은 절대적 진리도 아니고 절대적 확실성도 갖지 않으며 오류 가능하므로 끊임없는 개선의 여지가 있다는 것이다.

Lakatos의 수리철학을 수학 학습 지도 방법의 개선을 위해 적용을 시도한 여러 연구들을 살펴보면, 수학적 지식의 관점에 대한 개선 방안으로 Lakatos가 주장한 발견의 논리를 수학 수업에 적용할 수 있는 방안에 대한 연구(류시규・김희정, 2000), 삼각형에서 중점연결 정리, 피타고라수의 증명 등에 Lakatos의 수리철학에 입각한 발견적 접근법을 적용한 연구(강문봉, 1993), 발전적 관점에 따라 수학의 발전을 분석하여 발전의 원동력을 정리하며, 이를 바탕으로 발전적 관점에 따라 어떻게 수학 교수-학습이 이루어질 수 있는지 구체적으로 그 가능성을 모색한 연구(정승진, 2003) 등 이 있다.

또한, 발견적 사고과정의 중요성을 강조한 Poliya가 문제해결의 방법으로 제시한 발생적 원리는 수학을 공리적으로 전개된 완성된 것으로 '가르치는' 그러한 형식주의의 결함을 극복하기 위하여 발달의 개념을 수학교육학의 중심에 놓고 수학의 학습-지도의 문제를 발달에 대한 어떤 해석에 따라 구상하려는 교수학적 원리이다.

그리고 Poincaré와 Klein과 같은 교육에 관심을 가졌던 위대한 수학자들이 주장한 역사발생적 원리가 있다. 이들은 수학의 역사적 발달의 과정에 따라 소박하고 직관적인 상태에서 점진적인 형식화 단계를 거쳐 마지막에 연역적인 형식체계에 이르도록 지도하는 것이 자연스럽고 과학적인 지도방법이라고 주장하였다.

문제 상황이 발생하였을 때 그 문제를 해결하기 위해서 스스로 문제 사태를 파악하고, 계획하며 타인과의 의사소통으로 해결의 힌트를 얻으며 자기 나름대로의 해법을 터득해 나갈 때 학생들은 문제에 대한 해결력을 가지게 되는 것이다.

따라서 본 연구에서는 Lakatos의 보조정리 합체법을 바탕으로, '이등변삼각형의 밑변에 속하는 임의의 점으로부터 각 옆 변까지 거리의 합은 일정하며 옆 변에 그은 높이와 같다' 는 성질을 추측-증명-반박-개선을 통해 n각형으로 확장시킴으로써, 중・고등학생들을 대상으로 하는 심화활동 시간에 활용할 수 있는 교수-학습 자료를 개발할 것이다.

2. 증명과 반박의 방법(보조정리 합체법 lemma-incorporation method)

Lakatos의 입장에서는 수학적 지식은 추측에 불과하고, 증명이란 원래의 추측을 부분추측으로 분해하는 사고실험이고, 수학은 증명을 통한 정리의 확립이 아니라, 증명을 통해 반례의 발견과 반박을 용이하게 함으로써 추측의 개선이 시도되는 과학으로서 지식을 확장해나가는 발견술적 규칙을 다음의 5가지로 정리하였다.

규칙 1 : 추측을 하면 그 증명이나 반박에 착수하라. 증명을 주의 깊게 조사하여 자명하지 않은 보조정리의 목록을 마련하여라(증명-분석). 추측에 대한 반례(전면적 반례)와 의심스러운 보조정리에 대한 반례(국소적반례)를 양쪽 다 찾아보아라.

규칙 2 : 전면적인 반례가 있으면 추측을 버리고, 반례에 의해 반박될 적절한 보조정리를 증명-분석에 추가하고 그 보조정리를 조건으로 합체시킨 개선된 추측으로 기각한 추측을 대체시켜라. 반례를 괴물이라고 보고 버려지도록 허용하지 말아라. '모든 감추어진 보조정리'를 명백하게 하려고 시도하여라.

규칙 3 : 국소적 반례가 있으면 그것이 또한 전면적 반례인지 아닌지 검사해 보아라. 만약 전면적인 반례라면 규칙 2를 쉽게 적용할 수 있다.

규칙 4 : 만일 국소적 반례이지만 전면적 반례가 아닌 반례가 있으면 반증되지 않는 보조정리로, 반박된 보조정리를 대체시켜 증명-분석을 개선하도록 시도하여라.

규칙 5 : 만약 어떤 유형이든 반례를 얻었다면 연역적 추정에 의하여 그것들이 더 이상 반례가 되지 않는 보다 깊은 정리를 발견하도록 시도하여라.

한인기(2006)에 의하면, 주된 추측을 'a가 성립한다'라 하고, 주된 추측을 부분추측 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n으로 분해하여, 이 부분추측이 성립하는 영역을 각각 A_1, A_2, $A_3 \cdots$, A_n이라 하면, 보조정리 합체법에 의해 얻어지는 개선된 추측은 '$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n$에 대해 a가 성립한다'이며, 보조정리 합체법은 주된 추측이 성립하는 영역을 부분추측들이 성립하는 영역으로 제한하는 방법이라 할 수 있다.

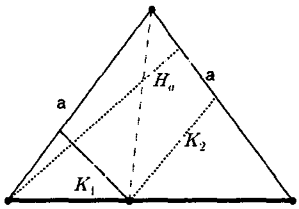
3. 교수-학습 자료의 개발

본 교수-학습 자료의 개발은 한인기(2006)가 제시한 8가지의 수학교수학적 원리의 분류 중에서 체계성과 순차성, 도달가능성의 원리에 기본 방향을 두었다. 학생들의 지적 계발수준, 능력 등에 적합한 내용으로(도달가능성), 학습 내용의 요소들 사이의 긴밀한 관련성 확인, 요소와 구조의 결합 규명, 부분과 전체의 결합 규명을 통해(체계성), 단순한 것에서 복잡한 것으로, 쉬운 것으로 부터 어려운 것으로, 순차적으로 보충하였다(순차성).

(1) 추측

Lakatos의 증명과 반박의 방법(보조정리 합체법)을 적용하여 이등변삼각형의 성질을 n각형으로 확장시켜 추측해보고 성질을 증명하고자 한다.

교사: 이등변삼각형의 밑변에 속하는 임의의 점으로부터 각 옆 변까지 거리의 합은 일정하며 옆 변에 그은 높이와 같습니다. 이 성질을 $(n-1)$개의 변이 서로 같은 n각형에서 위의 성질을 일반화 시키고 이 추측을 증명하여 봅시다.



<그림 1>

<그림 1>과 같이 옆 변까지의 거리를 각 각 K_1, K_2 라 하고, 옆변 그은 높이를 H_a 라 합시다.

그러면, $\frac{1}{2}aK_1+\frac{1}{2}aK_2=\frac{1}{2}aH_a=S$ 입니다.

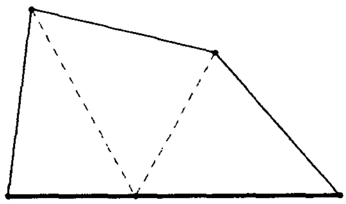
따라서 $K_1+K_2=\frac{2S}{a}$ (일정) 이며,

$K_1+K_2=H_a$ 입니다.

위의 이등변삼각형의 성질을 일반화 시키면, "$(n-1)$개의 변이 서로 같은 n각형에 대하여 길이가 다른 한 변에 속하는 임의의 점으로부터 각 옆 변까지 거리의 합은 일정하며 옆 변에 그은 높이와 같다."로 추측할 수 있습니다. 이 성질을 증명하기 위해 다음과 같은 단계3의 사고실험을 해봅시다.

(2) 증명(단계3의 사고실험)

[단계1] 아래의 <그림 2>와 같이 길이가 다른 변(기준변이라 하자-그림의 굵은 선분)에 속하는 임의의 점에서 각 꼭지점을 연결하여 주어진 다각형을 삼각형으로 나눕니다.


<그림 2>

[단계2] n각형의 기준변 위의 임의의 점에서 각 변까지 거리의 합은 일정합니다.

이등변삼각형의 예를 들면 $\frac{1}{2}aK_1+\frac{1}{2}aK_2=\frac{1}{2}aH_a=S$ 이고 ,

$$K_1+K_2=\frac{2S}{a}\text{ (일정) 입니다.}$$

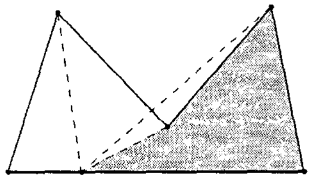
[단계3] 위의 거리의 합은 옆 변에 그은 높이와 같습니다.

이등변삼각형의 예를 들면 $\frac{1}{2}aK_1 + \frac{1}{2}aK_2 = \frac{1}{2}aH_a$ 이므로,

$K_1 + K_2 = H_a$ 입니다.

(3) 단계1의 보조정리에서 나타난 반례(전면적 반례)및 개선된 추측

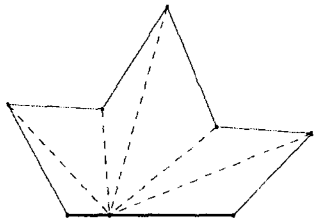
학생1 : 다음의 <그림 3>과 같이 오목한 다각형은 기준변의 임의의 점에서 각 꼭지점과 연결하면 삼각형으로 분할 할 수 없는 경우가 생깁니다. 즉 단계1의 방법으로 모든 n각형을 삼각형으로 분할 할 수가 없는데요?



<그림 3>

교사 : 단계1의 추측을 반박하는 반례가 나타났습니다.

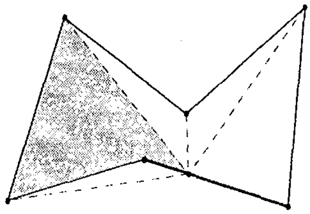
학생2 : 오목한 다각형이라도 아래 <그림 4>과 같은 경우에는 삼각형으로 분할 할 수 있습니다. 즉 오목한 다각형 중에도 삼각형으로 분할 할 수 있는 것이 있습니다.



<그림 4>

교사 : 단계1의 추측을 반박하는 반례가 나타났습니다. 이는 단계1의 부분추측에 대한 반례가 아니라 원래의 추측에 대한 전면적 반례입니다. 그러면 이 반례에 의해 반박될 보조정리를 원래 추측에 조건으로 합체시켜 봅시다. 즉 학생 1의 반례에 대하여 학생2의 개선안을 받아들여 삼각형으로 분할할 수 있는 도형으로 조건을 줍시다. 그래서 n각형의 범위를 "기준변과 이웃하지 않는 각 변의 연장선이 기준변과 만나지 않는 도형에 대하여 원래 추측이 성립한다"고 원래의 추측을 개선하도록 합시다. 그리고 그러한 도형에 대해서는 단계1의 부분추측이 성립합니다.

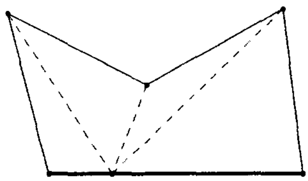
학생3 : 그런데 아래 <그림 5>와 같이 기준변과 이웃하지 않는 각 변의 연장선과 기준변이 만나지 않아도 주어진 도형을 삼각형으로 분할 할 수 없는 경우가 생깁니다. 개선한 추측에 대해서도 성립하지 않는 예가 있습니다.



<그림 5>

교사: 원래의 추측을 개선한 추측에 대해서 단계1의 부분추측에 대한 반례가 다시 나타났습니다.

학생4 : 아래 <그림 6>과 같이 기준변에서 내부로 각 꼭지점이 보일 때는 주어진 도형을 삼각형으로 분할 할 수 있게 됩니다.



<그림 6>

교사 : 개선된 추측에서 단계1의 부분추측을 반박하는 반례가 나타났고 이는 위와 마찬가지로 단계1의 부분추측에 대한 반례가 아니라 원래의 추측에 대한 전면적 반례입니다. 따라서 학생3의 반례에 대하여 학생4의 개선안을 받아들여 "기준변에서 내부로 각 꼭지점이 보이는 n각형에 대하여 원래 추측이 성립한다"고 원래의 추측을 다시 개선하도록 합시다. 그리고 그러한 도형에 대해서는 단계1의 부분추측이 성립합니다.
그런데 이 추측의 표현을 볼록다각형의 정의와 연결시켜 조건의 표현을 개선하여 "기준변에서 내부로 각 꼭지점이 보이는 n각형"을 "도형이 이루는 각의 내부에 기준변이 존재하는 n각형"이라고 바꾸면 좋겠습니다.

(4) 단계2의 보조정리에 대한 증명-분석

교사 : 이제 단계2를 설명해봅시다.

학생5 : 삼각형으로 분할 된 n각형의 기준변 위의 임의의 점에서 각 변까지 거리의 합은 일정함을 보이겠습니다.

기준변 위의 임의의 점에서 각 변까지 거리를 각 각 $K_1, \ldots\ldots, K_{n-1}$ 라 합시다.

그러면, $\frac{1}{2}aK_1 + \frac{1}{2}aK_2 + \ldots\ldots + \frac{1}{2}aK_{n-1} = S$ 이고,

$K_1 + K_2 + \ldots\ldots + K_{n-1} = \frac{2S}{a}$ (일정) 합니다.

교사 : 설명이 정확합니까?

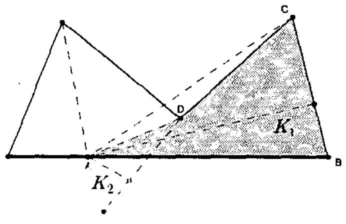
학생들 : 예

(5) 단계1과 단계2에 대한 국소적 반례 및 추측에 대한 증명의 개선

학생6 : 그런데 위의 설명에서 주어진 도형을 삼각형으로 분할 할 수 없는 경우에 대하여 삼각형이 아닌 부분(사각형)의 넓이를 구하는 방법을 생각해 봅시다.

주어진 사각형에서 같은 변을 밑변으로 하는 큰 삼각형에서 작은 삼각형의 넓이를 빼면, 삼각형이 아닌 부분의 넓이를 구할 수 있습니다. 그리고 작은 삼각형은 주어진 도형에 포함되지 않는 삼각형입니다. 따라서 작은 삼각형의 높이를 음수로 하면 삼각형이 아닌 부분(사각형)의 넓이를 구할 수 있습니다. 예를 들면, 아래의 <그림 7>에서 사각형ABCD에 대하여 생각해봅시다.

<그림 7>과 같이 □ABCD의 한 꼭지점 A에서 옆 변에 그은 높이를 K_1, K_2 라 합시다.



<그림 7>

그러면, $\square ABCD = \triangle ABC - \triangle ADC$

$= \frac{1}{2}aK_1 - \frac{1}{2}aK_2 = \frac{1}{2}aK_1 + \frac{1}{2}a(-K_2)$ 입니다.

교사 : 단계1과 단계2에 대한 국소적 반례가 나타났습니다.

따라서, 단계1은 "기준변 위의 임의의 점에서 각 꼭지점을 연결하여 주어진 다각형을 삼각형, 또는 사각형으로 나눈다."로 개선합시다.

또 단계2는 설명할 때 n각형에 포함되지 않는 부분에서 생겨난 삼각형의 높이를 음수로 두면 단계2가 성립하므로 " n각형의 기준변 위의 임의의 점에서 각 변까지 거리(음수포함)의 합은 일정하다."로 개선합시다.

그리고 위에서 여러 반례에 의해서 개선된 원래의 추측도 조건이 없이 n각형에 대해 그대로 성립함을 알 수 있습니다.

학생6 : 그러면 위의 단계2에 대한 설명을 다음과 같이 바꾸면 되겠네요.
기준변 위의 임의의 점에서 각 변까지 거리를 각 각 $K_1, \ldots, K_{n-1}$($K_i \in R$)(n각형에 포함되지 않는 부분의 삼각형에서 대변까지의 거리는 음수이다)라 합시다.
그러면, $\frac{1}{2}aK_1 + \frac{1}{2}aK_2 + \ldots + \frac{1}{2}aK_{n-1} = S$ 이고

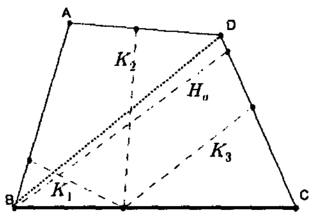
$$K_1 + K_2 + \ldots + K_{n-1} = \frac{2S}{a} \text{ (일정) 합니다.}$$

교사 : 아주 훌륭합니다.

(6) 단계3의 보조정리에 대한 전면적 반례와 국소적 반례 및 추측의 개선

교사 : 단계3에 대해서 설명해 봅시다.

학생7 : 단계3은 삼각형인 경우는 성립하나 아래의 <그림 8>과 같이 사각형인 경우 거리의 합이 옆 변에 그은 높이와 다릅니다.
예를 들면, <그림 8>과 같이 옆 변에 그은 높이를 H_a 라 합시다.



<그림 8>

그러면, $S = \frac{1}{2}aK_1 + \frac{1}{2}aK_2 + \frac{1}{2}aK_3$ 이고,

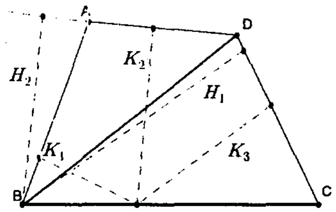
또, $S = \triangle ABD + \triangle DBC = \triangle ABD + \frac{1}{2}aH_a$ 입니다.

따라서, $K_1 + K_2 + K_3 \neq H_a$ 입니다.

교사 : 원래의 추측에 대한 전면적 반례가 나타났습니다. 어떻게 추측을 개선해야 할까요?

학생 7 : 단계3은 삼각형인 경우는 성립하나 위의 설명과 같이 사각형인 경우 거리의 합이 옆 변에 그은 높이의 합과 같게 됩니다. 따라서 n각형의 기준변 위의 임의의 점에서 각 변까지 거리의 합은 그 옆변에 그은 높이의 합과 같다고 단계3의 추측을 개선하면 되겠습니다.

예를 들면, 아래의 <그림 9>와 같이 사각형인 경우 기준변의 한 끝점에서 기준변과 꼭지점을 공유하지 않은 두 개의 변까지 거리를 각 각 H_1, H_2 라 합시다.



<그림 9>

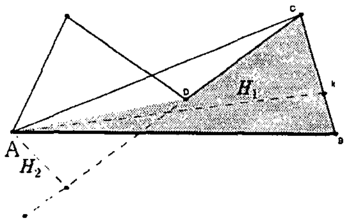
그러면, $S=\frac{1}{2}aK_1+\frac{1}{2}aK_2+\frac{1}{2}aK_3$ 이고,

또, $S=\triangle ABD+\triangle DBC=\frac{1}{2}aH_1+\frac{1}{2}aH_2$ 이므로,

$K_1+K_2+K_3=H_1+H_2$ 이다.

학생8 : 그러면 이 경우에도 앞의 단계2와 마찬가지로 삼각형으로 분할이 안되는 n각형에 대해서도 높이를 음수로 둔다면 위의 추측이 성립합니다.

예를 들면, 아래의 <그림 10>에서 보는 바와 같이



<그림 10>

$\square ABCD=\triangle ABC-\triangle ADC$

$=\frac{1}{2}aH_1-\frac{1}{2}aH_2=\frac{1}{2}aH_1+\frac{1}{2}a(-H_2)$ 입니다.

교사 : 위의 개선안을 적용하여 단계3을 개선하여 봅시다.

학생8 : 개선된 단계3은 " n각형에 포함되지 않는 부분의 삼각형의 높이를 음수로 둔다면, 기준변 위의 임의의 점에서 각 변까지 거리의 합과 기준변의 한 끝점에서 이 점을 공유하지 않는 변까지의 거의 합이 같다"로 될 수 있습니다.

설명을 하면 n각형의 기준변의 한 끝점에서 이 점을 공유하지 않는 변까지의 위의 임의의 점에서 각 변까지 거리를 각 각 $H_1, \ldots\ldots, H_{n-2}(H_i \in R)$(n각형에 포함되지 않는 부분의 삼각형에서 대변까지의 거리는 음수이다.)라 합시다.

그러면, $S=\frac{1}{2}aH_1+\frac{1}{2}aH_2+\ldots\ldots+\frac{1}{2}aH_{n-2}$ 이고,

또, $S=\frac{1}{2}aK_1+\frac{1}{2}aK_2+\ldots\ldots+\frac{1}{2}aK_{n-1}$ 이므로

$K_1+K_2+\ldots\ldots+K_{n-2}=H_1+H_2+\ldots\ldots+H_{n-3}$ 가 성립합니다.

교사 : 좋습니다. 이상으로 생성된 반례에 대해 증명-분석에 추가하고 그 정리를 조건으로 합체시켜 개선된 추측을 만들어 보았습니다.

위의 과정을 간단하게 요약하면 다음과 같습니다.

(1) 추측, 이등변삼각형의 밑변에 속하는 임의의 점으로부터 각 옆 변까지 거리의 합은 일정하며 옆 변에 그은 높이와 같다. 이 성질을 $(n-1)$개의 변이 서로 같은 n각형에서 위의 성질을 일반화 시키고 이 추측을 증명하고자 하였다.

(2) 증명(단계3의 사고실험), 증명단계를 3단계의 보조정리로 나누었다.

[단계1] n각형에서 길이가 다른 변에 속하는 임의의 점에서 각 꼭지점을 연결하여 주어진 다각형을 삼각형으로 나눈다.

[단계2] n각형의 기준변 위의 임의의 점에서 각 변까지 거리의 합은 일정하다.

[단계3] 위의 거리의 합은 옆 변에 그은 높이와 같다.

(3) 단계1의 보조정리에서 나타난 반례(전면적 반례)및 개선된 추측, "삼각형으로 분할 할 수 없는 경우가 생긴다"는 반례가 생기고 그에 의해 반박되는 보조정리를 조건으로 합체시켜 "도형이 이루는 각의 내부에 기준변이 존재하는 n각형"으로 추측을 개선하였다..

(4) 단계2의 보조정리에 대한 증명-분석, 삼각형으로 분할 된 n각형의 기준변 위의 임의의 점에서 각 변까지 거리의 합은 일정함을 증명하였다.

(5) 단계1과 단계2에 대한 국소적 반례 및 추측에 대한 증명의 개선, 주어진 도형을 삼각형으로 분할 할 수 없는 경우에 대하여 삼각형이 아닌 부분(사각형)의 넓이를 구하는 방법을 증명하여 " n각형의 기준변 위의 임의의 점에서 각 변까지 거리(음수포함)의 합은 일정하다."로 단계1의 증명을 개선하였다.

(6) 단계3의 보조정리에 대한 전면적 반례와 국소적 반례 및 추측의 개선, 단계3은 삼각형인 경우는 성립하나 사각형인 경우 거리의 합이 옆 변에 그은 높이와 다르고 그 옆변에 그은 높이의 합과 같다. 또 단계2와 마찬가지로 n각형에 포함되지 않는 부분의 삼각형의 높이를 음수로 둔다면, 인 임의의 점에서 각 변까지 거리의 합과 기준변의 한 끝점에서 이 점을 공유하지 않는 변까지의 거리의 합이 같게 됨으로 추측을 개선하였다.

4. 결 론

본 연구에서는 Lakatos의 증명과 반박의 여러 가지 증명방식 중 한가지인 보조정리 합체법을 적용하여 수학과 교수-학습 자료를 개발하였다. 보조정리 합체법은 주된 추측이 성립하는 영역을 부분추측들이 성립하는 영역으로 제한하는 방법이라 할 수 있다. 이를 바탕으로 이등변삼각형의 성질을 n각형으로 확장시켜 "$(n-1)$개의 변이 서로 같은 n각형에 대하여 길이가 다른 한 변에 속하는 임의의 점으로부터 각 옆 변까지 거리의 합은 일정하며 옆 변에 그은 높이와 같다."로 추측하고 이 성질을 증명하기 위해 단계3의 사고실험을 하였다. 각각의 단계에서 국소적 반례와 전면적 반례에 의해 반박되는 정리들을 조건으로 합체시켜 추측을 개선하였다.

본 연구 자료를 수학 수업시간에 그대로 모방한다는 것 보다는 학생들의 수준에 맞는 다양한 추측과 반박을 통해 학생들이 고정된 수학지식이 아니라 항상 성장하고 변화하는 수학 지식이라는 생각을 갖도록 하는 것이 중요하다고 생각한다.

Lakatos의 수리철학은 수학교육 연구자들에게 많은 호응을 얻었다. 수학적 발견에 대한 Lakatos의 새로운 접근 방식에 매료된 수학교육 연구자들은, Lakatos의 방식이 수학교육에 광범하게 적용될 것이라고 가정하였다. 이러한 가정의 기저에 깔려 있는 생각은, Lakatos의 발견술적인 증명 과정을 교실에서 그대로 모방하는 것이 가능하고 바람직하다는 것이다. 그러나 학생들이 수업 시간에 Lakatos식의 검사와 논의 과정-그것을 통해 새로운 수학 지식이 잠재적 반박에 어느 정도 그대로 따라할 수 있는가 하는 문제에 대해서는 보다 신중한 논의가 필요하다.

하지만 Lakatos가 강조하는 발견의 맥락과 절대주의에서 강조하는 정당화의 맥락을 통합함으로써 증명 교육을 보완할 방안을 탐색할 필요가 있다. 또한 Lakatos가 강조한 증명의 분석적 방식을, 증명의 외형적 모습만을 선형적으로 제시하는 종합적 방식을 보완하는 한 방안으로 파악하는 것은 학교수학에서 충분한 의의가 있다고 생각된다.

참 고 문 헌

강문봉 (1993). Lakatos 수리철학의 교육적 연구, 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

강문봉 (2004). Lakatos 방법론을 초등수학에 적용하기 위한 연구, 대한수학교육학회 수학교육학연구 **14(2)**, pp143-156.

류시규 · 김희정 (2000). 추측과 반박을 통한 수학적 발견논리, 교육문제연구, 12월호, **15**, pp138-163.

우정호 (2001). 학교수학의 교육적 기초, 서울:서울대학교 출판부.

우정호 (2005). 수학학습-지도 원리와 방법, 서울:서울대학교 출판부.

정승진 (2003). 발전적 관점에 따른 수학학습 지도에 관한 연구, 단국대학교 대학원 수학교육전공 박사학위논문.

한인기 (2006). 수학교육학의 기초와 실제, 경남:경상대학교 출판부.

P.M. Erdniev · 한인기 (2005). 유추를 통한 수학탐구, 서울: 승산.

George Polya (1981). *Mathematical Discovery,* 우정호 외 6인 옮김(2005), 수학적 발견 Ⅰ · Ⅱ, 서울: 교우사.

Imre Lakatos (1976). *PROOFS AND REFUTATIONS*, New York:Cambridge University Press, 우정호 옮김(2003). 수학적 발견의 논리, 서울:아르케.

Development of teaching-learning materials in lemma-incorporation method of Lakatos

Cho, Yeol Je
Department of Mathematics Education, Gyeongsang National University, 660-701, Korea
E-mail : yjcho@nongae.gsnu.ac.kr

Ryu, Soo Jeong
Hwagae Middle Shool, 667-820, Korea
E-mail : arsj86@hanmail.net

Lyou, ik Seung
Jeonbuk Science High School, 570-911, Korea
E-mail : infgrp@hanmail.net

Kim, Tae Ho
Gyeongsang National University High School, 660-701, Korea
E-mail : yungkth@hanmail.net

This study was extended as one of the properties of isosceles triangles to polygons(n-angles) by conjectures-proofs-reputations-reformations and developed teaching-learning materials which can be used in hi[1)]gh-level classes for middle and high school students.

* ZDM Classification : U13
* MSC2000 Classification : 97U99
* Key word : lemma-incorporation method, Proofs and reputations, Teaching-learning materials