

고속 전자파 해석을 위한 그린 함수의 이산 웨이블릿 표현법

A Representation of Green Function Using Discrete Wavelet Concept for Fast Field Analysis

김형훈 · 박종일 · 김형동

Hyung-Hoon Kim · Jong-Il Park · Hyeongdong Kim

요약

파수 영역(k-domain)에서 웨이블릿 변환 개념을 적용한 그린 함수 표현법은 적분 방정식에 활용할 때 전자파 해석의 고속화 계산에 사용할 수 있다. 그 표현 식은 기존의 표현에 비해서 매우 간결하기 때문에 전자파 해석의 방사 적분 계산 시간을 줄이는데 효과적으로 사용될 수 있다. 그린 함수의 이산 웨이블릿 개념을 이용한 수학적 표현 식을 유도하고 그 특성에 대하여 설명하고자 한다.

Abstract

A compact representation of Green function is proposed by applying the discrete wavelet concept in the k-domain, which can be used for the acceleration of scattered field calculations in integral equation methods. Since the representation of Green function is very compact in the joint spatio-spectral domain, it can be effectively utilized in the fast computation of radiation integral of electromagnetic problems. A mathematical expression of Green function based on the discrete wavelet concept is derived and its characteristics are discussed.

Key words : Green Function, Wavelet Transform, Integral Equation Method

I. 서론

모멘트 방법은 해석하고자 하는 구조의 적절한 그린 함수를 포함하는 적분 방정식의 해를 구하는 방법이다. 해석하고자 하는 구조가 매우 큰 경우 일반적인 펄스 전개 함수를 사용하면 큰 행렬이 발생되어 방정식을 푸는데 많은 시간이 소요된다. 이는 펄스 전개 함수가 그린 함수의 다중 규모 특성을 나타내기엔 적절하지 않기 때문이다. 다중 규모 특성이란, 근 거리 상호 작용을 나타내는 광 대역 규모의 파수 영역 성분과 전파 모드에 의한 원거리 상호 작용을 나타내는 협 대역 소 규모의 파수 영역 성분이 혼재된 함수를 말한다.

그 동안의 연구 결과에 의하면^{[1],[2]}, 연속 웨이블릿 변환 기술에 의한 공간-파수 영역 표현에 의해 그린

함수의 다중 규모 특성을 매우 효과적으로 표현할 수 있음이 알려졌다. 즉 그린 함수는 공간 주파수 영역에서 웨이블릿 변환을(K-Domain(spectral domain) Wavelet transform Technique: KDWT) 적용함으로써 효과적으로 표현될 수 있다는 점이다. 또한 그린 함수를 나타내는데 있어 이산 웨이블릿 함수를 전개 함수로 사용하면 소요되는 전개 함수의 수를 효과적으로 줄일 수 있어 계산을 고속으로 수행할 수 있게 된다. 본 논문에서는 공간 주파수 영역에서 이산 웨이블릿 변환을 적용한 그린 함수 표현 식을 유도하고 그 특성에 대하여 논의하고자 한다.

II. 그린 함수의 특성

반복 계산 모멘트 해석법에서 산란파는 가정된

「이 논문은 2005년 정부(교육인적자원부)의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임(KRF-2005-041-D00566).」
한양대학교 전자통신컴퓨터공학부(Department of Electrical and Computer Engineering, Hanyang University)

· 논문 번호 : 20060719-079

· 수정완료일자 : 2006년 8월 28일

전류와 주어진 구조의 그린 함수의 컨볼루션으로 계산된다. 따라서 그린 함수의 표현법이 모멘트 해석법의 해를 계산하는데 있어 시간을 결정하는 중요요소이다. 다음과 같은 자유공간 이차원 그린 함수를 예로 들어 보기로 하자.

$$G(R) = \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k_0 R) \quad (1)$$

위 식에서 $H_0^{(2)}$ 는 한켈(Hankel) 함수이고 R 은 전류원과 관찰점 사이의 거리를 나타낸다. 위의 그린 함수의 특성은 공간-공간 주파수 영역에서 효과적으로 나타낼 수 있다^{[1],[2]}. 공간-공간 주파수 표현을 살펴보면 그린 함수는 명확히 공간 주파수 영역에서 다중 규모 특성을 가지고 있음을 관찰할 수 있다. 즉, 근거리 상호작용을 나타내는 광 대역 대규모 공간 주파수 영역 성분과 k_0 전파 모드에 의한 협 대역 소 규모 성분으로 이루어진 다중 규모 특성을 가지고 있다. 따라서 공간 영역에서 그린 함수를 표현하면 k_0 전파 모드가 공간 전 영역에 퍼져 분포하게 되므로 많은 양의 메모리와 계산 시간이 필요하게 된다. 또한 공간 주파수 영역에서 표현하게 되면 근거리 상호작용 스펙트럼이 공간 주파수 영역에서 넓게 분포하게 되어 마찬가지로 많은 양의 메모리와 계산 시간이 요구된다. 그린 함수의 다중 규모 특성을 효율적으로 나타내기 위해서는 윈도우 푸리에 변환(Short-Time Fourier Transform: STFT)이나 공간 영역 웨이블릿 변환(Space-Domain Wavelet Transform: SD-WT) 등을 고려해 볼 수 있다. 그러나 이들 또한 단순한 공간 영역 또는 공간 주파수 영역보다는 우수하지만 그린 함수의 특성에 완전하게 일치하는 것은 아니다. 그린 함수의 공간 주파수 영역 다중 규모 특성은 공간 주파수 영역 웨이블릿 변환(K-Domain Wavelet Transform: KDWT)이 가장 적합하다^{[1],[2]}. 아래에 이차원 그린 함수를 효과적으로 표현하기 위한 공간 주파수 영역 웨이블릿 변환 적용 과정을 제시하고 그 결과를 제시하고자 한다.

Ⅲ. 웨이블릿 변환 개념을 이용한 그린 함수 표현

그린 함수의 공간 주파수 영역 웨이블릿 변환은

공간 영역 여파기 통과 과정(constant Q-filtering phase)과 공간 여파된 신호를 푸리에 변환하는 과정(transforming phase)의 두 단계 과정으로 이루어진다^{[1]~[3]}. 일정한 Q를 갖는 공간 영역 여파기 과정은 거리가 가까운 경우는 작은 윈도우, 거리가 먼 경우는 넓은 윈도우를 씌움으로써 가능하다. 먼저 그린 함수는 다음과 같이 공간 여파된 여러 조각(또는 윈도우가 씌워진 그린 함수 조각)의 합으로 생각할 수 있다(Constant Q-Filtering Phase).

$$\begin{aligned} G(R) &= \sum_i G(R) W_i(R-r_i) \\ &= \sum_i G_{w,i}(R) \\ &= G_{w,0}(R) + G_{w,1}(R) + G_{w,2}(R) + \dots \\ &\quad + G_{w,i}(R) + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

위 식에서 $G_{w,i}(R)$ 는 윈도우 $W_i(R-r_i)$ 가 씌워진 그린 함수 조각을 나타내며 물리적인 의미는 거리가 r_i 만큼 떨어진 전류원과 관찰점과의 상호 작용을 나타낸다.

공간 주파수 영역 이산 웨이블릿 변환은 그림 1에 보이는 바와 같이 공간 영역에서 중심점 r_i 에 따른 가변 크기의 윈도우를 씌우고 푸리에 변환을 취함으로써 가능하다. 이 개념은 이미 연구된 공간 주파수 영역 연속 웨이블릿 변환과 동일하나 단지 윈도우 중심점 r_i 가 불연속적으로 변하는 점만 다르다^{[1]~[3]}. i 번째 윈도우의 크기 D_i 는 일반적으로 웨이블릿 변환의 “the constant Q-filtering”의 특성을 갖게 하기 위해 $D_i/r_i \approx \text{constant}$ 가 되도록 정하게 된다^{[3]~[4]}. 그리고 다음과 같이 각각의 윈도우 그린 함수 조각에 푸리에 변환을 취한다(transforming phase).

$$\begin{aligned} G_{w,i}(k, \alpha) &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} G(R) W_i(R-r_i) e^{-jk\rho \cos(\alpha-\phi)} \rho d\phi d\rho \\ &\quad \int_0^{D_i} \int_0^{2\pi} G(|\bar{r}_i + \bar{\rho}|) e^{-jk\rho \cos(\alpha-\phi)} \rho d\phi d\rho \end{aligned} \quad (3)$$

식 (3)에서 ρ 와 ϕ 는 윈도우 함수 W_i 의 중심을 원점으로 하는 실린더 좌표 체계를 나타내는 스칼라 변수이며, k 와 α 는 파수 영역 실린더 좌표 체계이며 직각 좌표 k_x, k_y 와는 $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, $\alpha = \arctan(k_x/k_y)$ 의 관계이다. 식 (3)에서 ρ 에 대한

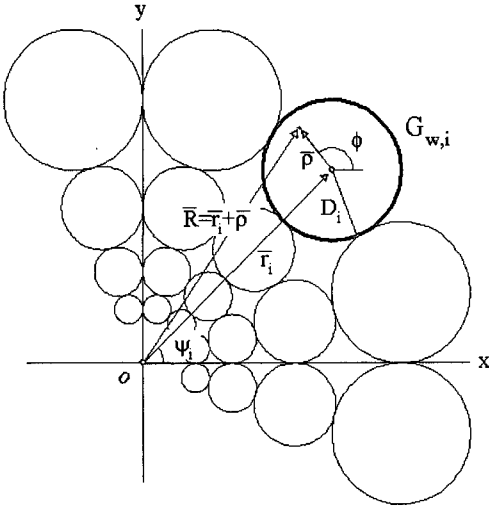


그림 1. 공간영역 가변 윈도우를 이용한 공간 주파수 영역 이산 웨이블릿 변환
 Fig. 1. Application of discrete wavelet concept to Green function in the spectral domain by using spatial domain variable-sized windows.

적분 구간은 유한한 크기의 윈도우 때문에 0에서 ∞ 까지 적분이 아니고 0에서 D_i 까지 적분이 된다. 식 (3)에서 좌표 체계의 중심을 윈도우 중심으로 바꾸기 위해서 다음과 관계식을 사용한다(addition theorem)^[6].

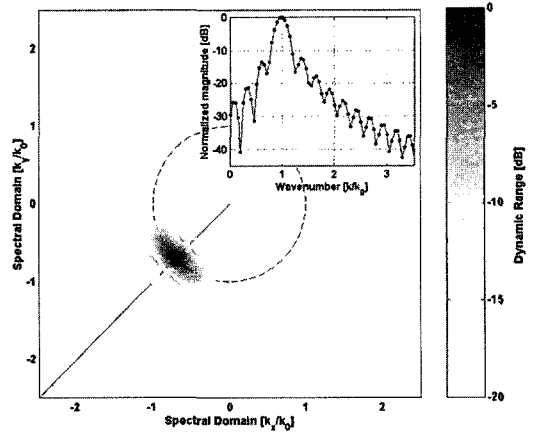
$$G(\bar{r}_i + \bar{\rho}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(2)}(k_0 r_i) e^{jn\psi_i} J_n(k_0 \rho) e^{-jn(\phi + \pi)} \quad (4)$$

식 (4)에서 $H_n^{(2)}$ 은 n 차 한켈 함수이고, J_n 은 n 차 베셀 함수이며, $\rho < r_i$ 의 조건을 만족된다. 식 (4)를 식 (3)에 대입해서 베셀 함수에 관한 적분 관계식을 이용하면 다음과 같은 결과식을 얻게 된다.

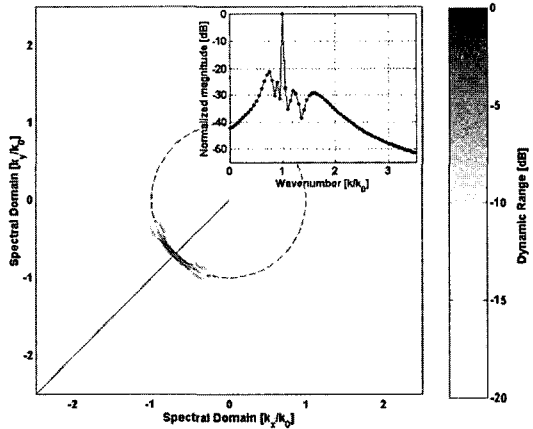
$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{w,i}(k, a) &= \frac{1}{4j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(2)}(k_0 r_i) e^{jn\psi_i} 2\pi e^{-jna} e^{jn\frac{3\pi}{2}} \\ &\int_0^{D_i} J_n(k_0 \rho) J_n(k \rho) \rho d\rho \\ &= \frac{\pi}{2j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(2)}(k_0 r_i) e^{jn\left(\psi_i - a - \frac{3\pi}{2}\right)} \\ &\times \begin{cases} \frac{D_i^2}{2} \left[J_n(k_0 D_i) + \left(1 - \frac{n^2}{k_0^2 D_i^2}\right) J_n^2(k_0 D_i) \right] & \text{at } k = k_0 \\ \frac{D_i}{k^2 - k_0^2} [kJ_n(k_0 D_i)J_{n+1}(kD_i) \\ - k_0 J_n(kD_i)J_{n+1}(k_0 D_i)] & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5) \end{aligned}$$

위의 식으로부터 자유 공간 그린 함수의 이산 웨

이블릿 변환은 원점과 관찰점과의 거리 r_i , 윈도우 크기 D_i 의 함수 값의 합을 구함으로써 계산할 수 있다



(a) 근거리 영역 ($r_i = 4 \lambda_0$, $\psi_i = \pi/4$, $D_i = 2 \lambda_0$)
 (a) In the near-field region ($r_i = 4 \lambda_0$, $\psi_i = \pi/4$, $D_i = 2 \lambda_0$)



(b) 원거리 영역 ($r_i = 20 \lambda_0$, $\psi_i = \pi/4$, $D_i = 10 \lambda_0$)
 (b) In the far-field region ($r_i = 20 \lambda_0$, $\psi_i = \pi/4$, $D_i = 10 \lambda_0$)

그림 2. 공간 주파수 영역 이산 웨이블릿 변환을 위한 공간 윈도우 그린 함수의 공간 주파수 성분(회색 이미지 그림에서 가장 검은 부분과 흰 부분은 20 dB의 크기를, 내부에 있는 그래프는 실선에 따른 크기의 변화, 점선은 $k=k_0$ 의 원을 나타낸다.)

Fig. 2. Spectral domain images of spatially windowed Green functions for application of discrete wavelet concept (Grey-scale plots of intensity are in decibels with a dynamic range of 20 dB, insets are plotted along the solid line, and the dashed line indicates $k=k_0$ circle).

는 것을 알 수 있다.

근거리 경우($r_i=4\lambda_0, \psi_i=\pi/4, D_i=2\lambda_0$)와 원거리 경우($r_i=20\lambda_0, \psi_i=\pi/4, D_i=10\lambda_0$)의 그린 함수 값을 그림 2(a)와 그림 2(b)에 각각 제시하였다. 내부에 그려져 있는 그래프는 실선을 따라 k 에 대해서 값을 그린 것이며, 회색 이미지 그림은 20 dB의 스케일로 공간 주파수 에너지 분포를 나타내었다. 점선은 $k=k_0$ 원을 나타낸다. 그림 2(b)의 원거리장의 경우, 그린 함수가 k_0 의 주변에 매우 제한되어 있는 협 대역 특성을 가지고 있음을 알 수 있다. 이러한 특성은 적분 방정식 해법에서 방사 적분 계산을 고속화하는데 효과적으로 활용될 수 있다. 예를 들면, 매우 원거리장의 경우, D_i 가 ∞ 가 되어 식 (5)에서 D_i 의 함수식이 $k=k_0$ 에서 값을 갖는 다음과 같은 임펄스 함수가 된다.

$$\int_0^\infty J_n(k_0\rho)J_n(k\rho)\rho d\rho = \frac{\delta(k-k_0)}{k_0}$$

$$G_{w,i}(k, \alpha) = \frac{1}{4j} \frac{\delta(k-k_0)}{k_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(2)}(k_0 r_i) \cdot e^{jn(\psi_i - \alpha - 3\pi/2)} \quad (6)$$

따라서 전류원 $J_z(\vec{\rho}')$ 으로부터 방사되는 전계를 구하는 식은 다음과 같이 파수 영역에서 계산할 수 있는데 이는 고속 멀티폴 방법(Fast Multipole Method: FMM)과 동일한 결과가 된다^[5].

$$E_z^o(\vec{\rho}) = -\frac{k_0\eta}{4} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty J_w(k, \alpha) \cdot G_{w,i}(k, \alpha) e^{j\vec{k} \cdot \vec{\rho}} kdkd\alpha$$

$$= \frac{jk_0\eta}{32\pi} \int_0^{2\pi} J_z(k_0, \alpha) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(2)}(k_0 r_i) \cdot e^{jn(\psi_i - \alpha - 3\pi/2)} \right] e^{j\vec{k}_0 \cdot \vec{\rho}} d\alpha \quad (7)$$

식 (7)에서 $J_z(k_0, \alpha)$ 는 전류원의 파수 영역 표현 식이다. 식 (7)을 살펴보면 이차원 적분식이 일차원으로 바뀌게 되어 k_0 의 전파 모드 성분만 작용하게 됨에 따라 하나의 윈도우 그린 함수에 대하여 선형적 계산량을 갖고 있음을 알 수 있다. 따라서 문제의 크기를 N 이라 하면, $O(\text{Log}N)$ 개의 윈도우 그린 함수

가 생기게 되고 각 윈도우 그린 함수 계산량은 $O(N)$ 이므로 전체 계산량은 $O(N\text{Log}N)$ 에 비례한다.

IV. 결 론

본 연구에서는 그린 함수의 공간 주파수 영역 이산 웨이블릿 변환을 정의하고 그린 함수 표현 식의 유도 과정과 표현 식의 고속 전자파 해석법과의 관계를 논하였다. 고속 해석법에 사용될 수 있는 이산 웨이블릿 표현 식은 공간 영역에서 가변 윈도우를 썩은 그린 함수를 푸리에 변환함으로써 구할 수 있다. 그린 함수의 공간 주파수 영역에서의 다중 규모 특성에 의해 이산 웨이블릿 표현식은 매우 효율적인 그린 함수 표현법이며 이는 고속 전자파 해석법을 가능하게 해준다.

참 고 문 헌

- [1] H. Kim, H. Ling, and C. Lee, "A fast moment method algorithm using spectral domain wavelet concepts", *Radio Science*, vol. 31, pp. 1253-1261, 1996.
- [2] S. Kahng, S. Ju, and H. Kim, "Continuous wavelet representation of Green functions in layered media", *Electron. Lett.*, vol. 34, pp. 378-379, 1998.
- [3] O. Rioul, P. Duhamel, "Fast algorithms for discrete and continuous wavelet transforms", *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 38, pp. 569-586, 1992.
- [4] A. C. Bovik, N. Gopal, T. Emmoth, and A. Restrepo, "Localized measurement of emergent image frequencies by Gabor wavelets", *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 38, pp. 691-712, 1992.
- [5] R. Coifman, V. Rokhlin, and S. Wandzura, "The fast multipole method for the wave equation: a pedestrian prescription", *IEEE Antennas Propag. Mag.*, vol. 35, pp. 7-12, 1993.
- [6] Roger F. Harrington, *Time-harmonic Electromagnetic Fields*, New York: McGraw-Hill, ch. 5, p. 232, 1961.

김 형 훈

1986년 2월: 전남대학교 전산학과 (공학사)
1988년 2월: 한국과학기술원 전산학과 (공학석사)
1994년 9월~현재: 광주여자대학교 교수
2004년 3월~현재: 한양대학교 전자통신컴퓨터공학부 박사과정
[주 관심분야] 전자기 컴퓨터 모델링

김 형 동



1984년 2월: 서울대학교 전자공학과 (공학사)
1986년 2월: 서울대학교 전자공학과 (공학석사)
1992년 5월: 텍사스 오스틴 주립대학교 Post. Doc. Fellow
1996년 3월~현재: 한양대학교 전자통신컴퓨터공학부 교수
[주 관심분야] 컴퓨터 전자기 모델링, 마이크로파 공학, 안테나 설계 및 해석

박 중 일



1987년 2월: 서울대학교 전자공학과 (공학사)
1989년 2월: 서울대학교 전자공학과 (공학석사)
1995년 2월: 서울대학교 전자공학과 (공학박사)
1999년~현재: 한양대학교 전자통신컴퓨터공학부 부교수

[주 관심분야] 전자기 컴퓨터 모델링