

복합포아송 수요와 Coxian 가공시간을 갖는 CONWIP 시스템의 성능평가

†박찬우* · 이효성**

Performance Evaluation of a CONWIP System with
Compound Poisson Demands and Coxian Processing Times

Chan-Woo Park* · Hyo-Seong Lee**

■ Abstract ■

In this study we consider a CONWIP system in which the processing times at each station follow a Coxian distribution and the demands for the finished products arrive according to a compound Poisson process. The demands that are not satisfied immediately are either backordered or lost according to the number of demands that exist at their arrival instants. For this system we develop an approximation method to calculate performance measures such as steady state probabilities of the number of parts at each station, proportion of lost demands and the mean number of backordered demands. For the analysis of the proposed CONWIP system, we model the CONWIP system as a closed queueing network with a synchronization station and analyze the closed queueing network using a product-form approximation method. A recursive technique is used to solve the subnetwork in the application of the product-form approximation method. To test the accuracy of the approximation method, the results obtained from the approximation method are compared with those obtained by simulation. Comparisons with simulation show that the approximation method provides fairly good results.

Keyword : CONWIP System, Performance Evaluation, Queueing Network, Product-Form Approximate Technique, Decomposition, Recursive Technique

논문접수일 : 2006년 4월 17일 논문게재확정일 : 2006년 8월 11일

* 한국철도기술연구원 철도시스템안전연구본부 안전기술연구팀

** 경희대학교 기계·산업시스템공학부

† 교신저자

1. 서 론

간판 시스템(kanban system)에 의해 대표되는 견인생산 시스템(pull control system)은 종래의 밀어내기식 생산시스템(push control system)에 비하여 재공품 재고(work-in-process inventory)가 감소되고 시스템의 혼잡도(congestion)가 줄어드는 등 여러 이점을 지니고 있는 것으로 알려져 있다[14, 15, 19]. 그러나 견인생산 시스템과 밀어내기식 생산 시스템은 각기 다른 특성을 지니고 있으므로 모든 평가 척도에서 어느 한 시스템이 다른 시스템에 비해 우월하다고 단정 지을 수는 없다[10]. 이러한 이유로 두 시스템의 장점을 구현할 수 있는 혼합시스템(hybrid system)에 대한 연구가 활발히 수행되었다[11, 13, 21]. 그 중에서도 Spearman이 제안한 CONWIP(CONstant Work In Process) 시스템은 견인생산시스템의 장점을 보유하면서도 제어방식이 단순하고 적용범위가 넓어 특별한 관심의 대상이 되어 왔다.

Spearman은 stochastic coupling 방식을 사용하여 CONWIP 시스템과 간판 시스템의 성능을 비교한 결과 고객만족도(재고고갈 확률, 미충족수요의 대기시간 등) 측면에서 CONWIP 시스템이 간판 시스템에 비해 우수함을 증명하였다[20]. Duenyas, Hopp, Spearman[9]는 각 공정에서의 가공시간이 일정하고(deterministic) 기계고장이 발생할 수 있는 CONWIP 제어방식의 흐름식 생산라인 시스템(flow line system)을 분석하였다. 이 연구에서는 기계의 고장발생 간격과 수리시간이 모두 지수분포를 따르고, 완제품에 대한 수요는 항상 존재(saturated demands)한다는 가정 하에서 시스템의 생산율을 추정하기 위한 근사적 방법이 제시되었다. Duenyas와 Hopp은 이 연구를 확장하여 CONWIP 어셈블리(assembly) 시스템에 대한 분석을 시도하였다. 이들은 기계의 고장은 발생하지 않는다는 가정 하에서 가공시간이 일정한 경우[7]와 지수분포를 따르는 경우[8]에 대해 각각의 시스템에 대한 생산율을 계산하기 위한 근사적 방법을 개발하였다. 이정은과 이효성[1]은

완제품에 대한 수요가 복합 포아송과정(compound Poisson process)에 따라 발생하는 직렬형 CONWIP 시스템을 분석하였다. 이 연구에서는 각 기계에서의 가공시간은 지수분포를 따르며, 완제품에 대한 수요가 발생했을 때 재고가 존재하지 않으면 수요는 추후납품(backorder)이 가능하다고 가정하였다. 이와 같은 가정 하에서 이들은 재공품 수의 안정상태확률, 추후 납품되는 수요의 비율, 대기 중인 미충족수요의 평균 대기시간 등 단위 수요별 시스템의 성능척도를 구하는 근사적 알고리즘을 개발하였다.

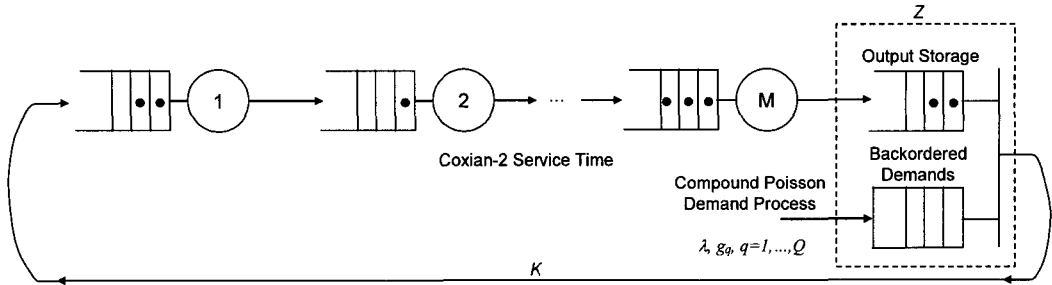
이정은과 이효성 연구는 실사회에서의 수요과정을 반영하여 기존의 연구모형을 확장하였으나 각 기계의 가공시간이 지수분포를 따르고 미충족수요는 무한히 수용할 수 있다는 단순한 가정이 문제점으로 지적될 수 있다. 따라서 이러한 단점을 극복할 수 있는 새로운 연구가 요구되며, 본 연구에서는 각 기계의 가공시간이 Coxian-2 분포를 따르고 임의의 시점에서의 미충족수요는 B 개까지만 수용 가능하다는 가정 하에서 시스템의 성능평가척도를 신속하게 계산하여 주는 근사적 기법을 개발하고자 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2장에서는 본 논문의 대상 시스템과 제시된 시스템의 분석방법을 소개한다. 제 3장에서는 CONWIP 시스템의 세부 분석방법을 기술하고, 제 4장에는 시스템 성능척도를 구하기 위한 기법을 제안한다. 제 5장에서는 알고리즘의 정확성을 평가하기 위하여 제안된 기법에서 얻어진 값과 시뮬레이션에서 얻어진 값을 비교한다. 끝으로 제 6장에서는 본 논문의 결론을 정리하였다.

2. 연구 내용, 범위 및 방법

2.1 연구내용 및 범위

본 연구에서 분석하고자 하는 시스템은 M 개의 작업장과 완제품 재고창고로 구성된 흐름식 생산라인으로 각 작업장에는 1대의 기계가 존재한다([그림 1] 참조).



[그림 1] 복합 포아송 수요를 가지는 CONWIP 시스템

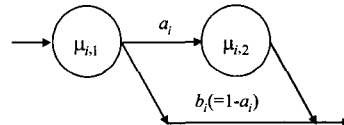
작업장 1에서 최초의 가공을 받은 부품은 작업장 2, 3,...에서 후속 가공을 거친 후 작업장 M 에서 완제품으로 출하되어 완제품 재고창고에 저장된다. 본 시스템에서는 재공품 재고의 수를 일정하게 유지하기 위하여 K 개의 간판을 사용하고 있으며, 수요가 발생하여 완제품이 창고에서 인출되면 완제품에 부착되어 있던 간판은 즉시 작업장 1로 이동해 작업지시서(production authorization card)의 역할을 한다.

본 연구에서 완제품의 수요는 복합 포아송 과정에 따라 발생한다. 편의를 위해 동시에 발생한 하나 이상의 완제품 수요 전체를 “주문(order)”이라 정의하고, 하나의 주문을 구성하는 각각의 수요를 “수요(demand)”라 정의하자.

완제품에 대한 주문이 생겼을 때 재고창고에 주문의 크기 이상의 재고가 존재하면 주문은 즉시 충족될 수 있다. 그러나 주문을 충족할 충분한 완제품 재고가 존재하지 않고, 이미 대기 중인 미충족수요(backordered demands)와 주문의 미충족수요의 합이 B 미만이면, 주문의 미충족수요가 충족될 때까지 주문은 대기상태에 들어가게 된다. 그러나 이미 대기 중인 미충족수요와 주문의 미충족수요의 합이 B 를 초과하면, 주문의 전체 수요 중 B 의 초과분은 유실(lost sales)되고, 주문의 미충족수요가 충족될 때까지 주문은 대기상태에 들어가게 된다. 또한 이미 대기 중인 미충족수요의 수가 B 와 같다면, 주문은 유실되는 것으로 가정한다. 즉, 본 연구에서는 주문에 대해 부분 주문서비스(POS, Partial Order Service)을 가정한다[2, 4, 18]. 따라서 B 의 값이 무한

히 크면 본 모형은 전체 미충족수요의 추후납품이 가능한 모형으로 귀착되고, B 의 값이 0이면 주문의 미충족수요가 모두 유실되는 모형으로 귀착된다.

본 연구에서는 작업장 i 의 가공시간은 [그림 2]과 같은 Coxian-2 분포를 따르며, 각 작업장에서의 기계고장은 발생하지 않고, 각 작업장의 크기는 간판의 수 보다 커 봉쇄(blocking)가 발생하지 않는다고 가정한다. 또한 재고창고 및 각 작업장에서의 서비스 규칙은 선입선출방식(FCFS)을 따른다고 가정한다.



[그림 2] 작업장 i 의 Coxian-2 분포($i=1, \dots, M$)

본 논문에서는 주문의 단위 시간당 평균 도착율은 λ 이고, 일회 주문의 크기는 확률분포 G 로 표시하며, 주문의 최대크기는 Q , 주문의 크기가 q 일 확률은 g_q 로 표기한다($q=1, \dots, Q$). 이러한 가정 하에서 본 연구에서는 수요가 즉시 만족될 확률, 수요가 수용될 확률, 수요의 평균 대기시간 등 시스템의 주요한 성능척도를 계산 할 수 있는 근사적기법을 개발하고자 한다.

본 연구의 모형에서 시스템 내에 존재하는 간판 수가 일정한 수로 고정되어 있으므로 간판을 고객으로 간주하면, 본 연구의 모형은 폐쇄형 대기네트워크(closed queueing network)로 모델링될 수 있다. 완제품이 저장된 장소를 작업장 Z 라 하면, 폐

쇄형 대기네트워크는 $M+1$ 개의 작업장으로 구성된다. 그러나 작업장 Z 에서 간판이 이동하기 위해서는 완제품 재고가 존재해야 하고, 수요가 발생해야하므로, 재고창고는 2가지 조건이 동시에 충족되어야만 간판의 이동이 이루어 질 수 있는 동기화(synchronization) 스테이션임을 알 수 있다. 작업장 Z 가 동기화 스테이션이므로, 대기네트워크는 수요가 포아송 과정에 따라 발생하고, 각 작업장에서 가공 시간이 지수분포를 따르는 가장 단순한 경우에도 승법형 조건을 만족하지 못한다[1]. 따라서 정확한 해(exact solution)를 구하기는 어려우며, 시스템을 분석하기 위해서는 근사적 기법에 의존할 수밖에 없다.

2.2 연구방법

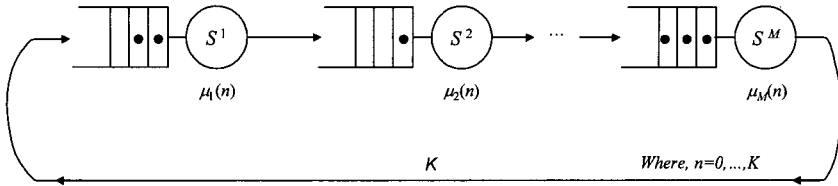
본 연구에서는 시스템 분석방법으로 Baynat와 Dallery[5]의 승법형 근사법(product-form approximation method)을 사용하고자 한다. Baynat와 Dallery의 승법형 근사법은 서비스 시간이 일반분포를 따르는 폐쇄형 대기네트워크를 분석하기 위한 기법으로 Marie의 기법[17]에 기초하고 있다. 승법형 근사법은 대기네트워크를 몇 개의 하부네트워크(sub-network)로 분해한 후, 각각의 하부네트워크를 서비스 시간이 지수분포를 따르고 서비스율이 상태 의존적인 단일 서버로 치환함으로써 분석하고자 하는 폐쇄형 대기네트워크를 승법형 대기네트워크로 근사화 시키는 기법이다. 승법형 근사법에서는 근사화 된 승법형 대기네트워크를 동등 승법형 대기네트워크(equivalent product form network)라 부르며, 동등 승법형 대기네트워크를 구성하는 단일 서버의 상태종속 서비스율을 구하기 위하여 각각의 하부네트워크를 상태종속 포아송(Poisson) 도착과정을 갖는 개방형 대기시스템으로 가정해 분석한다. 개방형 대기시스템의 상태종속 산출율(state dependent throughput)이 구해지면 이 값이 곧 해당 단일 서버의 상태종속 서비스율로 사용된다. 또한 승법형 대기네트워크의 서비스율이 구해지면 승법형 네트워크를 구성하는 각 서버의 상태종속 산

출율을 구할 수 있으며, 이 값은 다시 해당 하부네트워크의 상태종속 도착율로 사용된다. 따라서 승법형 대기네트워크의 상태종속 서비스율이 구해지면 이로부터 하부네트워크의 상태종속 도착율을 구할 수 있고, 하부네트워크의 상태종속 도착율이 구해지면 이로부터 승법형 대기네트워크의 상태종속 서비스율을 구할 수 있게 된다. 그러나 승법형 대기네트워크의 상태종속 서비스율과 하부네트워크의 상태종속 도착율은 모두 미지의 값이므로 이를 구하는 문제는 고정점 문제(fixed point problem)가 되며, 이를 구하기 위해서는 반복적 기법을 사용하여만 한다. 그러나 본 연구에서 제안된 시스템의 경우에는 몇 가지 가정이 완화되어 있어 승법형 근사법을 단순히 적용시킬 수 없다. 즉, 하부 네트워크로의 분해문제, 분해된 하부 네트워크의 해를 구하는 문제 등 여러 가지 해결해야만 할 세부문제가 존재하며, 이를 해결할 수 있는 방법을 찾아야 한다.

3. CONWIP 시스템의 분석

3.1 하부네트워크로의 분해

Baynat and Dallery에 따르면 승법형 근사법이 성공적으로 적용되기 위해서는 몇 가지 조건이 충족되어야 하며, 그 중 하나는 하부네트워크간의 고객이동이 집단으로 이루어져서는 안 된다는 조건이다. 본 연구에서는 수요의 도착과정이 복합 포아송 과정을 따르므로, 작업장 Z 와 작업장 1간에는 한 순간에 도착할 수 있는 간판의 크기는 최소 1부터 최대 Q 까지 확률적으로 분포되어 있다. 따라서 승법형 근사법을 성공적으로 적용하기 위해서는 작업장 Z 와 작업장 1을 하나의 하부네트워크에 포함시켜야 한다. 따라서 작업장 Z 와 작업장 1을 하부네트워크 R^1 으로, 나머지 각각의 작업장을 하부네트워크 R^i 라고 정의했을 때($i=2, \dots, M$), 원래의 폐쇄형 대기네트워크는 M 개의 하부네트워크로 분해된다. 하부네트워크 R^i 에 대응하는 동등 승법형 네트워크의 서버를 S^i 라고 하고, 서버 S^i 에 n 명의



[그림 3] 동등 승법형 대기네트워크

고객이 있을 때 상태종속 서비스율을 $\mu_i(n)$ 이라 할 때 동등 승법형 대기네트워크는 [그림 3]과 같다 ($n=0, \dots, K, i=1, \dots, M$).

동등 승법형 대기네트워크의 서비스율 $\mu_i(n)$ 이 구해지면, 승법형 대기네트워크의 분석에 사용될 수 있는 임의의 알고리즘을 이용하여 동등 승법형 대기네트워크를 분석할 수 있고, 이로부터 시스템의 다양한 성능척도를 계산할 수 있으므로 문제는 서버 S^i 의 상태종속 서비스율 $\mu_i(n)$ 을 구하는 것으로 귀착된다.

서버 S^i 의 상태종속 서비스율 $\mu_i(n)$ 은 하부네트워크 R^i 를 분석함으로써 얻어진다. 하부네트워크 R^i 는 해당 하부네트워크에 n 명의 고객이 있을 때 상태종속 도착율이 $\lambda_i(n)$ 이고 도착간격이 지수분포를 따르는 개방형 대기네트워크로 간주해 분석한다. 우선 하부네트워크 R^i 의 도착율 $\lambda_i(n)$ 을 알고 있다고 가정하자. 그러면 각각의 하부네트워크 R^i 는 [그림 4]와 [그림 5]와 같은 개방형 대기시스템으로 표현될 수 있다.

3.2 하부네트워크 R^i 의 분석

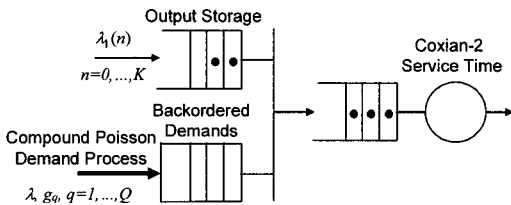
본 절에서는 하부네트워크 R^i 의 분석방법을 살펴보고자 한다. 하부네트워크 R^i 에서는 최대 K 개의 간판이 존재할 수 있고, 작업장 Z 의 버퍼(buffer)의 크기가 B 이므로, 작업장 Z 에서 수용할 수 있는 수요의 최대 용량(capacity)은 $(K+B)$ 이다. 그리고 완제품의 공급간격, 수요간격은 지수분포를 따르고 작업장 1의 가공시간은 Coxian분포를 따르므로 하부네트워크 R^i 는 상태의 수가 유한한 연속시간 마코브체인(continuous time Markov Chain)으로 모델링이 가능하다.

하부네트워크 R^i 의 상태를 정의하기 위하여 n_1 을 작업장 Z 의 간판 수(만약 $n_1 < 0$ 이면, $|n_1|$ 개의 미충족수요가 완제품을 기다리고 있음을 의미한다.), n_2 를 작업장 1의 간판 수, 그리고 n_3 을 작업장 1의 Coxian-2 가공시간의 1단계에 있는 간판 수를 나타낸다고 한다면, 하부네트워크 R^i 의 상태는 (n_1, n_2, n_3) 로 표현되며, 하부네트워크 R^i 의 상태공간, \mathcal{S} 는 다음과 같이 정의할 수 있다.

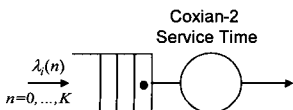
$$\mathcal{S} = \{(n_1, n_2, n_3) \mid -B \leq n_1 \leq K, 0 \leq n_2 \leq K - \delta(n_1 > 0) \cdot n_1, 0 \leq n_3 \leq \delta(n_2 > 0)\} \quad (1)$$

식 (1)에서 $\delta(x)$ 는 x 의 조건이 충족된 경우 1을 갖고 아니면 0을 갖는 지시확률변수(indicator random variable)를 나타내며, 상태공간 \mathcal{S} 의 총상태의 수 $|\mathcal{S}|$ 는 $[K^2 + (2K+1)(B+1)]$ 이다. $K=2, B=2, Q=2$ 일 경우의 하부네트워크 R^i 의 상태전이율 다이어그램은 [그림 6]과 같이 표현된다.

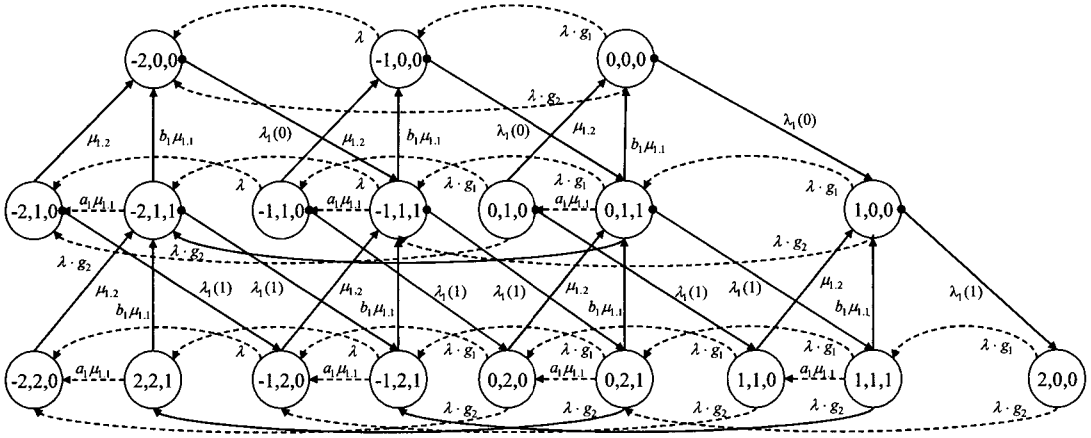
상태 (n_1, n_2, n_3) 에 대한 안정상태확률을 $\hat{F}_i(n_1, n_2, n_3)$ 라 정의했을 때, 상태전이율 다이어그램으로 얻



[그림 4] 하부네트워크 R^i



[그림 5] 하부네트워크 $R^i (i=2, \dots, M)$



[그림 6] 하부네트워크 \$H^1\$의 상태전이율 다이어그램(\$K=2, B=2, Q=2\$일 경우)

어지는 상태 \$(n_1, n_2, n_3)\$에 대한 시스템 평형방정식 (balance equation)은 다음과 같다.

$$O(n_1, n_2, n_3) \hat{P}_1(n_1, n_2, n_3) = \sum_{e=1}^4 I_e(n_1, n_2, n_3) \quad (2)$$

식 (2)의 좌변에 \$O(n_1, n_2, n_3)\$은 상태 \$(n_1, n_2, n_3)\$의 이탈률로서 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} O(n_1, n_2, n_3) &= \lambda \cdot \delta(n_1 > -B) + \lambda_1 (n_1 \cdot \delta(n_1 > 0) + n_2) \\ &+ \mu_{1,2} \cdot \delta(n_2 > 0, n_3 = 0) + \mu_{1,1} \cdot \delta(n_3 = 1) \end{aligned} \quad (3)$$

식 (2)의 우변의 \$I_e(n_1, n_2, n_3)\$은 상태 \$(n_1, n_2, n_3)\$로의 평균 입력률로서 다음과 같은 4가지 경우로 분류 된다.

i) \$I_1(n_1, n_2, n_3)\$: 작업장 \$Z\$에 완제품의 도착에 의한 상태 \$(n_1, n_2, n_3)\$로의 평균 입력률

$$I_1(n_1, n_2, n_3) = \begin{cases} \lambda_1 (n_1 + n_2 - 1) \hat{P}_1(n_1 - 1, n_2, n_3) & (n_1 > 0) \\ \lambda_1(0) \hat{P}_1(n_1 - 1, 0, 0) & (-B < n_1 < 1) \\ & , n_2 = 1, n_3 = 1) \\ \lambda_1 (n_2 - 1) \hat{P}_1(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3) & (-B < n_1 < 1, n_2 > 1) \\ 0 & (o/w) \end{cases} \quad (4)$$

ii) \$I_2(n_1, n_2, n_3)\$: 작업장 \$Z\$에 주문의 도착에 의한

상태 \$(n_1, n_2, n_3)\$로의 평균 입력률로 다음과 같은 7가지의 경우에 대하여 값을 가지며, 나머지 경우에 대해서는 0의 값을 가진다.

• 경우 1 : \$n_1 \ge 0, 2 \le n_2 \le Q, n_3 = 0\$

$$I_2(n_1, n_2, n_3) = \lambda \sum_{q=1}^{n_2-1} g_q(n_1 + q) \hat{P}_1(n_1 + q, n_2 - q, 0) \quad (5)$$

여기서, \$g_q(n)\$은 작업장 \$Z\$에 \$n\$개의 제품이 존재 할 때 작업장의 용량부족으로 유실되는 수요를 제외하고, 작업장 \$Z\$에 도착한 실제 수요의 크기가 \$q\$일 확률을 의미하며, 다음과 같이 표현된다.

$$g_q(n) = \begin{cases} g_q & (1 \le q \le \min[B+n, Q] - 1) \\ 1 - \sum_{i=1}^{\min[B+n, Q]-1} g_i & (q = \min[B+n, Q]) \\ 0 & (o/w) \end{cases} \quad (6)$$

• 경우 2 : \$n_1 \ge 0, 1 \le n_2 \le Q, n_3 = 1\$

$$I_2(n_1, n_2, n_3) = \lambda [g_{n_2}(n_1 + n_2) \hat{P}_1(n_1 + n_2, 0, 0) + \sum_{q=1}^{n_2-1} g_q(n_1 + q) \hat{P}_1(n_1 + q, n_2 - q, 1)] \quad (7)$$

• 경우 3 : \$n_1 \ge 0, n_2 > Q\$

$$I_2(n_1, n_2, n_3) = \lambda \sum_{q=1}^Q g_q(n_1 + q) \hat{P}_1(n_1 + q, n_2 - q, n_3) \quad (8)$$

- 경우 4 : $-Q+1 \leq n_1 \leq -1, n_2 \leq Q+n_1, n_3 = 0$

$$I_2(n_1, n_2, n_3) = \lambda \left[\sum_{q=1}^{-n_1} g_q(n_1+q) \hat{P}_1(n_1+q, n_2, 0) + \sum_{q=1-n_1}^{n_2-n_1-1} g_q(n_1+q) \hat{P}_1(n_1+q, n_2-n_1-q, 0) \right] \quad (9)$$

- 경우 5 : $-Q+1 \leq n_1 \leq -1, n_2 \leq Q+n_1, n_3 = 1$

$$I_2(n_1, n_2, n_3) = \lambda \left[\sum_{q=1}^{-n_1} g_q(n_1+q) \hat{P}_1(n_1+q, n_2, 1) + g_{n_2-n_1}(n_2) \hat{P}_1(n_2, 0, 0) + \sum_{q=1-n_1}^{n_2-n_1-1} g_q(n_1+q) \hat{P}_1(n_1+q, n_2-n_1-q, 1) \right] \quad (10)$$

- 경우 6 : $-Q+1 \leq n_1 \leq -1, n_2 > Q+n_1$

$$I_2(n_1, n_2, n_3) = \lambda \left[\sum_{q=1}^{-n_1} g_q(n_1+q) \hat{P}_1(n_1+q, n_2, n_3) + \sum_{q=1-n_1}^Q g_q(n_1+q) \hat{P}_1(n_1+q, n_2-n_1-q, n_3) \right] \quad (11)$$

- 경우 7 : $n_1 \leq -Q$

$$I_2(n_1, n_2, n_3) = \lambda \sum_{q=1}^Q g_q(n_1+q) \hat{P}_1(n_1+q, n_2, n_3) \quad (12)$$

iii) $I_3(n_1, n_2, n_3)$: 작업장 1에서 가공완료에 의한 상태 (n_1, n_2, n_3) 로의 평균 입력률

$$I_3(n_1, n_2, n_3) = \begin{cases} b_1 \mu_{1,1} \hat{P}_1(n_1, 1, 1) + \mu_{1,2} \hat{P}_1(n_1, 1, 0) & (n_1 < k, n_2 = 0, n_3 = 0) \\ b_1 \mu_{1,1} \hat{P}_1(n_1, n_2 + 1, 1) & (n_1 \cdot \delta(n_1) > 0) \\ + \mu_{1,2} \hat{P}_1(n_1, n_2 + 1, 0) & + n_2 < K, n_3 = 1) \\ 0 & (o/w) \end{cases} \quad (13)$$

iv) $I_4(n_1, n_2, n_3)$: 작업장 1에서 Coxian-2 분포의 1단계 경과 후, 2단계 진입에 의한 상태 (n_1, n_2, n_3) 로의 평균 입력률

$$I_4(n_1, n_2, n_3) = \begin{cases} a_1 \mu_{1,1} \hat{P}_1(n_1, n_2, 1) & (n_1 > 0, n_3 = 0) \\ 0 & (o/w) \end{cases} \quad (14)$$

본 모형의 안정상태확률은 시스템 평형방정식을

풀면 구할 수 있다. 그러나 K 와 B 가 증가하면 S 의 상태 수 또한 증가하여, 시스템 평형방정식을 푸는데 소요되는 노력도 증가한다. 따라서 마코브체인 의 특수한 구조를 이용하여 안정상태확률을 얻기 위한 효율적인 방법을 필요로 한다. 본 연구에서는 순환적 기법(recursive technique)을 이용하여 하부 네트워크 R^1 의 안정상태확률을 얻고자 한다. 순환적 기법은 모든 상태의 안정상태확률이 일부 경계상태(boundary states)의 안정상태확률의 선형식(linear combination)으로 표시될 수 있을 때 적용 가능한 기법으로, Herzog 외[12]의 연구를 시작으로 Buzacott와 Kostalski[6] 등의 많은 연구에서 사용되어 왔다. 순환적 기법은 경계상태의 안정상태 확률만 구하면 모든 상태의 안정상태확률을 구할 수 있기 때문에 연립방정식을 구성하는 식의 수는 경계상태의 수로 축소된다. 따라서 경계상태의 수가 작을 수록 순환적 기법의 효율성은 증가한다.

보다 구체적으로 본 모형의 경계상태의 집합 TB 을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$TB = \{(l_1, l_2, l_3) | -B+1 \leq l_1 \leq K, l_2 = K-l_1 \cdot \delta(l_1 > 0), \delta(K=1, l_2=1) \leq l_3 \leq \delta(l_2 > 0)\} \quad (15)$$

경계상태의 집합 TB 의 총 상태의 수, $|TB|$ 는 다음과 같이 정의되며, $K=30, B=10$ 인 경우에는 연립 방정식을 구성하는 식의 수가 1,571개에서 79개로 감소될 수 있다.

$$|TB| = \begin{cases} B+1 & (K=1) \\ 2(K+B)-1 & (K>1) \end{cases}$$

경계상태의 집합 TB 의 y 번째 경계상태를 y 라 정의 했을 때 상태 (n_1, n_2, n_3) 의 안정상태확률은 다음과 같이 경계상태의 일차결합으로 표현된다($(n_1, n_2, n_3) \in S$).

$$\hat{P}_1(n_1, n_2, n_3) = \sum_{y=1}^{|TB|} C^y(n_1, n_2, n_3) \hat{P}_1(y) \quad (16)$$

여기서, $C^y(n_1, n_2, n_3)$ 은 경계상태 y 의 상태 (n_1, n_2, n_3) 에 대한 선형식의 계수이다.

경계상태 y 에 대해 다음의 반복계획을 실행하여 선형식의 계수의 값을 구한다($\forall y \in TB$).

• 하부네트워크 R^1 의 분석 방법

1 단계

$\hat{P}_1(y)$ 의 확률을 1로 설정하고, 다른 경계상태의 확률을 0으로 놓는다. 그러면 식 (16)에 의해서 다음의 관계가 성립한다.

$$C^u(n_1, n_2, n_3) = \hat{P}_1(n_1, n_2, n_3), \forall (n_1, n_2, n_3) \in \mathcal{S} \quad (17)$$

2 단계

$K=1$ 인 경우에만 적용되는 단계로 n_1 를 0부터 $(-B+1)$ 까지 1씩 감소시켜 상태 $(n_1, 1, 0)$ 의 평형방정식을 변형한 식 (18)을 적용하고, 식 (17)을 이용하면 선형식의 계수 $C^u(n_1, 1, 0)$ 을 얻을 수 있다.

$$\hat{P}_1(n_1, 1, 0) = \frac{1}{O(n_1, 1, 0)} \sum_{e=1}^4 I_e(n_1, 1, 0) \quad (18)$$

3 단계

상태 $(-B, K, 1)$ 과 상태 $(-B, K, 0)$ 의 평형방정식을 각각 변형한 식 (19)과 식 (20)을 순차적으로 적용하고, 식 (17)을 이용하면 선형식의 계수 $C^u(-B, K, 1)$ 과 $C^u(-B, K, 0)$ 을 구할 수 있다.

$$\hat{P}_1(-B, K, 1) = \frac{1}{O(-B, K, 1)} \sum_{e=1}^4 I_e(-B, K, 1) \quad (19)$$

$$\hat{P}_1(-B, K, 0) = \frac{1}{O(-B, K, 0)} \sum_{e=1}^4 I_e(-B, K, 0) \quad (20)$$

4 단계

경계상태 y 의 나머지 선형식의 계수를 계산하기 위하여, 하부네트워크 R^1 의 총 간판의 수가 n 이며, 작업장 Z 에 간판의 도착에 의한 입력을 가지는 상태 (n_1, n_2, n_3) 의 집합 \mathbf{A}_n 을 아래와 같이 정의하자.

$$\mathbf{A}_n =$$

$$\{(n_1, n_2, n_3) | -B+1 \leq n_1 \leq n, n_2 = n - n_1 \cdot \delta(n_1 > 0), \delta(n=1, n_2=1) \leq n_3 \leq \delta(n_2 > 0)\}, n=1, \dots, K \quad (21)$$

총 간판의 수 n 을 K 를 시작으로 1까지 1씩 감소시키고, \mathbf{A}_n 의 상태 (n_1, n_2, n_3) 의 평형방정식을 변

형한 식 (22)과 식 (17)을 이용하면, 식(22)의 계산된 값에 해당하는 선형식의 계수를 얻을 수 있다 ($\forall (n_1, n_2, n_3) \in \mathbf{A}_n$).

$$\hat{P}_1(n_1 - 1, n_2 - \delta(n_1 < 1), n_3 - \delta(n=1, n_2=1)) = \frac{1}{\lambda_1(n-1)} \left\{ O(n_1, n_2, n_3) \hat{P}_1(n_1, n_2, n_3) - \sum_{e=2}^4 I_e(n_1, n_2, n_3) \right\} \quad (22)$$

선형식의 계수 계산에 이용되지 않은 상태의 집합, NB 을 다음과 같이 정의하자.

$$NB = NB_1 \cup NB_2 \quad (23)$$

여기서, NB_1 과 NB_2 는 다음과 같이 표현된다.

$$NB_1 = \{(m_1, m_2, m_3) | m_1 = -B, 0 \leq m_2 \leq K-1, 0 \leq m_3 \leq \delta(m_2 > 0)\}$$

$$NB_2 = \{(m_1, m_2, m_3) | -B+1 \leq m_1 \leq 0, 0 \leq m_2 \leq \delta(K > 1), m_3 = 0\}$$

집합 NB 의 x 번째 원소를 \underline{x} 라 정의하고, $C_e^y(n_1, n_2, n_3)$ 을 식 (4)~식 (14)에서 $\hat{P}_1(n_1, n_2, n_3)$ 의 표현을 $C^u(n_1, n_2, n_3)$ 로 변화시킨 수식이라 정의하자 ($e=1, \dots, 4$). ($|NB|-1$)개의 상태 $(m_1, m_2, m_3) (\in NB)$ 의 시스템 평형방정식과 모든 상태의 확률의 합을 1로 하는 정규화 방정식으로 구성된 다음의 연립 방정식을 풀면 경계상태의 안정상태확률을 구할 수 있으며, 이를 이용하여 식 (16)를 적용하면 다른 상태의 안정상태확률을 계산 할 수 있다 ($|TB|=|NB|$).

$$\begin{pmatrix} ba(\underline{1}, \underline{1}) & \dots & ba(\underline{1}, \underline{y}) & \dots & ba(\underline{1}, \underline{TB}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ba(\underline{x}, \underline{1}) & \dots & ba(\underline{x}, \underline{y}) & \dots & ba(\underline{x}, \underline{TB}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ba(\underline{NB}, \underline{1}) & \dots & ba(\underline{NB}, \underline{y}) & \dots & ba(\underline{NB}, \underline{TB}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{P}(\underline{1}) \\ \vdots \\ \hat{P}(\underline{y}) \\ \vdots \\ \hat{P}(\underline{TB}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

여기서, $ba(\underline{x}, \underline{y})$ 는 아래와 같이 표현된다.

$$ba(\underline{x}, \underline{y}) = \begin{cases} O(\underline{x}) C^u(\underline{x}) - \sum_{e=1}^4 C_e^y(\underline{x}) & (1 \leq \underline{x} \leq |NB|-1) \\ \sum_{(n_1, n_2, n_3) \in \mathcal{S}} C^u(n_1, n_2, n_3) & (\underline{x} = |NB|) \end{cases} \quad (25)$$

$\hat{P}_1(n_1, n_2, n_3)$ 이 구해지면, 하부네트워크 R^i 에 n 개의 간판이 존재할 확률 $P_1(n)$ 은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$P_1(n) = \begin{cases} \sum_{i=-B}^0 \hat{P}_1(i, 0, 0) & (n=0) \\ \hat{P}_1(n, 0, 0) + \sum_{i=-B}^{n-1} (\hat{P}_1(i, n-i \cdot \delta(i>0), 0) + \hat{P}_1(i, n-i \cdot \delta(i>0), 1)) & (n=1, \dots, K) \end{cases} \quad (26)$$

3.3 하부네트워크 R^i 의 분석 ($i=2, \dots, M$)

하부네트워크 R^i 는 상태종속 도착율이 $\lambda_i(n)$ 이고, 도착간격이 지수분포를 따르는 개방형 대기네트워크로 간주해 분석한다. 하부네트워크 R^i 에 n 개의 간판이 존재할 안정상태확률을 $P_i(n)$ 이라 정의했을 때, 작업장 i 의 부품가공시간이 Coxian-2 분포를 따르므로 [그림 5]의 하부네트워크 R^i 는 상태종속도착율 $\lambda_i(n)$ 을 가지는 $M/G_2/1/K$ 대기행렬 시스템으로 모형화가 가능하다. 상태종속도착율 $\lambda_i(n)$ 을 가지는 $M/G_2/1/K$ 대기행렬 시스템의 분석 방법은 박찬우와 이효성의 연구[3]를 참고하기 바란다.

3.4 승법형 근사법을 이용한 알고리즘

하부네트워크 R^i 의 안정상태확률 $P_i(n)$ 이 구해지면 하부네트워크 R^i 에 존재하는 간판의 수가 n 일 경우의 상태종속 산출율 $v_i(n)$ 의 값은 다음과 같이 얻을 수 있다[5].

$$v_i(n) = \begin{cases} 0 & (n=0) \\ \lambda_i(n-1) \frac{P_i(n-1)}{P_i(n)} & (n=1, 2, \dots, K) \end{cases} \quad (27)$$

하부네트워크 R^i 의 상태종속 산출율 $v_i(n)$ 의 값이 구해지면 동등 승법형 대기네트워크를 구성하는 서버 S^i 의 상태종속 서비스율 $\mu_i(n)$ 은 다음과 같이 구해진다.

$$\mu_i(n) = v_i(n), \quad n=0, 1, \dots, K, \quad i=1, 2, \dots, M \quad (28)$$

따라서 하부네트워크 R^i 의 상태종속 도착율 $\lambda_i(n)$ 을 알 수 있으면 하부네트워크 R^i 의 안정상태확률을 구할 수 있고 식 (27)과 식 (28)를 이용하여 동등 승법형 네트워크의 상태종속 서비스율 $\mu_i(n)$ 을 구할 수 있다. 앞 절의 하부네트워크 R^i 의 분석 과정에서 하부네트워크의 상태종속 도착율 $\lambda_i(n)$ 을 알고 있다고 가정하였다. 그러나 $\lambda_i(n)$ 의 값은 우리가 구하여야만 하는 미지의 값이다. 동등 승법형 네트워크의 상태종속 서비스율 $\mu_i(n)$ 의 값을 알면 $\lambda_i(n)$ 의 값은 다음과 같이 구하여 질 수 있다. 동등 승법형 대기네트워크의 서비스율 $\mu_i(n)$ 의 값을 알면 승법형 대기네트워크의 분석에 사용될 수 있는 임의의 알고리즘을 이용하여 서버 S^i 의 상태종속 산출율, $X_i(n)$ 을 구할 수 있다. 만일 중합(convolution) 알고리즘을 이용하면 서버 S^i 의 상태종속 산출율은 다음 식에 의해 구할 수 있다.

$$X_i(n) = \begin{cases} e_i \frac{G_{M/i}(K-n-1)}{G_{M/i}(K-n)} & (n=0, 1, \dots, K-1) \\ 0 & (n=K) \end{cases} \quad (29)$$

여기서 e_i 는 서버 S^i 의 상대적 방문율이고, $G_{M/i}(n)$ 는 M 개의 스테이션 중 스테이션 i 를 제외하고 계산한 정규화상수이다.

동등 승법형 대기네트워크를 구성하는 서버 S^i 의 상태종속 산출율이 구해지면 하부네트워크 R^i 의 상태종속 도착율 $\lambda_i(n)$ 은 다음과 같이 구해진다.

$$\lambda_i(n) = X_i(n), \quad n=0, 1, \dots, K, \quad i=1, 2, \dots, M \quad (30)$$

이상과 같이 하부네트워크의 안정상태확률이 구하여 지면, 하부네트워크의 상태종속 산출율을 계산할 수 있고, 이 값은 곧 동등 대기네트워크의 상태종속 서비스율로 사용된다. 또한 동등 승법형 대기네트워크의 상태종속 서비스율이 구해지면 동등 승법형 대기네트워크의 상태종속 산출율이 계산되어 질 수 있고, 이 값은 곧 하부네트워크의 상태종속 도착율로 사용될 수 있다. 승법형 근사법에서는 이와 같은 과정을 해가 수렴할 때까지 반복 수행한다.

• 알고리즘

단계 1 : 초기화 과정

$\mu_i(n)$ 의 초기화, $n=0, \dots, K, i=1, \dots, M$.

단계 2 : 반복 과정

- i) 식 (29)과 식 (30)을 이용하여 $\lambda_i(n)$ 의 계산, $n=0, \dots, K, i=1, \dots, M$.
- ii) 하부네트워크 R^i 를 분석하여, 안정상태확률 $P_i(n)$ 을 계산, $n=0, \dots, K, i=1, \dots, M$.
- iii) 식 (27)과 식 (28)을 이용하여 $\mu_i(n)$ 의 계산, $n=0, \dots, K, i=1, \dots, M$.
- iv) $\mu_i(n)$ 의 수렴이 이루어 졌으면 단계 3으로 가고, 수렴이 이루어지지 않았으면 단계 2로 돌아감, $n=0, \dots, K, i=1, \dots, M$.

단계 3 : 성능치의 계산 과정

구하고자 하는 성능치를 4절의 식을 이용하여 계산. ■

4. 시스템 성능척도 계산

승법형 근사법을 이용한 알고리즘이 수렴하여, 각 하부네트워크의 안정상태확률이 구해지면, 이를 이용하여 CONWIP 시스템의 각 작업장의 안정상태확률을 구할 수 있다. 작업장 Z 와 작업장 1의 안정상태확률 $P_Z(n)$ 과 $P_1^{KZ}(n)$ 은 하부네트워크 R^i 의 안정상태확률 $\hat{P}_1(n_1, n_2, n_3)$ 을 이용하여 다음과 같이 계산된다.

$$P_Z(n) = \hat{P}_1(n, 0, 0) + \sum_{n_2=1}^{k-\delta(n>0)n} (\hat{P}_1(n, n_2, 0) + \hat{P}_1(n, n_2, 1))$$

$$(n = -B, -B+1, \dots, K) \quad (31)$$

$$P_1^{KZ}(n) = \begin{cases} \sum_{i=-B}^K \hat{P}_1(i, 0, 0) & (n=0) \\ \sum_{i=-B}^{K-n} (\hat{P}_1(i, n, 0) + \hat{P}_1(i, n, 1)) & (1 \leq n \leq K) \end{cases} \quad (32)$$

식 (31)과 식 (32)로부터 작업장 Z 의 평균 재고 \overline{FP} 와 평균 미충족수요의 수 \overline{BP} 는 다음과 같이 산된다.

$$\overline{FP} = \sum_{n=1}^K n \cdot P_Z(n) \quad (33)$$

$$\overline{BP} = \sum_{n=-B}^1 |n| \cdot P_Z(n) \quad (34)$$

평균 주문의 크기를 $E(G)$ 라 정의했을 때, 시험 수요(tagged demand)가 속한 주문의 크기가 q 일 확률은 $\frac{q \cdot g_q}{E(G)}$ 이고, 시험수요가 속한 주문의 크기가 q 일 경우 시험수요가 주문 내에서 우선순위가 c 일 확률은 c 의 값에 관계없이 $\frac{1}{q}$ 이다[1]. 이상의 사실로부터 제품의 수요가 즉시 만족될 확률 F , 제품의 수요가 수용될 확률 SL , 제품의 수요가 대기할 확률 P_b 은 다음과 같이 계산된다.

$$F = \sum_{n=1}^{Q-1} P_Z(n) \left\{ \sum_{q=1}^n \frac{q \cdot g_q}{E(G)} + \sum_{q=n+1}^Q \sum_{c=1}^n \frac{q \cdot g_q}{E(G)} \cdot \frac{1}{q} \right\}$$

$$+ \sum_{n=Q}^K P_Z(n)$$

$$= \frac{1}{E(G)} \left[\sum_{n=1}^{Q-1} P_Z(n) \left\{ \sum_{q=1}^n q \cdot g_q + n \sum_{q=n+1}^Q g_q \right\} \right]$$

$$+ \sum_{n=Q}^K P_Z(n) \quad (35)$$

$$\text{여기서, } E(G) = \sum_{q=1}^Q q \cdot g_q$$

$$SL = 1 - \sum_{n=-B}^{-B+Q-1} P_Z(n) \sum_{q=B+n+1}^Q \sum_{c=B+n+1}^q \frac{q \cdot g_q}{E(G)} \cdot \frac{1}{q}$$

$$= 1 - \frac{1}{E(G)} \sum_{n=-B}^{-B+Q-1} P_Z(n) \sum_{q=B+n+1}^Q g_q \cdot (q - B - n) \quad (36)$$

$$P_b = SL - F \quad (37)$$

평균 미충족수요의 수 \overline{BP} 와 제품의 수요가 수용될 확률 SL 가 구해지면, Little의 공식을 이용하여 평균 대기시간 \overline{W} 와 미충족수요의 평균 대기시간 \overline{W}_b 는 다음과 같이 계산된다.

$$\overline{W} = \frac{\overline{BP}}{SL \cdot \lambda \cdot E(G)} \quad (38)$$

$$\overline{W}_b = \frac{\overline{BP}}{P_b \cdot \lambda \cdot E(G)} = \frac{SL \cdot \overline{W}}{P_b} \quad (39)$$

작업장 Z 를 제외한 작업장 i 에 존재하는 평균 재공품의 수 \bar{K}_i 와 기계의 이용율 U_i 은 다음과 같이 계산된다.

$$\bar{K}_i = \sum_{n=1}^K n \cdot P_i^W(n), i=1, \dots, M \quad (40)$$

여기서,

$$P_i^W(n) = P_i(n), n=0, \dots, K, i=2, \dots, M$$

$$U_i = 1 - P_i^W(0), i=1, \dots, M \quad (41)$$

도착한 주문이 수용될 확률 SL^S 은 다음과 같이 계산된다.

$$SL^S = 1 - P_z(-B) \quad (42)$$

5. 근사적 분석의 정확성 평가

본 연구에서는 시스템의 특성을 관찰하기 위하여 많은 실험을 수행하였으며, 제안된 근사법의 정확성을 평가하기 위하여 근사적기법에서 얻어진 값과 시뮬레이션에서 얻어진 값을 비교하였다. 시뮬레이션의 언어는 SIMLIB[16]을 사용하였으며, 수치분석은 Visual Basic 6.0이 이용되었다. 시뮬레이션의 종료조건으로 시뮬레이션의 시간을 10^6 로 설정하여 10번 반복하였고, 알고리즘의 종료조건은 10^{-6} 이하로 하였다. 본 연구에서 실험한 예제에서 알고리즘의 반복 횟수는 대부분 10번 이내의 반복에서 수렴함을 관측할 수 있었고, 모든 예제에서 수렴하였다. 본 절에서는 파라미터 값이 변화함에 따라 알고리

즘의 정확도가 어떻게 변화하는지 알아보기 위해 대표적인 4개의 예제 군을 선정하여 소개하고자 한다. 예제 가 군에서는 도착율 λ 의 값을 변화시켜 보았다. 예제 나 군과 예제 다 군에서는 K 와 B 를 증가시켜 시스템의 용량이 알고리즘의 정확성에 미치는 영향을 조사해 보았다. 예제 라 군에서는 Q 를 변화시켜 주문의 크기가 알고리즘의 정확성에 미치는 영향을 조사해 보았다. 편의상 모든 예제 군에서 같은 부품 생산시스템에 속하는 모든 작업장에서 가공시간의 분포는 동일하다고 가정하였다. 실험 데이터는 <표 1>에서 정리되며, 실험 결과는 [그림 7]~[그림 10]과 <표 2>~<표 5>에서 요약된다.

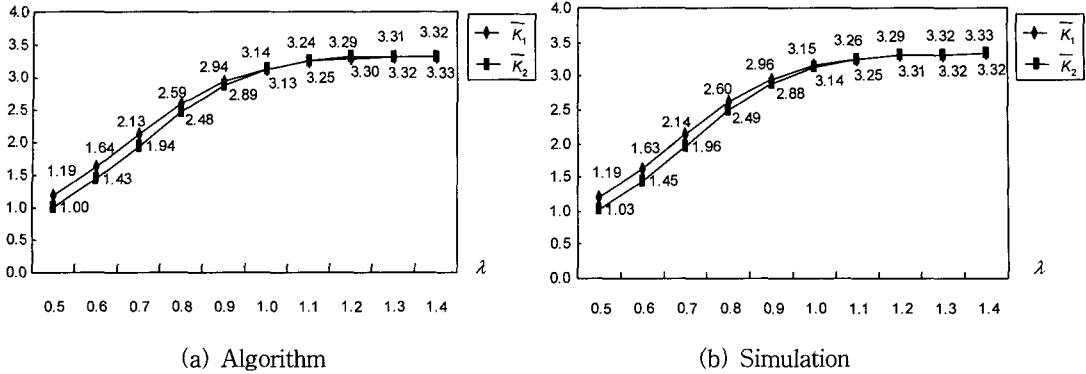
실험 결과에서 볼 수 있듯이 제안된 근사적 기법은 시뮬레이션과의 상대오차를 5% 미만의 만족할 만한 수준의 정확한 해를 산출해 주었다.

그러나 근사적 기법에 의해 얻어진 해가 0.1 미만의 작은 값을 취할 경우에는 간혹 상대오차 값이 20% 이상 발생함을 관측할 수 있다. 이러한 경우에는 상대오차 값이 큰 의미를 갖지 못하며, 이 경우에도 대부분의 절대오차 값은 0.03 미만의 작은 값을 취하고 있음을 고려할 때 근사적기법의 유용성은 이러한 사실에 의해 감소되지 않을 것으로 판단한다. 또한 수요가 집단으로 발생하는 경우 CONWIP 시스템의 주문관점의 성능척도를 분석할 수 있는 특별한 대안이 존재하지 않는 상황에서 본 연구에서 제안한 분석기법은 오차의 범위가 지나치게 크지 않는 한 시뮬레이션을 대신할 유효한 수리적 기법이 될 수 있을 것으로 판단한다.

<표 1> 실험 데이터

변수 실험군	λ	M	K	B	Q	g_i ($q=1, \dots, Q$)	$\mu_{i,1}, \mu_{i,2}$ ($i=1, \dots, M$)	a_i ($i=1, \dots, M$)
가	* ¹⁾	3	10	10	2	$1/Q$	2	0.3
나	0.6	5	*	10	3	$1/Q$	2	0.3
다	1	7	15	*	3	$1/Q$	4	0.5
라	0.3	10	15	15	*	$1/Q$	3	0.5

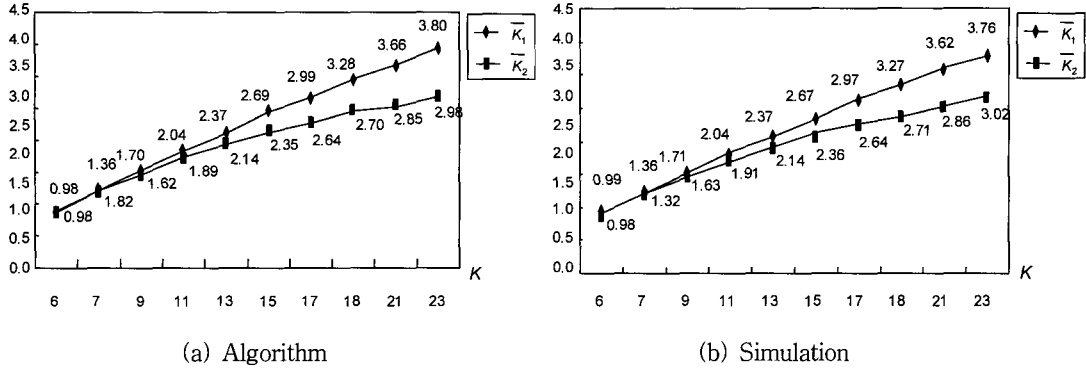
주) ¹⁾ 실험 데이터는 해당 실험결과 표와 그림에서 설명됨.



[그림 7] 작업장의 평균 재공품 수(예제 가 군)

<표 2> 예제 가 군의 시스템 성능척도

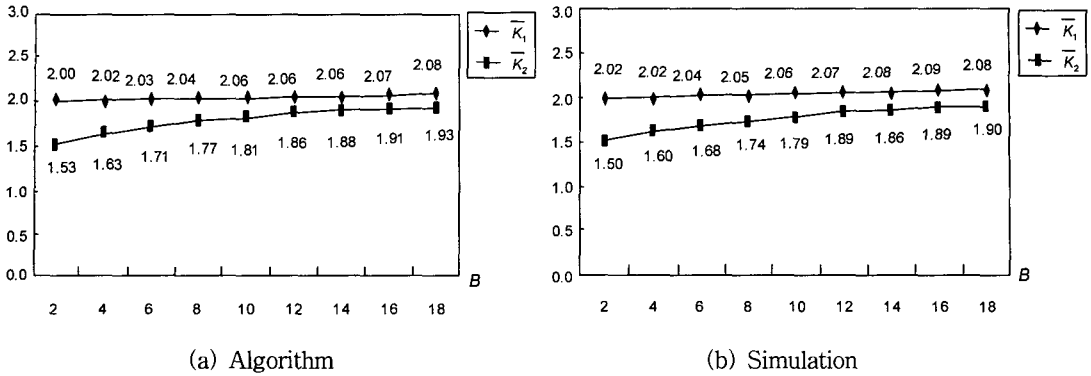
λ	Algorithm(Relative Error (%))							Simulation(95% Confidence Interval)						
	\overline{FP}	\overline{BP}	F	SL	P_b	\overline{W}	W_b	\overline{FP}	\overline{BP}	F	SL	P_b	\overline{W}	W_b
0.5	6.7980	0.0758	0.9518	0.9997	0.0479	0.1011	2.1089	6.7804	0.0778	0.9501	0.9997	0.0495	0.1037	2.0936
	(0.2596)	(-2.5707)	(0.1789)	(0.0000)	(-3.2323)	(-2.5072)	(0.7308)	(+/-0.0028)	(+/-0.0004)	(+/-0.0002)	(+/-0.0000)	(+/-0.0002)	(+/-0.0006)	(+/-0.0034)
0.6	5.5116	0.3066	0.8658	0.9975	0.1318	0.3415	2.5853	5.5135	0.3018	0.8660	0.9977	0.1317	0.3361	2.5452
	(-0.0345)	(1.5905)	(-0.0231)	(-0.0200)	(0.0759)	(1.6067)	(1.5755)	(+/-0.0023)	(+/-0.0005)	(+/-0.0002)	(+/-0.0000)	(+/-0.0002)	(+/-0.0006)	(+/-0.0018)
0.7	3.9809	0.9272	0.7069	0.9879	0.2809	0.8940	3.1437	3.9767	0.9247	0.7042	0.9886	0.2844	0.8908	3.0971
	(0.1056)	(0.2704)	(0.3834)	(-0.0708)	(-1.2307)	(0.3592)	(1.5046)	(+/-0.0020)	(+/-0.0012)	(+/-0.0003)	(+/-0.0000)	(+/-0.0003)	(+/-0.0011)	(+/-0.0021)
0.8	2.4550	2.0996	0.4930	0.9602	0.4672	1.8221	3.7451	2.4390	2.0911	0.4890	0.9622	0.4732	1.8111	3.6825
	(0.6560)	(0.4065)	(0.8180)	(-0.2079)	(-1.2680)	(0.6074)	(1.6999)	(+/-0.0018)	(+/-0.0014)	(+/-0.0002)	(+/-0.0000)	(+/-0.0002)	(+/-0.0013)	(+/-0.0010)
0.9	1.2863	3.6235	0.2906	0.9098	0.6192	2.9504	4.3350	1.2726	3.6214	0.2862	0.9132	0.6271	2.9374	4.2777
	(1.0765)	(0.0580)	(1.5374)	(-0.3723)	(-1.2598)	(0.4426)	(1.3395)	(+/-0.0015)	(+/-0.0021)	(+/-0.0003)	(+/-0.0001)	(+/-0.0002)	(+/-0.0019)	(+/-0.0013)
1.0	0.6000	5.0659	0.1512	0.8450	0.6939	3.9966	4.8673	0.5749	5.0825	0.1465	0.8488	0.7024	3.9918	4.8242
	(4.3660)	(-0.3266)	(3.2082)	(-0.4477)	(-1.2101)	(0.1202)	(0.8934)	(+/-0.0007)	(+/-0.0018)	(+/-0.0001)	(+/-0.0001)	(+/-0.0001)	(+/-0.0019)	(+/-0.0015)
1.1	0.2658	6.1836	0.0739	0.7786	0.7047	4.8133	5.3182	0.2471	6.2184	0.0689	0.7824	0.7134	4.8170	5.2834
	(7.5678)	(-0.5696)	(7.2569)	(-0.4857)	(-1.2195)	(-0.0768)	(0.6537)	(+/-0.0004)	(+/-0.0011)	(+/-0.0001)	(+/-0.0001)	(+/-0.0001)	(+/-0.0013)	(+/-0.0014)
1.2	0.1173	6.9778	0.0356	0.7175	0.6818	5.4030	5.6854	0.1024	7.0290	0.0315	0.7204	0.6889	5.4206	5.6684
	(14.5508)	(-0.7284)	(13.0159)	(-0.4026)	(-1.0306)	(-0.3247)	(0.2999)	(+/-0.0004)	(+/-0.0021)	(+/-0.0001)	(+/-0.0001)	(+/-0.0001)	(+/-0.0023)	(+/-0.0019)
1.3	0.0531	7.5337	0.0174	0.6637	0.6462	5.8215	5.9785	0.0433	7.5864	0.0145	0.6656	0.6511	5.8451	5.9748
	(22.6328)	(-0.6947)	(20.0000)	(-0.2855)	(-0.7526)	(-0.4038)	(0.0619)	(+/-0.0002)	(+/-0.0009)	(+/-0.0000)	(+/-0.0001)	(+/-0.0001)	(+/-0.0012)	(+/-0.0011)
1.4	0.0249	7.9303	0.0087	0.6167	0.6080	6.1231	6.2111	0.0195	7.9653	0.0071	0.6191	0.6120	6.1265	6.1976
	(27.6923)	(-0.4394)	(22.5352)	(-0.3877)	(-0.6536)	(-0.0555)	(0.2178)	(+/-0.0002)	(+/-0.0006)	(+/-0.0000)	(+/-0.0001)	(+/-0.0001)	(+/-0.0014)	(+/-0.0015)



[그림 8] 작업장의 평균 재공품 수(예제 나 군)

<표 3> 예제 나 군의 시스템 성능척도

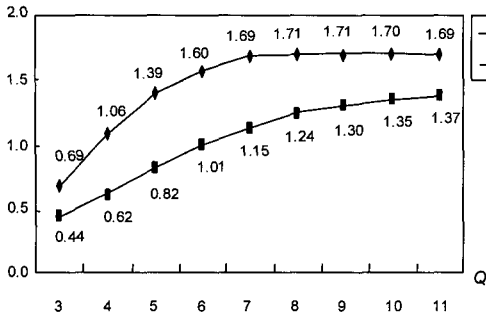
K	Algorithm(Relative Error (%))						Simulation(95% Confidence Interval)							
	\overline{FP}	\overline{BP}	F	SL	P_b	\overline{W}	W_b	\overline{FP}	\overline{BP}	F	SL	P_b	\overline{W}	W_b
5	0.1133	6.5573	0.0387	0.7101	0.6714	7.6949	8.1389	0.0872	6.6400	0.0299	0.7199	0.6900	7.6858	8.0189
	(29.9312)	-(1.2455)	(29.4314)	-(1.3613)	-(2.6957)	(0.1184)	(1.4965)	(+/-0.0002)	(+/-0.0016)	(+/-0.0001)	(+/-0.0001)	(+/-0.0001)	(+/-0.0026)	(+/-0.0022)
7	0.3758	5.3328	0.1069	0.7979	0.6910	5.5694	6.4311	0.3396	5.3568	0.0956	0.8069	0.7113	5.5320	6.2755
	(10.6596)	-(0.4480)	(11.8201)	-(1.1154)	-(2.8539)	(0.6761)	(2.4795)	(+/-0.0005)	(+/-0.0019)	(+/-0.0001)	(+/-0.0001)	(+/-0.0001)	(+/-0.0023)	(+/-0.0018)
9	0.8028	4.3626	0.1928	0.8514	0.6586	4.2700	5.5201	0.7622	4.3617	0.1825	0.8600	0.6775	4.2266	5.3648
	(5.3267)	(0.0206)	(5.6438)	-(1.0000)	-(2.7897)	(1.0268)	(2.8948)	(+/-0.0004)	(+/-0.0013)	(+/-0.0001)	(+/-0.0001)	(+/-0.0001)	(+/-0.0016)	(+/-0.0013)
11	1.3791	3.5967	0.2832	0.8865	0.6034	3.3808	4.9675	1.3510	3.5817	0.2752	0.8928	0.6176	3.3430	4.8329
	(2.0799)	(0.4188)	(2.9070)	-(0.7056)	-(2.2992)	(1.1307)	(2.7851)	(+/-0.0012)	(+/-0.0013)	(+/-0.0002)	(+/-0.0002)	(+/-0.0003)	(+/-0.0016)	(+/-0.0026)
13	2.0890	2.9841	0.3707	0.9111	0.5404	2.7294	4.6019	2.0694	2.9826	0.3649	0.9138	0.5489	2.7200	4.5284
	(0.9471)	(0.0503)	(1.5895)	-(0.2955)	-(1.5486)	(0.3456)	(1.6231)	(+/-0.0017)	(+/-0.0017)	(+/-0.0003)	(+/-0.0001)	(+/-0.0002)	(+/-0.0018)	(+/-0.0013)
15	2.9198	2.4869	0.4521	0.9291	0.4770	2.2306	4.3444	2.9153	2.4899	0.4460	0.9315	0.4854	2.2276	4.2742
	(0.1544)	-(0.1205)	(1.3677)	-(0.2576)	-(1.7305)	(0.1347)	(1.6424)	(+/-0.0048)	(+/-0.0033)	(+/-0.0005)	(+/-0.0001)	(+/-0.0004)	(+/-0.0032)	(+/-0.0019)
17	3.8612	2.0782	0.5259	0.9428	0.4169	1.8370	4.1541	3.8376	2.0809	0.5206	0.9448	0.4243	1.8353	4.0873
	(0.6150)	-(0.1298)	(1.0181)	-(0.2117)	-(1.7440)	(0.0926)	(1.6343)	(+/-0.0056)	(+/-0.0020)	(+/-0.0003)	(+/-0.0001)	(+/-0.0002)	(+/-0.0020)	(+/-0.0026)
19	4.9049	1.7391	0.5918	0.9534	0.3616	1.5201	4.0080	4.8919	1.7491	0.5875	0.9547	0.3672	1.5268	3.9690
	(0.2657)	-(0.5717)	(0.7319)	-(0.1362)	-(1.5251)	-(0.4388)	(0.9826)	(+/-0.0045)	(+/-0.0024)	(+/-0.0004)	(+/-0.0001)	(+/-0.0003)	(+/-0.0022)	(+/-0.0020)
21	6.0435	1.4558	0.6502	0.9619	0.3117	1.2612	3.8924	6.0201	1.4755	0.6445	0.9626	0.3182	1.2773	3.8643
	(0.3887)	-(1.3351)	(0.8844)	-(0.0727)	-(2.0427)	-(1.2605)	(0.7272)	(+/-0.0085)	(+/-0.0017)	(+/-0.0004)	(+/-0.0001)	(+/-0.0003)	(+/-0.0015)	(+/-0.0015)
23	7.2689	1.2189	0.7014	0.9687	0.2673	1.0486	3.8004	7.2138	1.2480	0.6940	0.9688	0.2748	1.0734	3.7845
	(0.7638)	-(2.3317)	(1.0663)	-(0.0103)	-(2.7293)	-(2.3104)	(0.4201)	(+/-0.0051)	(+/-0.0011)	(+/-0.0002)	(+/-0.0001)	(+/-0.0002)	(+/-0.0010)	(+/-0.0015)



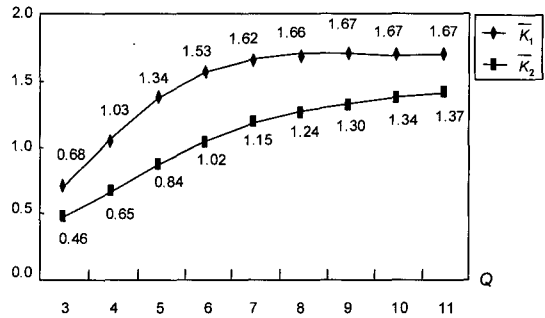
[그림 9] 작업장의 평균 재공품 수(예제 다 군)

<표 4> 예제 다 군의 시스템 성능척도

B	Algorithm (Relative Error (%))						Simulation (95% Confidence Interval)							
	\overline{FP}	\overline{BP}	F	SL	P_0	\overline{W}	W_0	\overline{FP}	\overline{BP}	F	SL	P_0	\overline{W}	W_0
2	3.8398	0.2809	0.6621	0.8443	0.1822	0.1664	0.7709	3.9265	0.2727	0.6631	0.8481	0.1850	0.1608	0.7371
	(-2.2081)	(3.0070)	(-0.1508)	(-0.4481)	(-1.5135)	(3.4826)	(4.5855)	(+/-0.0009)	(+/-0.0002)	(+/-0.0001)	(+/-0.0001)	(+/-0.0000)	(+/-0.0001)	(+/-0.0004)
4	3.2060	0.7989	0.5540	0.8666	0.3125	0.4610	1.2781	3.3232	0.7802	0.5575	0.8717	0.3142	0.4475	1.2414
	(-3.5267)	(2.3968)	(-0.6278)	(-0.5851)	(-0.5411)	(3.0168)	(2.9563)	(+/-0.0046)	(+/-0.0007)	(+/-0.0004)	(+/-0.0001)	(+/-0.0004)	(+/-0.0004)	(+/-0.0005)
6	2.7320	1.4673	0.4730	0.8833	0.4103	0.8306	1.7882	2.8503	1.4180	0.4805	0.8916	0.4111	0.7952	1.7247
	(-4.1504)	(3.4767)	(-1.5609)	(-0.9309)	(-0.1946)	(4.4517)	(3.6818)	(+/-0.0007)	(+/-0.0004)	(+/-0.0001)	(+/-0.0000)	(+/-0.0001)	(+/-0.0003)	(+/-0.0003)
8	2.3657	2.2390	0.4102	0.8961	0.4859	1.2493	2.3039	2.4700	2.1595	0.4174	0.9058	0.4884	1.1921	2.2108
	(-4.2227)	(3.6814)	(-1.7250)	(-1.0709)	(-0.5119)	(4.7983)	(4.2111)	(+/-0.0031)	(+/-0.0023)	(+/-0.0003)	(+/-0.0001)	(+/-0.0002)	(+/-0.0014)	(+/-0.0013)
10	2.0757	3.0855	0.3603	0.9062	0.5459	1.7024	2.8260	2.1675	2.9515	0.3686	0.9173	0.5488	1.6087	2.6893
	(-4.2353)	(4.5401)	(-2.2518)	(-1.2101)	(-0.5284)	(5.8246)	(5.0831)	(+/-0.0028)	(+/-0.0031)	(+/-0.0005)	(+/-0.0001)	(+/-0.0004)	(+/-0.0018)	(+/-0.0011)
12	1.8416	3.9881	0.3199	0.9144	0.5944	2.1808	3.3545	1.9374	3.8021	0.3284	0.9260	0.5976	2.0530	3.1814
	(-4.9448)	(4.8920)	(-2.5883)	(-1.2527)	(-0.5355)	(6.2250)	(5.4410)	(+/-0.0023)	(+/-0.0020)	(+/-0.0002)	(+/-0.0001)	(+/-0.0002)	(+/-0.0013)	(+/-0.0012)
14	1.6492	4.9344	0.2867	0.9210	0.6344	2.6787	3.8892	1.7449	4.6840	0.2954	0.9340	0.6385	2.5075	3.6675
	(-5.4846)	(5.3459)	(-2.9452)	(-1.3919)	(-0.6421)	(6.8275)	(6.0450)	(+/-0.0042)	(+/-0.0052)	(+/-0.0005)	(+/-0.0001)	(+/-0.0004)	(+/-0.0030)	(+/-0.0018)
16	1.4887	5.9156	0.2589	0.9266	0.6677	3.1921	4.4298	1.5818	5.5829	0.2689	0.9403	0.6714	2.9687	4.1576
	(-5.8857)	(5.9593)	(-3.7189)	(-1.4570)	(-0.5511)	(7.5252)	(6.5470)	(+/-0.0016)	(+/-0.0036)	(+/-0.0002)	(+/-0.0002)	(+/-0.0003)	(+/-0.0024)	(+/-0.0036)
18	1.3529	6.9260	0.2354	0.9313	0.6959	3.7184	4.9761	1.4480	6.5166	0.2448	0.9451	0.7002	3.4477	4.6532
	(-6.5677)	(6.2824)	(-3.8399)	(-1.4602)	(-0.6141)	(7.8516)	(6.9393)	(+/-0.0028)	(+/-0.0049)	(+/-0.0003)	(+/-0.0001)	(+/-0.0003)	(+/-0.0028)	(+/-0.0018)



(a) Algorithm



(b) Simulation

[그림 10] 작업장의 평균 재공품 수(예제 라 군)

<표 5> 예제 라 군의시스템 성능척도

Q	Algorithm (Relative Error (%))						Simulation (95% Confidence Interval)							
	FP	BP	F	SL	P _s	W	w _b	FP	BP	F	SL	P _s	W	w _b
3	10.3589	0.0211	0.9836	1.0000	0.0164	0.0351	2.1456	10.1932	0.0314	0.9770	1.0000	0.0230	0.0524	2.2767
	(1.6256)	-(32.8025)	(0.6755)	(0.0000)	-(28.6957)	-(33.0153)	-(5.7583)	(+/-0.0013)	(+/-0.0001)	(+/-0.0001)	(+/-0.0000)	(+/-0.0001)	(+/-0.0002)	(+/-0.0069)
4	8.3592	0.2348	0.9001	0.9992	0.0991	0.3133	3.1595	8.1181	0.3079	0.8753	0.9990	0.1236	0.4109	3.3204
	(2.9699)	-(23.7415)	(2.8333)	(0.0200)	-(19.8220)	-(23.7527)	-(4.8458)	(+/-0.0015)	(+/-0.0003)	(+/-0.0001)	(+/-0.0000)	(+/-0.0001)	(+/-0.0003)	(+/-0.0028)
5	6.2164	0.9925	0.7306	0.9906	0.2600	1.1131	4.2411	6.0424	1.1144	0.7027	0.9905	0.2878	1.2501	4.3030
	(2.8797)	-(10.9386)	(3.9704)	(0.0101)	-(9.6595)	-(10.9591)	-(1.4385)	(+/-0.0024)	(+/-0.0018)	(+/-0.0003)	(+/-0.0000)	(+/-0.0003)	(+/-0.0020)	(+/-0.0028)
6	4.3404	2.3306	0.5341	0.9620	0.4279	2.3072	5.1868	4.2716	2.4322	0.5141	0.9618	0.4477	2.4085	5.1744
	(1.6106)	-(4.1773)	(3.8903)	(0.0208)	-(4.4226)	-(4.2059)	(0.2396)	(+/-0.0018)	(+/-0.0018)	(+/-0.0002)	(+/-0.0001)	(+/-0.0002)	(+/-0.0019)	(+/-0.0030)
7	2.9832	3.8391	0.3723	0.9122	0.5399	3.5071	5.9251	2.9672	3.9014	0.3594	0.9139	0.5546	3.5573	5.8626
	(0.5392)	-(1.5969)	(3.5893)	-(0.1860)	-(2.6506)	-(1.4112)	(1.0661)	(+/-0.0024)	(+/-0.0037)	(+/-0.0003)	(+/-0.0002)	(+/-0.0002)	(+/-0.0038)	(+/-0.0044)
8	2.1017	5.1704	0.2603	0.8515	0.5912	4.4976	6.4780	2.1454	5.1403	0.2576	0.8568	0.5993	4.4439	6.3538
	-(2.0369)	(0.5856)	(1.0481)	-(0.6186)	-(1.3516)	(1.2084)	(1.9547)	(+/-0.0029)	(+/-0.0042)	(+/-0.0003)	(+/-0.0001)	(+/-0.0002)	(+/-0.0041)	(+/-0.0033)
9	1.5451	6.2254	0.1874	0.7896	0.6022	5.2563	6.8915	1.6134	6.1509	0.1881	0.7965	0.6084	5.1483	6.7399
	-(4.2333)	(1.2112)	-(0.3721)	-(0.8663)	-(1.0191)	(2.0978)	(2.2493)	(+/-0.0030)	(+/-0.0041)	(+/-0.0003)	(+/-0.0002)	(+/-0.0002)	(+/-0.0044)	(+/-0.0032)
10	1.1887	7.0314	0.1399	0.7314	0.5915	5.8264	7.2044	1.2514	6.9326	0.1421	0.7401	0.5979	5.6774	7.0268
	-(5.0104)	(1.4252)	-(1.5482)	-(1.1755)	-(1.0704)	(2.6244)	(2.5275)	(+/-0.0032)	(+/-0.0054)	(+/-0.0003)	(+/-0.0003)	(+/-0.0002)	(+/-0.0067)	(+/-0.0058)
11	0.9529	7.6455	0.1083	0.6788	0.5705	6.2577	7.4453	1.0199	7.5231	0.1114	0.6887	0.5773	6.0690	7.2399
	-(6.5693)	(1.6270)	-(2.7828)	-(1.4375)	-(1.1779)	(3.1092)	(2.8371)	(+/-0.0026)	(+/-0.0050)	(+/-0.0003)	(+/-0.0002)	(+/-0.0002)	(+/-0.0053)	(+/-0.0036)

비록 본 논문에서는 지면 관계상 4개의 예제의 결과만을 제시했으나, 다른 예제에 대해서도 위에서 얻어진 결과와 비슷한 양상을 보였음을 밝힌다.

6. 결 론

본 연구에서는 이정은과 이효성의 연구를 확장하여 수요가 복합 포아송 과정에 따라 발생하고, 각 기계의 가공시간이 Coxian-2 분포를 따른다는 가정 하에서 CONWIP 시스템의 성능치를 계산할 수 있는 근사적 기법을 개발하였다.

제안된 CONWIP 시스템을 분석하기 위하여 본 연구에서는 CONWIP 시스템을 동기화 스테이션이 존재하는 폐쇄형 대기네트워크로 모델링하고 이를 승법형 근사법을 이용하여 분석하였으며, 순환적 기법을 이용하여 하부네트워크의 정확한 분석을 수행하여, 단위 수요관점의 다양한 성능치를 계산하였다.

본 연구에서 제안된 근사적 기법은 각 작업장의 성능치를 포함하여, 수요의 즉시 만족확률, 수용확률, 대기시간의 기대치, 대기수의 기대치 등 CONWIP 시스템의 중요한 성능척도치를 비교적 정확하고 신속하게 계산하여 준다. 따라서 본 연구에서 제안된 근사적 기법은 향후 CONWIP 시스템의 경제적인 설계 및 효율적인 운영에 유용하게 이용되어 질 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

- [1] 이정은, 이효성, "Compound Poisson 수요를 갖는 CONWIP 시스템의 근사적 분석", 「한국경영과학회지」, 제23권, 제3호(1998), pp.153-168.
- [2] 박찬우, 이효성, "주문-조립시스템의 설계 및 성능평가", 「한국경영과학회지」, 제27권, 제4호(2002), pp.41-65.
- [3] 박찬우, 이효성, 김창곤, "다단계 수리체계의 성능평가를 위한 폐쇄형 대기행렬 네트워크 모형", 「한국경영과학회지」, 제25권, 제4호(2000), pp.27-44.
- [4] 박찬우, 이효성, 김창곤, "CONWIP 통제방식에 의해 운영되는 다품목 생산시스템의 성능 평가", 「대한산업공학회지」, 제28권, 제1호(2002), pp.1-13.
- [5] Baynat, B. and Y. Dallery, "A Unified View of Product-form Approximation Techniques for General Closed Queueing Networks," *Performance Evaluation* Vol.18(1993), pp. 205-224.
- [6] Buzacott, J.A. and D. Kostelski, "Matrix-geometric and Recursive Algorithm Solution of a two-stage Unreliable Flow Line," *IIE Trans.*, Vol.19(1987), pp.429-438.
- [7] Duenyas, I. and W.J. Hopp, "CONWIP Assembly System with Deterministic Processing and Random Outages," *IIE Transactions*, Vol.24, No.4(1992), pp.97-111.
- [8] Duenyas, I. and W.J. Hopp, "Estimating the Throughput of an Exponential CONWIP Assembly System," *Queueing Systems*, Vol.14(1993), pp.135-157.
- [9] Duenyas, I., W.J. Hopp and M.L. Spearman, "Characterizing the Output Process of a CONWIP Line with Deterministic Processing and Random Outages," *Mgmt. Sci.*, Vol.39(1993), pp.975-988.
- [10] Gstettner, S. and H. Kuhn, "Analysis of Production Control Systems Kanban and CONWIP," *Int. J. Prod. Res.*, Vol.34, No.11 (1996), pp.3253-3273.
- [11] Hall, K.W., "Synchro MRP : Combined Kanban with an MRP, the Yamaha PTMAC system-production Planning and Control in Japan," *American Production and Inventory Control Society*, (1986), pp.43-56.

- [12] Herzog, U., L. Woo and K.M. Chandy, "Solution of Queueing Problems by a Recursive Technique," *IBM J. Res. Dev.*, Vol.19 (1975), pp.295-300.
- [13] Karmarkar, U.S., "Push, Pull and Hybrid Control Schemes," Working Paper QM8614, (1986) Graduate school of Management, Univ. of Rochester.
- [14] Kimura, O. and H. Terada, "Design and Analysis of Pull Systems ; a Method of Multistage Production Control," *Int. J. Prod. Res.*, Vol.19(1981), pp.241-253.
- [15] Kragewsky, L.J. and L.P. King, "Kanban, MRP, and Shaping the Manufacturing Environment," *Mgmt. Sci.*, Vol.33(1987), pp. 39-57.
- [16] Law, A.M. and W.D. Kelton, *Simulation Modeling and Analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill, New-York, 1991.
- [17] Marie, R.A., "An Approximate Analytical Method for General Queueing Networks," *IEEE Trans. Soft. Eng.*, Vol.SE-5(1979), pp.530-538.
- [18] Song, J.S., S.H. Xu, and B. Lin, "Order-Fulfillment Performance Measures in an Assemble-to-Order System with Stochastic Leadtimes," *Operations Research*, Vol. 47, No.1(1999), pp.131-149.
- [19] Spearman, M.L., "Push and Pull Production System: Issues and Comparisons," *Opns. Res.*, Vol.40(1992), pp.521-532.
- [20] Spearman, M.L., "Customer Service in Pull Production System," *Opns. Res.*, Vol.40 (1992), pp.948-958.
- [21] Spearman, M.L., D.L. Woodruff and W.J. Hopp, "CONWIP : A Pull Alternative to Kanban," *Int. J. Prod. Res.*, Vol.28(1990), pp.878-894.